

$$\ln x \leq (x-1)$$

证. $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$

左 $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1)$ 右 $\ln(x+1) \leq x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 1 \geq \ln \frac{1}{x+1}$

证: $\alpha > 0$ ~~$\ln x \leq x^\alpha$~~ $\exists C > 0$ s.t. $\ln x \leq Cx^\alpha \quad \forall x > 0$

$\because \ln x \leq x$

$\therefore \ln x^\alpha \leq x^\alpha$

$\therefore \alpha \ln x \leq x^\alpha$

$\ln x \leq \frac{1}{\alpha} x^\alpha$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 单调

$y = f(x)$

$x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$

求 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数

$y = \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{2}$

求 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的反函数

$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1$

~~Arctan(x)~~

$$\text{Arcsin } x \quad x \in [-1, 1] \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Arc cos } x \quad x \in [-1, 1] \quad y \in [0, \pi]$$

$$\text{Arc tan } x \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{证: } \text{Arcsin } x + \text{Arcos } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \text{Arcsin } x \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \theta = x$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi]$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = x$$

$$\text{Arcsin } x + \text{Arcos } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{证: } \text{Arc tan } x + \text{Arccot } x = \frac{\pi}{2}$$

同理

$$\text{万能公式} \quad \sin x = \frac{2 + \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 + \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

导数

No

Date

9, 12

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$f'(x_0)$: f 在 x_0 点 增长率

$$\text{平均增长率: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

1.1) 线性性

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad (f, g: I \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

1.2) 乘积函数

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

$$Q'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$x = -\frac{b}{3a}$$

$$Q(x) \text{ 对称轴中点 } \left(-\frac{b}{3a}, Q\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(e^x)' = e^x$$

(3) 除法

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

(4) 复合函数求导

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x)$$

(5) 反函数求导

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\Leftrightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$$

$$\therefore (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln x^a = a \ln x$$

$$\frac{1}{x^a} (x^a)' = \frac{a}{x}$$

$$\therefore (x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

$$(a^x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\right)'$$

$$= \frac{1}{\ln a} x'$$

No. _____
Date _____

$$\ln a^x = x / \ln a$$

$$\frac{1}{a^x} \cdot (a^x)' = 1/\ln a$$

$$(a^x)' = a^x / \ln a$$

$$(a^{\log_a x})' = (x)'$$

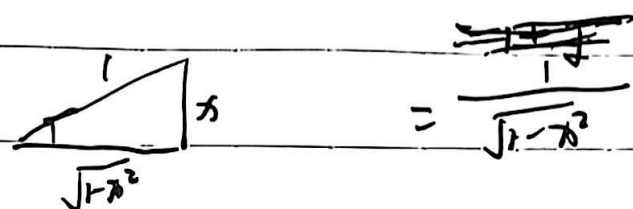
$$a^{\log_a x} \ln a \cdot (\log_a x)' = 1$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$[\sin(\arcsin x)]' = [x]'$$

$$\cos(\arcsin x) \cdot \arcsin x' = 1$$

$$\arcsin x' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$



$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sin \Delta x \cos x}{\Delta x}$$

$$= \cos x$$

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x & (1) \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x & (2) \end{cases}$$

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\therefore (\cos x)' = \frac{1}{2}(i e^{ix} - i e^{-ix})$$

$$= \frac{i}{2} (1 - 1)$$

$$= \frac{i}{2} 2i \sin x = -\sin x$$

$$(\sin x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = \cos x$$

$$(\sec x)' = (\cos x^{-1})' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$$

$$(\csc x)' = (\sin x^{-1})' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \sec^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

均值不等式

定理 1. 设 $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$
 则 $\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta \quad \forall x, y > 0$
 当且仅当 $x = y$ 取等

α, β : 权重 $\rightarrow$ 加权平均 $\alpha x + \beta y$
 几何平均 $x^\alpha y^\beta$

证明: $\Leftrightarrow \alpha \left(\frac{x}{y}\right)^\beta + \beta \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha \geq 1$

令 $t = \frac{x}{y}$

$$\Leftrightarrow \alpha t^\beta + \beta t^{-\alpha} \geq 1$$

令 $f(t) = \text{左}$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \alpha \beta t^{\beta-1} - \alpha \beta t^{-\alpha-1} \\ &= \alpha \beta t^{-\alpha-1} (t - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t < 1 & f'(t) < 0 \\ t > 1 & f'(t) > 0 \end{cases}$$

$$\therefore t=1 \text{ 时, } f(t)_{\min} = 1 \quad \square$$

定理 2 (Young 不等式)

设 $p, q > 0$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $a, b \geq 0$ 则

$$\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \geq ab$$

当 $a^p = b^q$ 时取等

p, q : 共轭指数 ($p, q > 1$)

证明 $\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \geq (a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}} = a \cdot b \quad \square$

定理 3. 设 $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1 \sim n$), $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

则 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n$

当取等 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 取等

证明: 设 x_i 不全相等

(i) $n=2$ 成立

(ii) 设 n 时成立, 证 $n+1$ 时成立

设 $x_1, \dots, x_n$ 不全相等

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n > (x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &\Leftrightarrow \alpha \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n \right) + \alpha_{n+1} x_{n+1} > \alpha (x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha_{n+1} x_{n+1} \\ &\geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \quad \square \end{aligned}$$

$$f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$$\rightarrow y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \quad \text{切线}$$

$$k = f'(x_0)$$

求下列曲线在原点切线

1) $y = \sin x$

$$y' = \cos x$$

$$y'|_{x=0} = 1$$

$$y = x$$

2) $y = \arcsin x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'|_{x=0} = 1$$

$$y = x$$

证: 1) $\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$

2) $\arcsin x \geq x \quad \forall 0 \leq x < 1$

1) $h(x) = x - \sin x \quad x \geq 0$

$$h(0) = 0, \quad h'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\therefore h(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

2) $h(x) = \arcsin x - x \quad 0 \leq x < 1$

$$h(0) = 0, \quad h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \leq 0 \quad \forall 0 \leq x < 1$$

$$\therefore h(x) \leq 0 \quad \forall 0 \leq x < 1$$

证: $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

$h(x) = x - \ln(1+x)$

$h(x)' = 1 - \frac{1}{1+x} \geq 0, \quad \forall x \geq 0$

$h(x)|_{x=0} = 0$

$\therefore x \geq \ln(1+x)$

$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

$g(x)' = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$

$\forall x \geq 0$

$g(x)|_{x=0} = 0$

$\therefore \ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$

导数: $\frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$

(1) $y = \tan x$

$y' = \sec^2 x$

$y'|_{x=0} = 1$

$y = x$

(2) $y = \arctan x$

$y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y'|_{x=0} = 1$

$y = x$

(1) $\tan x \geq x \quad \forall 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(2) $\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$

1) $h(x) = x - \tan x$

$h'(x) = 1 - \sec^2 x \leq 0, \quad h(0) = 0 \quad \forall 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\therefore h(x) \leq 0 \quad \forall 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(2) $h(x) = 1 - \arctan x$

$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0, \quad h(0) = 0, \quad \forall x \geq 0$

$\therefore h(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

对数不等式

$$\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

左 $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln \frac{x_1}{x_2}}$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < \frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{\ln \frac{x_1}{x_2}}$$

令 $t = \frac{x_1}{x_2} \quad t > 1$

$$\sqrt{t} < \frac{t-1}{\ln t}$$

$$\ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{1}{t} < \left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}}{t} \right) ? 1$$

证: $\ln \frac{x_1}{x_2} > 2 \frac{t-1}{t+1}$

$t=1$ 0 0

$$\frac{1}{t} > \frac{2}{(t+1)^2}$$

$$f(x) = e^x - ax \quad (a \in \mathbb{Q})$$

若有 2 零点 $x_1 < x_2$

1) 求证 $x_1 + x_2 > 2$.

$$e^x - ax = 0$$

$$\begin{cases} e^{x_1} - ax_1 = 0 \\ e^{x_2} - ax_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = \frac{ax_1}{ax_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1$$

由对数不等式

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 > 2$$

集合 9.30

记号 $\forall$ 对于任意 $\Rightarrow$ 使得 $\exists$ 存在 s.t. 满足 $\exists!$ 存在唯一.

$$A - B = A \setminus B = \{x; x \in A, x \notin B\}$$

De Morgan 定律.

设 X 为全集, $A_\lambda \subset X, \lambda \in \Lambda, \Lambda \neq \emptyset$ 则

$$(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

$$(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

$$\text{证明. } x \in (\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \quad | \quad (\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$$

$$\Leftrightarrow x \notin \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad | \quad = (\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c)^c$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda, \Rightarrow x \notin A_\lambda \quad | \quad = \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda, \Rightarrow x \in A_\lambda^c$$

$$\Leftrightarrow x \in \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

映射

 $\forall x \in A, \exists f(x) \in B$ 与 x 对应称 f 为 A 到 B 映射. 记为 $f: A \rightarrow B$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ 是 } x \text{ 的像. } x \text{ 为 } f(x) \text{ 原像} \end{array} \right.$$
 A 为 f 定义域 记为 $\text{Dom } f$. B 为 f 陪域值域 $\text{Rg } f = \{f(x) \mid x \in A\}$

单射

若 $f(x_1) = f(x_2), x_1 = x_2$

满射

 $f: A \rightarrow B$, 若 $\text{Rg } f = B$

双射

既单又满

逆映射

 $f: X \rightarrow Y$ 为双射 定义 $f^{-1}: Y \rightarrow X$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$$

Eg. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x$ 证 f 为双射并求 f^{-1} 证明: 设 $y \in \mathbb{R}$

$$\text{方程 } 2x = y, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{有唯一解 } x = \frac{y}{2}$$

 $\therefore f$ 是双射

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y \quad y \in \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \quad x \in \mathbb{R} \quad \square$$

Ex 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ $f(x) = e^{2x+1}$ 证 f 双射, 求 f^{-1}

证明 设 $y > 0$ 方程 $e^{2x+1} = y$ $x \in \mathbb{R}$

有唯一解 $x = \frac{\ln y - 1}{2}$

$\therefore f$ 为双射 且 $f^{-1}(y) = \frac{\ln y - 1}{2}$ $y \in (0, +\infty)$

命题 2 $f: A \rightarrow B$ 可逆, 设 $x \in A, y \in B$. 如果 $f(x) = y$, 则 $f^{-1}(y) = x$

证明 由定义 $f^{-1}(f(x)) = x$

所以 $f^{-1}(y) = x$ $\square$

命题 3 $f: A \rightarrow B$ 可逆 $f(f^{-1}(y)) = y$ $\forall y \in B$

证明 设 $f(x) = y$, $x \in A$

则 $x = f^{-1}(y)$

$\therefore f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ $\square$

命题 4 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆, 则 f^{-1} 可逆, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$

证明: 先证 f^{-1} 是单射, 设 $y_1, y_2 \in B$

$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$

则 $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2$

再证 f^{-1} 是满射 设 $x \in A$,

则 $x = f^{-1}(f(x))$

$\therefore f^{-1}$ 是满射

$I_X: X \rightarrow X$ $I_X(x) = x$ $x \in X$ 恒同映射

命题 5. $f: A \rightarrow B$ 则 $f \circ I_A = I_B \circ f = f$

设 $x \in A$

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

$$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x) \quad \square$$

命题 6: 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆 则 $f^{-1} \circ f = I_A$ $f \circ f^{-1} = I_B$

命题 7: $f: A \rightarrow B$ 则 f 可逆当且仅当存在 $g: B \rightarrow A$ st. $\begin{cases} g \circ f = I_A \\ f \circ g = I_B \end{cases}$
并当 g 满足 $f^{-1} = g$

证明: (1) f 单射. 设 $x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) = f(x_2)$ | (2) f 满射. 设 $y \in B$ $y = I_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$

$$\text{由 (1)} \quad x_1 = I_A(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) \quad \text{由 (2)} \quad f^{-1} = g \quad \text{设 } y \in B. \text{ 由 (2)}$$

$$= g(f(x_2)) = g(f(x_1)) = I_A(x_1) = x_1$$

$$f(g(y)) = y$$

$$g(y) = f^{-1}(y) \quad \square$$

设 $x \in A$ 记 $y = f(x)$ 则 $x = f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x)$$

$$\therefore (f^{-1})^{-1} = f \quad \square$$

命题 9 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆 $g: B \rightarrow C$ 可逆, 则 $f \circ g$ 可逆. 且

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

证 $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ I_B \circ f$

$$= f^{-1} \circ f = I_A$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_B \quad \square$$

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + A}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1 \end{array} \right.$$

Schröder - Bernstein 定理

$f(A) \rightarrow A$ 像集 $f^{-1}(B)$ 的原像集

命题一 $f: X \rightarrow Y$

(1) $A_1 \subset A_2 \subset X$ 则 $f(A_1) \subset f(A_2)$

(2) $B_1 \subset B_2 \subset Y$ 则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

2. 单调增映射不动点

设 A , 记 $2^X = \{A; A \subset X\}$ 幂集

定义 1: $F: 2^X \rightarrow 2^X$ 如果 $F(S_1) \subset F(S_2) \quad \forall S_1 \subset S_2 \subset X$

则称 F 单调增

定义 2: $F: 2^X \rightarrow 2^X$ 如果存在 $A \subset X$ st $F(A) = A$. 称 F 有不动点 A

命题 2: $F: 2^X \rightarrow 2^X$ 如果 F 单调增, 则 F 有不动点.

证明: 记 $\Omega = \{S \subset X; S \subset F(S)\}$

$\because \emptyset \in \Omega \therefore \Omega \neq \emptyset$

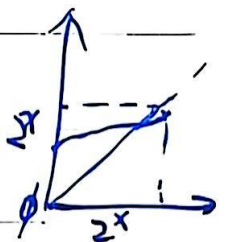
令 $A = \bigcup_{S \in \Omega} S$

设 $S \in \Omega$, 则 $A \subset F(A)$
 $S \subset F(S) \subset F(A) \quad \therefore F(A) \subset F(F(A))$

$\therefore S \subset F(A) \quad \forall S \in \Omega \quad \therefore F(A) \in \Omega$

$\therefore A \subset F(A) \quad \therefore F(A) \subset A$

$\therefore F(A) = A$



3. Schröder-Bernstein 定理

定理 1: 设 $f: X \rightarrow Y$ $g: Y \rightarrow X$ 单射, 则存在双射 $h: X \rightarrow Y$

证: $g(Y - f(C)) = X - C$

$$\Leftrightarrow X - g(Y - f(C)) = C$$

$$\text{设 } F: 2^X \rightarrow 2^X \quad F(S) = X - g(Y - f(S)) \quad S \in 2^X$$

$$\Leftrightarrow F(C) = C$$

即证 F 单调增

$$\text{设 } S_1 \subset S_2 \subset X$$

$$f(S_1) \subset f(S_2)$$

$$Y - f(S_1) \supset Y - f(S_2)$$

$$g(Y - f(S_1)) \supset g(Y - f(S_2))$$

$$X - g(Y - f(S_1)) \subset X - g(Y - f(S_2)) \quad \square$$

集合的势

定义1: 设 $A, B \neq \emptyset$ 如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 则 $\bar{A} \leq \bar{B}$
(或 $\bar{B} \geq \bar{A}$)

定义2: 设 $A, B \neq \emptyset$ 如 $\bar{A} \leq \bar{B}$ 且 $\bar{B} \leq \bar{A}$ 则 A, B 等势 记 $\bar{A} = \bar{B}$
否则 A, B 不等势 记 $\bar{A} \neq \bar{B}$

命题2. $\bar{A} = \bar{B}$ 当且仅当 存在双射 $f: A \rightarrow B$

定义4: 若 $\bar{A} = \overline{\{1, 2, \dots, n\}}$ 有限集. $n \in \mathbb{N}^+$
否则无限集

命题4: $\mathbb{N}^+$ 为无限集. 且如果 A 为无限集 $\bar{\mathbb{N}^+} \leq \bar{A}$
($\bar{\mathbb{N}^+}$ 在无限集中最小.)

证: 设 $\mathbb{N}^+$ 有限, 则 $\bar{\mathbb{N}^+} = \overline{\{1, 2, \dots, n\}}$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$

由 Schöder-Berstein 存在双射 $h: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}^+$

令 $N = \max\{h(1), h(2), \dots, h(n)\}$

则 $N+1 \notin \text{Rg } h$, $N+1 \in \mathbb{N}^+$ 矛盾 $\square$

证: $A \neq \emptyset$ 存在 $a_1 \in A$ $\because A$ 无限

$\therefore A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ 否则 $\bar{A} = \bar{\{1\}}$

任取 $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ 则 $a_2 \neq a_1$

$\because A$ 无限 $\therefore A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$

重复 $a_i \in A, i = 1, 2, \dots$

且 $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$

定义 $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow A, f(i) = a_i$

$i = 1, 2, \dots$ KIDUYO

定义5: 设 A 为实数集 如 $\bar{A} = \mathbb{R}$ 则为实不可数集

结论: (1) $\mathbb{R}$ 不可数, $\mathbb{Q}$ 可数 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 不可数

(2) 可数个可数集 仍是可数集

A_n 可数 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ 可数

平面上建系 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$

记 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$

称 $\mathbb{R}^2$ 为二维欧氏空间

同理 $\mathbb{R}^3$ 为三维欧氏空间

定义1: 设 $X = \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, 记 $x_i = X(i)$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

称 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n -元有序数组

$$\text{设 } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i \Leftrightarrow x_i = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ 零向量}$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

} 单位向量

2. 线性运算 设 x, y

$$\text{定义 } kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\text{命题 1. 设 } x \in \mathbb{R}^n \text{ 且 } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 标准正交基

基本运算律

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ $k, l \in \mathbb{R}$ 则

$$1. x + y = y + x$$

$$2. (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$3. 0 + x = x$$

$$4. x + (-x) = 0$$

$$5. 1x = x$$

$$6. (kl)x = k(lx)$$

$$7. (k+l)x = kx + lx$$

$$8. k(x+y) = kx + ky$$

命题 2 $kx = 0$ 则 $k=0$ 或 $x=0$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = (0, \dots, 0)$$

$$\therefore kx_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{如果 } k \neq 0 \quad x_i = 0 \quad x = 0$$

3. 平行和同向

(1) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 称 $\alpha x + \beta y$ 为 x, y 线性组合

(2) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 其中 α, β 不全为零, st. $\alpha x + \beta y = 0$
称 x, y 平行 (线性相关), $x \parallel y$

由定义, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $0 \parallel x$

(3) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x, y \neq 0$. 如果 $\exists k > 0$, st. $y = kx$ 称 x, y 同向

命题 3. 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$. 7.31 命题等价

(1). $x \parallel y$

(2) $\exists k \in \mathbb{R}$ st. $x = ky$ 或 $y = kx$

(3). $x_i y_j = x_j y_i$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\exists \alpha + \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

① $\alpha \neq 0$ $x = -\frac{\beta}{\alpha} y$

② $\beta \neq 0$ $y = -\frac{\alpha}{\beta} x$

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $x = ky$ $\therefore x_i = k y_i$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i y_j = k y_i y_j = x_j y_i$$

(3) $\Rightarrow$ (1) ① $x = 0$ $0 \parallel y$

② $x \neq 0$ $\exists i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ $x_{i_0} \neq 0$

$$x_{i_0} y_j = y_{i_0} x_j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\therefore x_{i_0} y = y_{i_0} x$$

$$\therefore x_{i_0} y - y_{i_0} x = 0$$

$$\therefore x \parallel y$$

命题4 设 $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 则

(i) $x \parallel y$ 当且仅当 $\exists k \in \mathbb{R}$ 使得 $y = kx$

$$\Leftarrow kx + (-1)y = 0 \Rightarrow x \parallel y$$

$$\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$\alpha x + \beta y = 0$$

如果 $\beta = 0$ 则 $\alpha x = 0$ 矛盾

$$\therefore y = -\frac{\alpha}{\beta} x$$

(ii) 如果 $x \parallel y, y \perp z$ 则 $x \perp z$

6. 内积

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 定义

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

称 x, y 内积, 也记 $x \cdot y = \langle x, y \rangle$

命题5 $x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1) (非负性) $\langle x, x \rangle \geq 0$ "当且仅当" $x = 0$

(2) (对称性) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(3) (线性性) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

由(2)(3)可得 $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle$

向量的模

设 $x \in \mathbb{R}^n$ 定义

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

称为长度、模或2-范数

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}$$

如果 $|x| = 1$ 称 x 为单位向量

命题6 Cauchy 不等式 $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|x \cdot y| \leq |x| |y| \quad \text{当且仅当 } x/y \text{ 取等}$$

证明: 由恒等式 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq |x|^2 |y|^2 - 2(x \cdot y)^2$ 可得

命题7 向量模运算 $x, y \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$

(1) (非负性) $|x| \geq 0$ 当且仅当 $x = 0$

(2) (非负齐性) $|kx| = |k| |x|$

(3) (三角不等式) $|x+y| \leq |x| + |y|$ 当且仅当 x, y 同向取等

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= |x| |y| \\ \Rightarrow x, y \text{ 平行} &\Rightarrow y = kx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |kx|^2 &= |k|^2 |x|^2 \\ \therefore k &= |k| \geq 0 \quad \text{即 } x, y \text{ 同向} \end{aligned}$$

6. 向量夹角

$x, y \in \mathbb{R}^n, x, y \neq 0$ 由 Cauchy

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{|x||y|} \leq 1$$

因此存在唯一 $\theta \in [0, \pi]$

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|}$$

$x \cdot y = 0$, 称 x, y 垂直/正交 记 $x \perp y$

$$\text{有 } |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

7. 正交投影

设 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 记

$$x^0 = x/|x|$$

则 $|x^0| = 1$, 称 x^0 为 x 对应单位向量

设 $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$, 设 $b \in \mathbb{R}^n$, 称 $b \cdot a^0$ 为 b 在 a 上投影

称 $(b \cdot a^0)a^0$ 为 b 在 a 上投影向量

命题 设 $a, b \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ 记 $b_1 = (b \cdot a^0)a^0, b_2 = b - b_1$

则 $b_1 \perp b_2$ 且 $|b|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2$

称 $b = b_1 + b_2$ 为 b 正交分解

$$|b_1| = |(b \cdot a^0)a^0|$$

证 $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle b_1, b - b_1 \rangle = \langle b_1, b \rangle - |b_1|^2$

$$= |b \cdot a^0| \cdot |a^0|$$

$$= (b \cdot a^0)^2$$

$$- (b \cdot a^0)^2 = 0$$

$$= (b \cdot a^0)$$

8. 平行和三角形面积

设 $a \in \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, x, y 不平行夹角 θ

记 $P = \{a + \lambda x + \mu y; 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$ 为以 a 为顶点 x, y 为邻边
平行四边形. 记

$$S(P) = |x||y|\sin\theta \text{ 为面积}$$

命题 9. $S(P) = \sqrt{|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2}$

证: $S(P) = |x||y| \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

$$= \sqrt{|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2}$$

命题 10 设 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

1. (非负性) $|x - y| \geq 0$ 当且仅当 $x = y$ 时成立

2. (对称性) $|x - y| = |y - x|$

3. (三角不等式) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ 当且仅当 y 在 x, z 之间

$$\Rightarrow y = (1 - \lambda)x + \lambda z \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\lambda = \frac{|y - x|}{|x - z|}$$

10. 向量 p -范数

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. 设 $p \geq 1$ 记

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

称 $|x|_p$ 为 x 的 p -范数, 记.

$$|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

称 $|x|_\infty$ 为 x 的 ∞ -范数

命题 11 (Hölder 不等式)

设 $p, q > 0$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$x \cdot y \leq |x|_p |y|_q$$

命题 12. 设 $p \geq 1$ 或 $p = \infty$. $x, y \in \mathbb{R}^n$. $k \in \mathbb{R}$.

(1) (非负性) $|x|_p \geq 0$ " $=$ " 成立 仅当 $x=0$.

(2) $|kx|_p = |k| |x|_p$ (齐次性)

(3) (三角不等式) (闵可夫斯基) $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

证: $|x+y|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1} |x_i+y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1} |y_i| \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + |x|_p + \dots$$

$$= |x+y|_p^{\frac{p}{q}} (|x|_p + |y|_p) \quad p - \frac{p}{q} = 1$$

Campus $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

确界原理

定义1: 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 如果存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得

$$x \leq M, \quad \forall x \in A$$

称 A 有上界, M 是 A 上界 同理可定义下界

$$M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A \Rightarrow \text{有界}$$

定义2: 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 设 $M \in \mathbb{R}$ 如果

$$x \leq M, \quad \forall x \in A$$

且对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $x \in A$ st.

$$x > M - \varepsilon$$

称 M 为 A 上确界

同理可定义下确界

命题1: 上确界唯一性

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (1) M_1, M_2 都为上确界 $M_1 > M_2$ (2) 同理

证: ~~由已知~~ A

设 $\varepsilon > 0$ 存在 $x \in A$

$$\text{st. } M_1 - \varepsilon \leq x \leq M_2$$

$$\therefore M_1 - M_2 \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\therefore M_1 - M_2 \leq 0$$

$$M_1 \leq M_2$$

同理 $M_2 \leq M_1$

$$\therefore M_1 = M_2$$

如果 A 存在上确界 记 $\sup A$

下确界 记 $\inf A$

Eg.1 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$$(1) M = \max A, \quad \mathbb{R}: M = \sup A$$

$$(2) m = \min A, \quad \mathbb{R}: m = \inf A$$

证. 因为 $M = \max A \quad \therefore x \leq M, \quad \forall x \in A$

设 $\varepsilon > 0$ 令 $x = M$. 则 $x \in A$ 且 $x > M - \varepsilon$ $\square$

Eg.2. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ 则 $a = \inf(a, b)$, $b = \sup(a, b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 令 $x = \max \left\{ \frac{a+b}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in (a, b)$

$x > b - \varepsilon$

定理 2.

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) A 有上界 $\Leftrightarrow A$ 有上确界

(ii) A 有下界 $\Leftrightarrow A$ 有下确界

证 (i): 记 $B = \{y \in \mathbb{R}; x \leq y \ \forall x \in A\}$

则 $B \neq \emptyset$

$\therefore x \leq y \ \forall x \in A, y \in B$

完备性公理 存在 $C \in \mathbb{R}$ 使得 $x \leq C \leq y \ \forall x \in A, y \in B$

设 $\varepsilon > 0$, 欲证 $\exists x \in A$

$x > C - \varepsilon$

反证 假设: $x \leq C - \varepsilon \ \forall x \in A$

则 $C - \varepsilon \in B$.

$\therefore C \leq C - \varepsilon$ 矛盾

$\therefore C = \sup(A)$

命题 3 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

记 $-A = \{-x; x \in A\}$

(1) 如果 A 有上界, 则 $-A$ 有下界, 且 $\inf(-A) = -\sup(A)$ (2) ...

证: $\because x \leq \sup A, \forall x \in A$

$\therefore -x \geq -\sup A, \forall x \in A$

$\therefore -A$ 有下界 $-\sup A$

$\inf(-A) \geq -\sup A$

$\because y \geq \inf(-A), \forall y \in -A$

$\therefore -y \leq \sup A, \forall y \in -A$

$\therefore \sup A \leq -\inf(-A)$

$-\sup A \geq \inf(-A)$

$\therefore \inf(-A) = -\sup A$

11.7

数列极限.

定义: 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$ 定义 $a: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(n) = a_n \quad n \in \mathbb{N}^+$$

我们称 a 为数列. 记为 $a = \{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 或简记为 $\{a_n\}$ 定义: 设 a_n , $a \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}^+$ 使得

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

称 a 是 $\{a_n\}$ 极限Eg: 证 0 是 $\{\frac{1}{n}\}$ 极限

$$\text{设 } \varepsilon > 0 \quad \text{令 } N = \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \right\rceil + 1$$

$$\text{则 } \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \square$$

命题 1: (唯一性) 设 $a, b, a_n \in \mathbb{R}$. a, b 都是 $\{a_n\}$ 极限 则 $a=b$ 证: 设 $\varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}^+ \text{ st.}$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^+ \quad \text{st.}$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$

$$\text{令 } N = \max\{N_1, N_2\} \quad \text{则}$$

$$|a - a_n| \leq \varepsilon$$

$$|b - a_n| \leq \varepsilon$$

$$\therefore |a - b| \leq \varepsilon \quad \therefore a = b \quad \square$$

证号. a 是 $\{a_n\}$ 极限 记 $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
或 $a_n \rightarrow a$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

Ex₂ 设 $a_n = (-1)^n$ 证 $\{a_n\}$ 没有极限

反证 设极限 $= a$

则存在 $N \in \mathbb{N}^+$ s.t.

$$|a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n > N$$

$$\text{则} \quad |a_{2n} - a| = |1 - a| \leq \frac{1}{2}$$

$$|a_{2n+1} - a| = |a - (-1)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore |1 - (-1)| \leq 1$$

$$2 \leq 1 \quad \text{矛盾}$$

$\therefore \{a_n\}$ 没极限 $\square$

反证 设 $a \neq b$

$$\text{证: 令 } \varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$$

则存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^+$ 使得

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \forall n \geq N_1$$

$$a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \quad \forall n \geq N_2$$

$$\text{令 } N = \max\{N_1, N_2\} \text{ 则}$$

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \emptyset$$

矛盾 $\therefore$ 假设不成立

定义2: $\{a_n\}$ 有极限 则 $\{a_n\}$ 收敛 否则发散

命题2. (等价定义) 设 $a_n, a \in \mathbb{R}$ 设 $C > 0$ 且 (与 n 无关)
下列叙述等价

(i) $a_n \rightarrow a$

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}^+$ st.

$$|a_n - a| \leq C\varepsilon \quad \forall n \geq N$$

证: (i) $\Rightarrow$ (ii)

设 $\varepsilon > 0$ 则 $C\varepsilon > 0$

则 $\exists N \in \mathbb{N}^+$ 使得 $|a_n - a| \leq C\varepsilon \quad \forall n \geq N$

Ex.

设 $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ 证 $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \rightarrow a$

证: 设 $\varepsilon > 0$ $\because a_n \rightarrow a \therefore \exists N_1 \in \mathbb{N}^+$ st.

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a| + \frac{1}{n} \sum_{i=N_1+1}^n |a_i - a|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a| + \varepsilon$$

$$\because \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a| \rightarrow 0$$

$\therefore$ 存在 $N_2 \in \mathbb{N}^+$ st. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$

则 $\left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - a \right| \leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

命题3. (有界性) 设 $a_n \in \mathbb{R}, n=1, 2, \dots$ 如果 $\{a_n\}$ 收敛,
则 $\{a_n\}$ 有界.

证明 设 $a_n \rightarrow a$ 存在 $N \in \mathbb{N}^+$

使得 $|a_n - a| \leq 1 \quad \forall n \geq N$

令 $R = 1 + |a - a_1| + \dots + |a - a_N|$

则 $|a_n - a| \leq R \quad \forall n = 1, 2, \dots$

$-R + a \leq a_n \leq R + a \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad \square$

定义4: 设 $a_n \in \mathbb{R}, n=1, 2, \dots$ 设 $n_k \in \mathbb{N}^+ k=1, 2, \dots$

$n_{k+1} > n_k \quad k=1, 2, \dots$

称 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 为 $\{a_n\}$ 子列.

命题4 (子列极限). 设 $a_n, a \in \mathbb{R} \quad n=1, 2, \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

如果 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 子列 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

证明: 设 $\varepsilon > 0$ 则存在 $N, \in \mathbb{N}^+$ 使得 $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N$

当 $k \geq N$ 时, $n_k \geq N$

则 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \square$

Eg 设 $a_n = (-1)^n$ 证 $\{a_n\}$ 不收敛.

证. $\{a_{2n}\} \rightarrow 1 \quad \{a_{2n+1}\} \rightarrow -1$

$\therefore \{a_n\}$ 不收敛

命题 (夹逼定理) 设 $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$

$a_n \rightarrow a$ $c_n \rightarrow a$ 如果 $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}^+$

则 $b_n \rightarrow a$

证明 设 $\varepsilon > 0$ 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^+$ s.t.

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1, \quad |c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

令 $N = N_1 + N_2 + n_0$ 则

$$|b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad \square$$

Ex: 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100} + 50n}{n^{100} + n^{50}} = 1$

命题 6. (不等式取极限) 设 $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$ $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$.

如果 $a_n < b_n \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}^+$

$\therefore a \leq b$

$$\begin{aligned} \text{证明: } a - b &= a_n - b_n + (a - a_n) - (b - b_n) \\ &\leq 0 + |a - a_n| + |b - b_n| \quad \forall n \geq n_0 \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

因此 $a \leq b$

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$ 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}^+$ st.

$$a_n < b \quad \forall n \geq n_0$$

证: $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ st. $|a_n - a| \leq \frac{b-a}{2} \quad \forall n \geq n_0$

$$\text{则 } a_n \leq a + \frac{b-a}{2} < b \quad \forall n \geq n_0 \quad \square$$

命题 7. (四则运算) 设 $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}, n=1, 2, \dots, a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(i) \quad \alpha a_n + \beta b_n \rightarrow \alpha a + \beta b$$

$$(ii) \quad a_n b_n \rightarrow ab$$

$$(iii) \quad a_n / b_n = a/b \quad b, b_n \neq 0$$

定义 5: 设 $a_n \in \mathbb{R}$. 如果 $a_n \leq a_{n+1}$

则 $\{a_n\}$ 单增

如果 $a_n < a_{n+1}$

则 $\{a_n\}$ 严格单增

定理 8 (单调收敛定理). 设 $a_n \in \mathbb{R}$.

(1) 如 $\{a_n\}$ 单↑有上界 则 $a_n \rightarrow \sup a_n$

(2) 如 $\{a_n\}$ 单↓有下界 则 $a_n \rightarrow \inf a_n$

证 (1) 设 $A = \sup a_n$ 设 $\varepsilon > 0$

则存在 $N \in \mathbb{N}^+$ st.

$$A_N \geq A - \varepsilon$$

则当 $n \geq N$ 时

$$A - \varepsilon \leq A_N \leq a_n \leq A \leq A + \varepsilon$$

$$\text{即 } |a_n - A| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \square$$

(2). $\{a_n\}$ 单增有上界, 由 (1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\sup(-a_n) = \inf a_n \quad \square$$

$$b_n = a_n + \frac{b_1 - a_1}{2^n} \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0$$

设 $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}^+$ st.

$\exists N_2 \in \mathbb{N}^+$ st. $b_{N_2} - a_{N_2} < \varepsilon$
 $\exists N \in \mathbb{N}^+$ $N \geq N_1$ st. $x_N \in [a_{N_2}, b_{N_2}]$

$$x_{N_2} \leq x_0 \leq b_{N_2}$$

$$\therefore |x_N - x_0| \leq \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

$$\therefore |x_n - x_0| \leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$$

Cauchy 收敛原理

定义 7: 设 $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t.

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列.

定理 9. $x_n \in \mathbb{R}, n=1, 2, \dots$ $\{x_n\}$ 收敛 当且仅当 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列

证明:

$$\Rightarrow \text{记 } a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

设 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^+$ s.t.

$$|x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N$$

则当 $m, n \geq N$ 时

$$|x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |x_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\therefore |x_n - x_m| \leq |x_m - a| + |x_n - a| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ 设 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列 则 $\{x_n\}$ 有界

设 $|x_n| \leq M > 0$

则 $[-M, M]$ 中有 $\{x_n\}$ 无限项, 记 (a_1, b_1) 为 $[-M, M]$

记 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ 如 $[a_1, c_1]$ 中有无限项 取 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$

否则取 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$

重复上述过程, 得到 (a_k, b_k)

$(a_{k+1}, b_{k+1}) \subset (a_k, b_k)$, $[a_k, b_k]$ 有 $\{x_n\}$ 无限项

$\{x_n\}$ 有极限, 记 $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(R1)

定义8: 设 $a_n \in \mathbb{R}$. 如果对任意 $M > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}^+$ st.

$$a_n > M \quad \forall n \geq N$$

称 $\{a_n\}$ 趋于正无穷. 记 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ 或 $a_n \rightarrow +\infty$

同理可定义 $-\infty$

数列的上下极限

记 $[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ 称广义实数集

约定: (1) $-\infty < k < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$$(2) (k + (+\infty)) = +\infty + k = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$(3) (k \cdot (+\infty)) = +\infty \cdot k = +\infty, \quad \forall k \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

记 $\sup_{k \geq n} a_k = \sup \{a_k; k \in \mathbb{N}^+, k \geq n\}$

$\{a_n\}$ 有上界 $\{\sup_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调减

令 $b_n = \{\sup_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{+\infty}$

① b_n 有下界 $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$

② b_n 无下界 $b_n \rightarrow -\infty$

称 b_n 所趋于数为 a_n 上极限

若 a_n 无上界, 则上极限为 $+\infty$

定义: 设 a_n 如果 $\{a_n\}$ 有上界, 记

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_k$$

否则记 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ 为上极限

证: 设 $a_n \rightarrow a$ 证 $a \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$

证: ① $\{a_n\}$ 无上界 显然

② $\{a_n\}$ 有上界

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_k \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \square$$

③ 证 $a \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$

$$12) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_k \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_k$$

$$13) \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{a_n\} \text{ 有上界} \\ \text{无上界} \end{array} \right. \quad \sup a_n = \inf -a_n$$

$$\sup a_n = +\infty, \quad \inf -a_n = -\infty$$

命题 10 设 $a_n \in \mathbb{R}$ $a \in [-\infty, +\infty)$ 则 $\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = a$

当且仅当

(C1) $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 子列. 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = s \in [-\infty, +\infty)$ 且 $s \leq a$

(C2) 存在 $\{a_n\}$ 子列 $\{a_{n_k}\}$ 使 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$

证 (C1) (a) $\{a_n\}$ 无上界 $a = +\infty$

(b) $\{a_n\}$ 有上界 $a = -\infty$

(c) $a \in \mathbb{R}$

(C2)

Ex. 设 $a_n \leq b_n$

证. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

证 $\exists \{a_{n_i}\}$ 及 $\{b_{n_i}\}$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} a_{n_i} = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}$$

$\exists \{b_{n_i}\}$ 及 $\{b_{n_j}\}$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} b_{n_i} = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}$$

$$a_{n_i} \leq b_{n_i}$$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} a_{n_i} \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} b_{n_i}$$

Weierstrass 定理

$\{a_n\}$ 有界 则 $\{a_n\}$ 必有一个收敛子列

证明 记 $A = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}$

$\because \{a_n\}$ 有上界 $\therefore A \neq +\infty$

$\therefore A \in \mathbb{R}$

$\{a_n\}$ 有下界 $A \neq -\infty$

$$\exists a_{n_k} \rightarrow A$$

$\square$

Ex. 证 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n$

证: $\exists \{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ 子列

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)$$

$\exists \{a_{n_k}\}$ 子列 $\{a_{n_{k_i}}\}$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} a_{n_{k_i}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \{a_{n_{k_i}}\}$$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{i \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_i}} + b_{n_{k_i}}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} a_{n_{k_i}} + \lim_{i \rightarrow +\infty} b_{n_{k_i}} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \end{aligned}$$

Ex. 设 $\{a_n\}$ 有界. 如果 $\{a_n\}$ 不收敛, 则 $\{a_n\}$ 有 2 收敛子列 $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$

命题 11 设 a_n $a \in [-\infty, +\infty]$. 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 当且仅当

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

证: $\Rightarrow$

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$\exists \text{ 子列 } \{a_{n_k}\} \rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

$\Leftarrow$

① $a = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \quad a_n \geq \inf_{k \geq n} a_k$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

② $a = -\infty$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty, \quad a_n \leq \sup_{k \geq n} a_k$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

③ $a \in \mathbb{R}$

$$\inf_{k \geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \geq n} a_k$$

$$a_n \rightarrow a$$

Ex. 1. 设 a_n, b_n, c_n 设 $a \in [-\infty, +\infty]$, $a_n \rightarrow a$, $c_n \rightarrow a$

证: 设 $n_0 \in \mathbb{N}^+$ st.

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{并 } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$$

$$\text{证: } a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$$

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$$

$$\therefore b_n \rightarrow a$$

函数的极限

定义1. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 如果 $\forall \varepsilon > 0$
 $A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$
 称 x_0 是 A 的聚点.

x_0 不一定属于 A . $A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ 为无限集

定义2. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. 设 $x_0 \in A$. $\exists \varepsilon > 0$ st
 $A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0\}$
 称 x_0 是 A 孤立点.

命题1. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 则 x_0 是 A 聚点当
 且仅当 $\exists x_n \in A \setminus \{x_0\}$ st. $x_n \rightarrow x_0$.

$\Leftarrow$ 设 $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^+$ st. $|x_n - x_0| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

则 $x_n \in A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\})$

$\therefore A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ 设 $n \in \mathbb{N}^+$ 则

$A \cap ((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

设 $x_n \in A \cap ((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \setminus \{x_0\})$

则 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ 且 $x_0 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_0 + \frac{1}{n}$

由夹逼定理 $x_n \rightarrow x_0$

□

定义3 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 聚点, $a \in \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ st.

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta$$

称 a 是 f 在 x_0 处极限

命题2 函数极限有唯一性

证明: 设 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta_1, \delta_2 > 0$ st.

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\})$$

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \setminus \{x_0\})$$

设 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 今

$$x_1 \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$$

$$|f(x_1) - a| < \varepsilon, \quad |f(x_1) - b| < \varepsilon$$

$$|a - b| < 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\therefore a = b$$

□

命题3: $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 聚点, $a \in \mathbb{R}$. 设 $C > 0$

有等价定义:

(i) a 是 f 在 x_0 点极限

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ st. $|f(x) - a| \leq C\varepsilon \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta$

证明: $\square$

命题4: $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 聚点, $a \in \mathbb{R}$. 设 $\delta_0 > 0$

有等价命题:

(i) a 是 f 在 x_0 极限

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ 存在 $0 < \delta < \delta_0$ st.

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta$$

证明: (ii) $\Rightarrow$ (i) 显然

(i) $\Rightarrow$ (ii) 设 $\varepsilon > 0$ 由 (i) $\exists \delta' > 0$ st.

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta'$$

$$\text{令 } \delta = \frac{1}{2} \min \{ \delta', \delta_0 \} \quad \text{则 } 0 < \delta < \delta_0$$

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta$$

命题5: 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 聚点, $a \in \mathbb{R}$, 设 $\delta_0 > 0$
 定义 $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中:

$$B = A \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$$

$$g(x) = f(x) \quad x \in B$$

则 x_0 是 B 聚点, 且 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 当且仅当 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

又称 g 为 f 在 B 上限制. 记 $g = f|_B$

证明: 设 $\delta > 0$ 则

$$B \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) = A \cap ((x_0 - \delta', x_0 + \delta') \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

$$\delta' = \min\{\delta, \delta_0\} \quad \therefore x_0 \text{ 是 } B \text{ 聚点}$$

$\Leftarrow$ 设 $\varepsilon > 0$ 则存在 $0 < \delta < \delta_0$ st.

$$|g(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in B \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$$

则

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$$

$\Rightarrow$ 设 $\varepsilon > 0$ $\exists 0 < \delta < \delta_0$ st.

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$$

$$\text{则 } |g(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in B \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$$

□

Heine 归结原理

命题 6: 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 聚点, $a \in \mathbb{R}$.

$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. 如果 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$

则 $f(x_n) \rightarrow a$

证明: 设 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ st. $|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

$\exists N \in \mathbb{N}^+$ st.

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n > N$$

设 $n > N$ $x_n \in A$ $|x_n - x_0| < \delta$

$$|f(x_n) - a| < \varepsilon$$

$\therefore f(x_n) \rightarrow a \quad \square$

命题 7: 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 聚点, 下列叙述等价

(1) f 在 x_0 有极限

(2) 如果 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$ $x_n \rightarrow x_0$ 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

证 (2) $\Rightarrow$ (1). $\because x_0$ 是 A 聚点. $\exists x_n \in A \setminus \{x_0\}$ $x_n \rightarrow x_0$

由 (2) $\{f(x_n)\}$ 收敛 记 $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$. 下证 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

反证: a 不是 f 在 x_0 处极限

则存在 $\varepsilon_0 > 0$ st. $\forall \delta > 0$ 存在 $x \in A$ $0 < |x - x_0| < \delta$

满足 $|f(x) - a| \geq \varepsilon_0$ (A)

取 $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ 则存在 $y_n \in A$ $\begin{cases} 0 < |y_n - x_0| < \frac{1}{n} \\ |f(y_n) - a| \geq \varepsilon_0 \end{cases}$

则 $y_n \in A \setminus \{x_0\}$ 又因为 $x_0 - \frac{1}{n} < y_n < x_0 + \frac{1}{n}$

$\therefore y_n \rightarrow x_0$ 由 (2) $f(y_n)$ 收敛

设 $f(y_n) \rightarrow b$ 由 (A) $b \neq a$

令 $z_{n-1} = x_n$ $z_n = y_n$ $\therefore z_n \rightarrow x_0$, $z_n \in A \setminus \{x_0\}$

$(f(z_{2n-1})) \rightarrow a$

$(f(z_{2n})) \rightarrow b$

由 (2) 矛盾

推论8: 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 聚点, $a \in \mathbb{R}$.

若: $\forall x_n \in A \setminus \{x_0\}, x_n \rightarrow x_0$

都有 $f(x_n) \rightarrow a$ 则 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

定义4: 设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$, $B \neq \emptyset$. $\exists M > 0$ st.

$|f(x)| \leq M, \forall x \in B$ 称 f 在 B 上有界

命题9: 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 聚点.

如果 f 在 x_0 有极限, 则存在 $\delta > 0$ st.

f 在 $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界

证明: 由定义, $\exists \delta > 0$ st. $|f(x) - a| \leq 1, \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

其中 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$|f(x)| \leq |a| + 1, \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

令 $M = \begin{cases} |a| + 1 & x_0 \notin A \\ |a| + 1 + |f(x_0)| & x_0 \in A \end{cases}$

则 $|f(x)| \leq M, \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

□

命题 10

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 聚点, $a, b \in \mathbb{R}$. $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(1) 如 $a < b$, 则 $\exists \delta > 0$ st.

$$f(x) < b, \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

(2) 如 $a > b$, 则 $\exists \delta > 0$ st.

$$f(x) > b, \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

(3) 如 $a \neq 0$, $0 < r < |a|$, $\exists \delta > 0$ st.

$$|f(x)| > r, \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

命题 11

设 $f, g, h: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbb{R}$.

$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$. 则 $\exists \delta_0 > 0$ st.

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_0$$

证: 设 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$

$\exists N \in \mathbb{N}^+$ st.

$$|x_n - x_0| < \delta_0, \quad \forall n \geq N$$

$$\text{则 } f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n), \quad \forall n \geq N$$

所以 $f(x_n) \rightarrow a$, $h(x_n) \rightarrow a$

$$g(x_n) \rightarrow a$$

$$\therefore g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

□

命题2 $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 是 A 聚点, $a, b \in \mathbb{R}$.

$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 如果存在 $\delta_0 > 0$ st.

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_0$$

则 $a \leq b$

命题14. 四则运算

定理15 Cauchy 收敛原理

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 聚点. 则 f 在 x_0 有极限当且仅当:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ st.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

定义: 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in (a, b)$

如果存在 $0 < \delta < \min\{b - x_0, x_0 - a\}$ 使得 $f(x) \geq f(x_0)$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

称 x_0 是 f 极小值点, $f(x_0)$ 是 f 极小值

若 $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

称 x_0 为严格极小值点 $f(x_0)$ 是严格极小值

Ex. 设 $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增

证 f 在 $x=a$ 有极限

证: 法一: 令 $x_n = a + \frac{1}{n} \quad n \geq 1$

$$\{f(x_n)\} \downarrow, \quad f(x_n) \rightarrow c$$

$$\text{证 } c = \lim_{x \rightarrow a} f$$

$$\text{法二: } c = \inf_{(a, +\infty)} f$$

$$\text{证 } c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Ex. 证明 Cauchy 收敛原理 定理 15

$$" \Rightarrow " \quad \text{设 } a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\text{设 } \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ st.}$$

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$\text{则 } |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - a| + |f(y) - a| < \varepsilon$$

$$\forall x, y \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$" \Leftarrow " \quad \text{设 } x_n \in A \setminus \{x_0\} \quad x_n \rightarrow x_0$$

只需证 $\{f(x_n)\}$ 收敛

$$\text{设 } \varepsilon > 0. \quad \text{因已知 } \exists \delta > 0 \text{ st.}$$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$\because x_n \rightarrow x_0 \quad \therefore \exists N \in \mathbb{N}^+ \text{ st.}$$

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq N$$

$$\therefore |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

由 Cauchy 收敛原理 知 $\{f(x_n)\}$ 收敛

故 f 在 x_0 有极限

定义1: 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 设 $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset \quad \forall M \in \mathbb{R}$

设 $a \in \mathbb{R}$. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $M \in \mathbb{R}$ st.

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (M, +\infty)$$

称 a 为 f 在 $+\infty$ 远点的极限

Eg. $f(x) = \cos x$.

则 f 在正无穷远点没极限

证: 反证. 设 $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\varepsilon = 0.1$ 则存在 $M \in \mathbb{R}$ st.

$$|\cos x - a| < \varepsilon \quad \forall x > M$$

$$\because \lim_{x \rightarrow +\infty} 2n\pi = +\infty$$

$$\therefore \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ st. } 2n\pi > M$$

$$\text{则 } |\cos 2n\pi - a| = |1 - a| < \varepsilon$$

$$\text{同理 } |\cos (2m+1)\pi - a| = |-1 - a| < \varepsilon$$

矛盾 $\square$

定理 2: 无穷点极限有唯一性

证明: 设 $\varepsilon > 0 \quad \exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ s.t.

$$|f(x) - a| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (M_1, +\infty)$$

$$|f(x) - b| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (M_2, +\infty)$$

令 $M = \max\{M_1, M_2\}$ 则 $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$

$$|f(x) - a| \leq \varepsilon \quad |f(x) - b| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (M, +\infty)$$

$$\therefore |a - b| \leq 2\varepsilon$$

$$\therefore a = b$$

定义 6: 类似可定义负无穷远点极限

Eg. 设 $f = e^x \quad x \in \mathbb{R}$. 则 0 是 f 在 $-\infty$ 远点极限

证: 设 $\varepsilon > 0$ 令 $m = \ln \varepsilon$

$$\text{则 } |f(x) - 0| = e^x < \varepsilon \quad \forall x < m$$

$\therefore 0$ 是 f 在 $-\infty$ 远点极限

命题 18 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ A 满足 $\forall m \in \mathbb{R}, A \cap (-\infty, m) \neq \emptyset$. 定义

$g: -A \rightarrow \mathbb{R}$. 其中

$$-A = \{-x: x \in A\}$$

$$g(x) = f(-x), x \in -A$$

设 $a \in \mathbb{R}$. 则

$$(i) \quad \forall M \in \mathbb{R}, (-A) \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a$$

证 (i) 设 $x \in A \cap (-\infty, m)$

$$\text{则 } -x \in (-A) \cap (m, +\infty)$$

所以 $(-A) \cap (m, +\infty) \neq \emptyset$

(ii) " $\Rightarrow$ " 设 $\varepsilon > 0$ 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$

$$\therefore \exists m \in \mathbb{R} \text{ st.}$$

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x < m, x \in A$$

$$\text{令 } M = -m, \text{ 设 } y \in -A, y > M$$

$$\text{则 } -y \in A, -y < m$$

$$\therefore |f(-y) - a| < \varepsilon$$

$$\text{即 } |g(y) - a| < \varepsilon \quad \square$$

$\Leftarrow$ 类似的

Eg. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad a > 0$

证: $\because \ln x \leq \frac{2}{a} x^{\frac{a}{2}}$

$\therefore 0 \leq \frac{\ln x}{x^a} \leq \frac{2}{a} \frac{1}{x^{\frac{a}{2}}} \quad x \geq 1$

$\therefore$ 由夹逼定理 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad \square$

Eg. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0 \quad m > 0$

证: $e^x \geq x \quad x \geq 0$

$e^x \geq \frac{x^2}{2!}$

:

$e^x \geq \frac{x^n}{n!}$

$\therefore \square$

定义 7 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 聚点. $\forall M > 0, \exists \delta > 0$

st. $f(x) > M \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta$

称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty$. 记 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

同理可定义 $\rightarrow -\infty$

定义 9: 也可在无穷远点趋于无穷大

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ A 满足 $\forall m \in \mathbb{R}, A \cap (m, +\infty) \neq \emptyset$

如果 $\forall m_1 > 0 \exists m_2 \in \mathbb{R}$ st.

$f(x) > m_1 \quad \forall x \in A, x > m_2$

称 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

