

24 级数学 I 期末考试试卷

2026 年 1 月 5 日

题 1 (10 分). 设函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$. 若 $f(x)$ 有极小值且小于零, 求实数 a 的取值范围.

题 2 (15 分). 已知 $f: A \rightarrow B$ 可逆, $g: B \rightarrow C$ 可逆, 证明: $g \circ f$ 可逆, 且:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

题 3 (15 分). 证明

$$|x \cdot y| \leq |x|_p |y|_q$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 且 $p, q > 0$

题 4 (15 分). 用实数完备性公理证明如下的确界原理: 若集合 A 有界, 则必有上确界.

题 5 (15 分). 证明单调递增且有上界的数列必收敛. 即数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 满足: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}$

题 6 (15 分). 设 $x_n \in R, n \in N_+, a \in R$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{当且仅当} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

题 7 (15 分). 证明函数极限的归并原理 (Heine 定理): 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in R$ 是 A 的聚点, 则以下命题等价:

(i) f 在 x_0 处有极限

(ii) 如果数列 $\{x_n\}$ 有 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ 且 $x_n \rightarrow x_0$, 都有 $\{f(x_n)\}$ 收敛