

2025 年少年班预科二数学开学摸底考试答案

wlz

2025-9-12

一、选择题答案

暂无解析，双草酸酯实在是太菜了，还请各位学长帮忙给出正确答案吧！

二、填空题答案

暂无解析，双草酸酯实在是太菜了，还请各位学长帮忙给出正确答案吧！

三

已知 $\triangle ABC$ 满足

$$\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B, \quad \cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$$

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{8}$ ，求 $\triangle ABC$ 的三个角的角度和三边的长度。

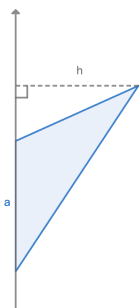
解：

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin A = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin B = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin C = 1 \end{cases}$$

暂无解析，双草酸酯实在是太菜了，还请各位学长帮忙给出正确答案吧！

四 (15 分)

已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $2p$ ($p > 0$ 为常数)， $\triangle ABC$ 绕它的一个边旋转一周所形成的体积为 V ，求 V 的最大值。



$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 a = \frac{1}{3}\pi \frac{(ah)^2}{a} = \frac{4}{3}\pi S^2 a$$

$$= \frac{4}{3}\pi \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a}$$

$$\text{由基本不等式知 } (p-b)(p-c) \leq \left(\frac{2p-(b+c)}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{4}{3}\pi \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a} \leq \frac{\pi ap}{3}(p-a) \leq \frac{\pi p}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{12}p^3$$

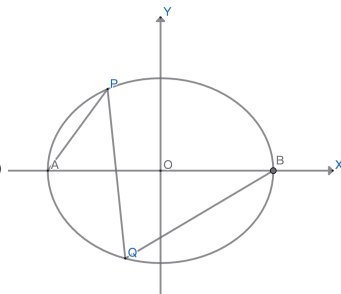
五 (25 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 左右顶点分别为 A, B , 点 P, Q 为椭圆上异于 A, B 的两点, $\triangle ABP$ 面积的最大值为 $\sqrt{6}$, 设直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 = 2k_2$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 证明: 直线 PQ 过定点。

(3) 过 P 作椭圆 C 的切线交坐标轴与 M, N 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle OMN$ 面积的最小值。



解:

(1) 注意到有椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 设 $m_1 = \frac{1}{k_1}, m_2 = \frac{1}{k_2}$, 则 $m_2 = 2m_1$

有 $\begin{cases} AP: x = m_1 y - \sqrt{3}, \\ BQ: x = m_2 y - \sqrt{3} \end{cases}$

联立得 $\begin{cases} (2m_1^2 + 3)y^2 - 4\sqrt{3}m_1 y = 0 \\ (2m_2^2 + 3)y^2 + 4\sqrt{3}m_2 y = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} P = \left(\frac{2\sqrt{3}m_1^2 - 3\sqrt{3}}{2m_1^2 + 3}, \frac{4\sqrt{3}m_1}{2m_1^2 + 3}\right) \\ Q = \left(\frac{-2\sqrt{3}m_2^2 + 3\sqrt{3}}{2m_2^2 + 3}, \frac{-4\sqrt{3}m_2}{2m_2^2 + 3}\right) \end{cases}$ 注

意到直线 PQ 的方程为 $x = \frac{x_p - x_q}{y_p - y_q}y + \frac{y_p x_q - y_q x_p}{y_p - y_q}$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{y_p x_q - y_q x_p}{y_p - y_q} \\
&= \frac{4\sqrt{3}m_1(-2\sqrt{3}m_1^2 + 3\sqrt{3}) + 4\sqrt{3}m_2(2\sqrt{3}m_1^2 - 3\sqrt{3})}{4\sqrt{3}m_1(2m_2^2 + 3) + 4\sqrt{3}m_2(2m_1^2 + 3)} \\
&= \frac{24(m_1^2 m_2 - m_1 m_2^2) + 36(m_1 - m_2)}{5\sqrt{3}(m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2) = 12\sqrt{3}(m_1 + m_2)} \\
&= \frac{-48m_1^3 - 36m_1}{48\sqrt{3}m_1^3 + 36\sqrt{3}m_1}
\end{aligned}$$

带入 P, Q 并令 $y = 0$ 得

即，直线 PQ 恒过点 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$

(3) 设点 $P(x_0, y_0)$

则有切线方程 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ 即有 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{x_0 y_0}$ 又 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ 令 $\cos t = x_0/a, \sin t = y_0/b$

$$\begin{aligned}
\text{则有 } S_{\triangle OMN} &= \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{x_0 y_0} \\
&= \frac{1}{2} \frac{ab}{\cos t \sin t} \\
&= \frac{ab}{\sin 2t} \\
&\leq ab \\
&= \sqrt{6}
\end{aligned}$$