

2025 年少年班预科二数学开学摸底考试

2025 年 9 月 12 日

一、(30 分) 单项选择题

1. 设 $a, a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, 给定命题 p : 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时, $|a_n - a| < \epsilon$ 。则命题 p 的否定为 ()

- A. 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时, $|a_n - a| < \epsilon$
- B. 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geq N$ 时, $|a_n - a| \geq \epsilon$
- C. 存在 $\epsilon > 0$, 使得对于任意的 $N \in \mathbb{N}^*$, 存在 $n \geq N$, 使得 $|a_n - a| < \epsilon$
- D. 存在 $\epsilon > 0$, 使得对于任意的 $N \in \mathbb{N}^*$, 存在 $n \geq N$, 使得 $|a_n - a| \geq \epsilon$

2. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, S 为 $\mathbb{R}$ 的子集, 记

$$f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}, \quad f^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in S\}$$

设 A, B 为 $\mathbb{R}$ 的子集, 则下列选项错误的是 ()

- A. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- B. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- C. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- D. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

3. 设 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足 $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ 。令 $t = x + y$, 则 ()

- A. t 的最小值为 $-\frac{\sqrt{14}}{7}$
- B. t 的最小值为 $-\frac{2\sqrt{14}}{7}$
- C. t 的最大值为 $\frac{3\sqrt{14}}{7}$

D. t 的最大值为 $\frac{4\sqrt{14}}{7}$

4. 下列不等式中

(1) $\tan x \geq x, \forall x \geq 0$

(2) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0$

(3) $\sin x \leq x, \forall x \geq 0$

正确的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

5. 设抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 M 在 C 上, $|MF| = 5$, 若以 MF 为直径的圆过 $(0, 2)$, 则 C 的方程为 ()

A. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 8x$

B. $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 8x$

C. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 16x$

D. $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 16x$

6. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a+b+c=1$, 记 $u = ab+bc+ca$, $v = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$, 则 ()

A. u 的最大值为 $\frac{1}{3}$, v 的最大值为 1

B. u 的最小值为 $\frac{1}{3}$, v 的最大值为 1

C. u 的最大值为 $\frac{1}{3}$, v 的最小值为 1

D. u 的最小值为 $\frac{1}{3}$, v 的最小值为 1

二、(15 分) 填空题

1. 已知 $O-ABC$ 为空间四面体, P 是底面 ABC 上一点, 且满足 $2\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 则 $x+y+z =$ _____.

2. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 做其中一条渐近线的垂线, 垂足为 P , 已知直线 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线的离心率为 _____.
3. 已知 a, b, c 为正数, $a + b + c = 1$, 则 abc^3 的最大值为 _____.

三 (15 分)

已知 $\triangle ABC$ 满足

$$\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B, \quad \cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$$

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{8}$, 求 $\triangle ABC$ 的三个角的角度和三边的长度。

四 (15 分)

已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $2p$ ($p > 0$ 为常数), $\triangle ABC$ 绕它的一个边旋转一周所形成的体积为 V , 求 V 的最大值。

五 (25 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 左右顶点分别为 A, B , 点 P, Q 为椭圆上异于 A, B 的两点, $\triangle ABP$ 面积的最大值为 $\sqrt{6}$, 设直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 = 2k_2$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 证明: 直线 PQ 过定点。
- (3) 过 P 作椭圆 C 的切线交坐标轴与 M, N 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle OMN$ 面积的最小值。