

西安交通大学考试题

成绩

课 程 数学

预科一学校 _____ 考 试 日 期 _____ 年 _____ 月 _____ 日

姓 名 _____ 学 号 _____ 期中 期末

注意：所有答题请写在答题纸上，写在试题和草稿纸上的答案无效。

一. (30 分)单项选择题

1. 设 $a, a_n \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$, 给定命题 p : 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 则命题 p 的否定为 ()

A. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \leq N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$

B. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时, $|a_n - a| \geq \varepsilon$

C. 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意的 $N \in \mathbb{N}^*$, 存在 $n \geq N$, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$

D. 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意的 $N \in \mathbb{N}^*$, 存在 $n \geq N$, 使得 $|a_n - a| \geq \varepsilon$

2. 设 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足 $x^2 + xy + 2y^2 = 1$. 令 $t = x + y$, 则 ()

A. t 的最小值为 $-\frac{\sqrt{14}}{7}$

B. t 的最小值为 $-\frac{2\sqrt{14}}{7}$

C. t 的最大值为 $\frac{3\sqrt{14}}{7}$

D. t 的最大值为 $\frac{4\sqrt{14}}{7}$

3. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, S 为 $\mathbb{R}$ 的子集, 记

$$f(S) = \{f(x) \mid x \in S\},$$

$$f^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in S\}.$$

设 A, B 为 $\mathbb{R}$ 的子集. 则下列选项**错误**的是 ()

A. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

B. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

C. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

D. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

4. 下列不等式中

(1) $\tan x \geq x, \quad \forall x \geq 0$

(2) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \geq 0$

(3) $\sin x \leq x, \quad \forall x \geq 0$

正确的个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 M 在 C 上, $|MF| = 5$. 若以 MF 为直径的圆过点 $(0, 2)$, 则 C 的方程为 ()

A. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 8x$ B. $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 8x$

C. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 16x$ D. $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 16x$

6. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a + b + c = 1$ 。记

$$u = ab + bc + ac, \quad v = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a},$$

则 ()

- A. u 的最大值为 $\frac{1}{3}$, v 的最大值为 1
- B. u 的最小值为 $\frac{1}{3}$, v 的最大值为 1
- C. u 的最大值为 $\frac{1}{3}$, v 的最小值为 1
- D. u 的最小值为 $\frac{1}{3}$, v 的最小值为 1

二. (15 分) 填空题

1. 已知 $O-ABC$ 为空间四面体, P 是底面 ABC 上一点, 且满足

$$2\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, \quad \text{则 } x + y + z = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作其中一条渐近线的垂

线, 垂足为 P 。已知直线 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知 a, b, c 为正数, $a + b + c = 1$, 则 abc^3 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三. (15 分) 已知 $\triangle ABC$ 满足

$$\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B,$$

$$\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4},$$

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{8}$, 求 $\triangle ABC$ 的三个角的角度和三边的长度。

四. (15 分) 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $2p$ ($p > 0$ 为常数)。 $\triangle ABC$ 绕它的一个边旋转 360° 形成的旋转体的体积记为 V , 求 V 的最大值。

五. (25 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 左右顶点分别为 A, B ,

点 P, Q 为椭圆上异于 A, B 的两点, $\triangle ABP$ 面积的最大值为 $\sqrt{6}$ 。设直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 = 2k_2$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 证明: 直线 PQ 过定点。

(3) 过 P 作椭圆 C 的切线交坐标轴于 M, N 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle OMN$ 面积的最小值。