
第一章 集合和映射

在数学中，严格性不是一切，但是没有它便没有一切。不严格的证明微不足道。

—————H. Poincaré

常用记号

$\forall$ ：对于任意的

$\exists$ ：存在

$\exists!$ ：存在唯一的

$\ni$ ：使得

$\emptyset$ ：空集

$\mathbb{N}^*$ ：正整数集

$\mathbb{R}$ ：实数集

$\{x; \text{条件 1, 条件 2, } \dots\}$ ：满足条件 1, 条件 2, $\dots$ 的所有 x 构成的集合

第 1 讲 集合

1. 集合的定义

集合是数学中最基本的概念，因此我们不能给集合一个严格的定义，因为如果我们想给集合一个严格的定义，那么必然会用到其它的概念。

下面是集合论的创始人 G. Cantor 给出的集合的一个描述性的定义：集合是具有一定性质的两两不同的事物所组成的一个整体，这些事物被称为属于该集合的元素。

设 A 是一个集合，如果 x 是集合 A 的元素，记为 $x \in A$ ，否则记为 $x \notin A$ 。

2. 集合之间的关系

定义 1. 设 A, B 是两个集合。如果对于任意 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 记 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 称 A 是 B 的子集, 或者 A 包含于 B , 或者 B 包含 A 。

定义 2. 设 A, B 是两个集合。如果 $A \subset B$, $B \subset A$, 记 $A = B$, 称 A, B 相等。

命题 1. 设 A, B 是两个集合。下列叙述是等价的。

(i) $A = B$;

(ii) $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

证明:

(i) $\Rightarrow$ (ii) 设 (i) 成立, 下面证明 (ii)。设 $x \in A$, 因为 $A = B$, 所以 $A \subset B$, 因此 $x \in B$ 。

设 $x \in B$, 因为 $A = B$, 所以 $B \subset A$, 因此 $x \in A$ 。这就证明了 (ii)。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 设 (ii) 成立, 下面证明 (i)。首先证明 $A \subset B$ 。设 $x \in A$, 则由 (ii) $x \in B$, 因此 $A \subset B$ 。下面证明 $B \subset A$ 。设 $x \in B$, 则由 (ii) $x \in A$, 因此 $B \subset A$ 。这就证明了 $A = B$ 。□

Remark. 命题 1 给出了证明集合 A, B 相等的两种方法。一种是按照定义分别证明 $A \subset B$, $B \subset A$, 另一种是直接证明 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ 。我们还可以利用集合运算的各种运算律证明两个集合相等。

3. 集合的代数运算

集合之间有三种基本的代数运算：交，并，差。

定义 3. (集合的交和并) 设 A_λ 为集合，其中 $\lambda \in \Lambda$ ， $\Lambda \neq \emptyset$ 。定义

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x; x \in A_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\},$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x; \exists \lambda \in \Lambda, \exists x \in A_\lambda\},$$

分别称 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ ， $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 为集合 A_λ ， $\lambda \in \Lambda$ 的交集和并集。

Remarks.

(i) 在定义 3 中， λ 称为下标， Λ 称为指标集， A_λ ， $\lambda \in \Lambda$ 表示任意个集合。因此，定义 3 定义了任意个集合的交集和并集。

(ii) 由定义，

$$x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda, \exists x \notin A_\lambda,$$

$$x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, x \notin A_\lambda.$$

定义 4. (集合的差) 设 A, B 是两个集合。定义

$$A - B = A \setminus B = \{x; x \in A, x \notin B\},$$

称 $A \setminus B$ 为 A, B 的差。

我们注意，一般来说， $A \setminus B \neq B \setminus A$ 。

例 1. 设

$$A_n = \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

则

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{1\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*.$$

例 2. 记

$$A_r = \mathbb{R} \setminus (-r, r), \quad r \in (0, +\infty),$$

则

$$\bigcap_{r>0} A_r = \bigcap_{r \in (0, +\infty)} A_r = \emptyset,$$

$$\bigcup_{r>0} A_r = \bigcup_{r \in (0, +\infty)} A_r = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4. De Morgan 定律

设 X 为全集, $A \subset X$, 记

$$A^C = X \setminus A,$$

称 A^C 为 A 的补集或余集。显然,

$$(A^C)^C = A.$$

命题 2. 设 X 为全集, $A_\lambda \subset X$, $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda \neq \emptyset$ 。则

$$(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C,$$

$$(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C = \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C.$$

证明: 设 $x \in X$ 。则

$$\begin{aligned} x \in (\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C &\Leftrightarrow x \notin \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda, \exists x \notin A_\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda, \exists x \in A_\lambda^C \\ &\Leftrightarrow x \in \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C, \end{aligned}$$

因此

$$(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C,$$

这就证明了第一个等式。由第一个等式

$$(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C = (\cup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda^C)^C)^C = \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C.$$

这就证明了第二个等式。□

习题

1. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。给出如下两个命题:

命题 1. 存在 $M > 0$, 使得

$$|x| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

命题 2. 存在 $M > 0$, 使得

$$|x| < M, \quad \forall x \in A.$$

(1) 给出命题 1 的否定。

(2) 命题 1 和命题 2 是否等价? 直接回答是或否。

2. 设

$$A_n = \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

求 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, 直接写出答案。

3. 设 $\mathbb{R}^2$ 为全集。设 $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, 记

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x - x_0| < r\},$$

称 $B_r(x_0)$ 为以 x_0 为心, r 为半径的开圆盘。

(i) 求

$$\bigcap_{r>0} B_r(x_0), \bigcup_{r>0} B_r(x_0), \bigcap_{r>0} B_r^C(x_0), \bigcup_{r>0} B_r^C(x_0),$$

直接写出答案。

(ii) 证明: 对于任意 $x \in B_r(x_0)$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$ 。

4. 设 X 为全集, $A, B, C \subset X$ 。证明: $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$ 。

5. 设 A_λ , B 为集合, 其中 $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda \neq \emptyset$ 。证明:

$$(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap B).$$

6. 设 A, B 是两个集合, 记

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

称 $A \Delta B$ 为 A, B 的对称差。显然, $A \Delta B = B \Delta A$ 。证明:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

第2讲 映射

1. 映射的定义

设 A, B 是两个非空的集合, f 是 A 到 B 的对应法则。如果 f 满足: 对于任意 $x \in A$, 存在唯一的 $f(x) \in B$ 与 x 对应, 称 f 为 A 到 B 的映射, 记为 $f: A \rightarrow B$ 。

Remark. 我们仅给了映射一个描述性的定义, 映射的严格定义需要用到集合论中更多的知识。

下面给出几个常用的术语。

设 $f: A \rightarrow B$ 。设 $x \in A$ 。我们称 $f(x)$ 为 x 的像, x 为 $f(x)$ 的原像。我们注意, 如果 $y \in B$, y 可能没有原像, 也可能有多个原像。

设 $f: A \rightarrow B$ 。我们称 A 为 f 的定义域, 记为 $\text{Dom} f$; 称 B 为 f 的陪域。记

$$\text{Rg} f = \{f(x); x \in A\},$$

称 $\text{Rg} f$ 为 f 的值域。

我们又称映射为变换, 算子, ...。一般来说, 如果 $f: A \rightarrow B$ 的陪域 B 为数集, 我们称 f 为函数。

下面给出两个映射相等的定义。

定义 1. 设 $f, g: A \rightarrow B$ 。如果

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in A,$$

我们记 $f = g$ ，称 f, g 相等。

2. 复合映射

定义 2. 设 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ 。定义 $g \circ f: A \rightarrow C$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A,$$

称 $g \circ f$ 为 f, g 的复合。

如果 f, g 为函数, 我们又称 $g \circ f$ 为复合函数。

我们注意, 一般来说, $g \circ f \neq f \circ g$ 。例如, 设 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x,$$

$$g(x) = x + 1,$$

则

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2(x + 1),$$

因此 $g \circ f \neq f \circ g$ 。

Remark. 变量代数是数学中一种常用的计算技巧。所谓的变量代换, 实际上就是将一个复杂的函数写成两个简单的函数的复合。例如

$$xe^x + \ln x + x \stackrel{t=\ln x+x}{=} e^t + t.$$

命题 1. 设 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ 。则

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

证明: 设 $x \in A$, 则

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))),$$

因此

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x), \quad \forall x \in A,$$

所以

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \quad \square$$

Remark. 命题 1 告诉我们, 对于映射的复合运算, 结合律成立。因此, 我们记

$$h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

3. 单射, 满射和双射

定义 3. 设 $f: A \rightarrow B$ 。如果

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in A,$$

称 f 为单射。

Remark. 由定义, f 为单射当且仅当

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A,$$

也就是说, A 中不同的元对应不同的像。

定义 4. 设 $f: A \rightarrow B$ 。如果 $\text{Rg}f = B$, 称 f 为满射。

定义 5. 设 $f: A \rightarrow B$ 。如果 f 既是单射也是满射, 称 f 为双射。

Remark. 我们可以从解方程的角度来理解单射, 满射和双射。设 $y \in B$ 。考虑关于 x 的方程

$$f(x) = y, \quad x \in A. \quad (1)$$

f 为单射当且仅当如果方程 (1) 有解, 则解必唯一; f 为满射当且仅当对于任意 $y \in B$, 方

程 (1) 必有解; f 为双射当且仅当对于任意 $y \in B$, 方程 (1) 有唯一解。

4. 逆映射

定义 6. 设 $f: A \rightarrow B$ 为双射。定义 $f^{-1}: B \rightarrow A$,

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A,$$

称 f^{-1} 为 f 的逆映射。

由定义, 如果 f 为双射, 我们可以定义它的逆映射, 因此我们也称 f 为可逆映射或 f 可逆。

下面举例说明如何求一个可逆映射的逆映射。设 $f: A \rightarrow B$ 为双射。设 $y \in B$ ，则 $f^{-1}(y)$ 就是 y 的原像。因此求 $f^{-1}(y)$ 就是要找出 y 的原像。

例 1. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ， $f(x) = 2x$ 。证明 f 为双射，并求 f 的逆映射。

解：设 $y \in \mathbb{R}$ 。方程

$$f(x) = y$$

存在唯一解 $x = \frac{1}{2}y$ ，因此 f 为双射。 y 的原像是 $\frac{1}{2}y$ ，因此 $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$ ，所以

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

例 2. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ， $f(x) = e^{2x+1}$ 。证明 f 为双射，并求 f 的逆映射。

解：设 $y > 0$ 。解方程

$$e^{2x+1} = y$$

得

$$x = \frac{1}{2}(\ln y - 1),$$

因此 f 为双射，并且

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\ln x - 1), \quad x \in (0, +\infty). \quad \square$$

5. 可逆映射的性质

下面考查可逆映射的性质。首先由定义 6 立马可得如下结论。

命题 2. 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆。设 $x \in A$, $y \in B$ 。如果 $f(x) = y$, 则 $x = f^{-1}(y)$ 。

证明：由定义

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x. \quad \square$$

命题 3. 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆。则

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B.$$

证明：设 $y \in B$ 。因为 f 可逆，所以 f 为满射。因此，存在 $x \in A$ ，使得 $y = f(x)$ ，则由

命题 2， $x = f^{-1}(y)$ ，因此

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)). \quad \square$$

命题 4. 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆。则 f^{-1} 可逆，并且 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

证明：下面证明 f^{-1} 可逆，即 f^{-1} 为双射。首先证明 f^{-1} 为单射。设 $y_1, y_2 \in B$,

$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ，则由命题 3

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2,$$

因此 f^{-1} 为单射。下面证明 f^{-1} 为满射。设 $x \in A$ ，则由定义

$$x = f^{-1}(f(x)),$$

因此 f^{-1} 为满射。这就证明了 f^{-1} 可逆。

下面证明 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。设 $x \in A$ 。我们需要证明 $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ 。记 $y = f(x)$ 。则由

命题 2， $x = f^{-1}(y)$ ；再次对 f^{-1} 应用命题 2 得

$$(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x),$$

这就证明了 $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ ，因此 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。□

下面引入一个记号。设 A 为非空的集合，定义映射 $I_A: A \rightarrow A$,

$$I_A(x) = x, \quad \forall x \in A,$$

称 I_A 为 A 上的恒等映射。

命题 5. 设 $f: A \rightarrow B$ 。则

$$f \circ I_A = I_B \circ f = f.$$

证明：设 $x \in A$ ，则

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x),$$

$$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x),$$

因此

$$f \circ I_A = I_B \circ f = f. \quad \square$$

命题 6. 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆。则

$$f^{-1} \circ f = I_A,$$

$$f \circ f^{-1} = I_B.$$

证明：由定义

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = I_A(x), \quad \forall x \in A,$$

因此

$$f^{-1} \circ f = I_A;$$

由命题 3

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = I_B(y), \quad \forall y \in B,$$

因此

$$f \circ f^{-1} = I_B. \quad \square$$

命题 7. 设 $f: A \rightarrow B$ 。则 f 可逆当且仅当存在 $g: B \rightarrow A$ ，使得

$$g \circ f = I_A, \quad (2)$$

$$f \circ g = I_B, \quad (3)$$

并且当 $g: B \rightarrow A$ 满足 (2), (3) 时, $f^{-1} = g$ 。

证明: “ $\Rightarrow$ ” 令 $g = f^{-1}$ 。则由命题 6 可得 (2), (3)。

“ $\Leftarrow$ ” 首先证明 f 为单射。设 $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$, 则由 (2) 式

$$x_1 = I_A(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = I_A(x_2) = x_2,$$

因此 f 为单射。下面证明 f 为满射。设 $y \in B$, 则由 (3) 式

$$y = I_B(y) = f(g(y)),$$

因此 f 为满射。这就证明了 f 为双射, 即 f 可逆。

设 $g: B \rightarrow A$ 满足 (2), (3), 下面证明 $f^{-1} = g$ 。设 $y \in B$, 则由 (3) 式, $f(g(y)) = y$; 又

因为 f 可逆, 所以由命题 2, $f^{-1}(y) = g(y)$, 因此 $f^{-1} = g$ 。□

Remark. 命题 7 告诉了我们一种求逆映射的方法: 我们只要能找到一个映射 g , 使得 g 满足

(2), (3), 那么 f 就可逆并且 f 的逆映射就是 g 。

命题 8. 设 A 为非空的集合, 则 I_A 可逆, 并且 $I_A^{-1} = I_A$ 。

证明: 设 $x \in A$ 。则

$$(I_A \circ I_A)(x) = I_A(I_A(x)) = I_A(x) = x,$$

因此

$$I_A \circ I_A = I_A,$$

所以由命题 7, I_A 可逆, 并且 $I_A^{-1} = I_A$ 。□

命题 9. 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆, $g: B \rightarrow C$ 可逆。则 $g \circ f$ 可逆, 并且

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

证明: 我们有

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\&= f^{-1} \circ I_B \circ f \\&= f^{-1} \circ f \\&= I_A, \\(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\&= g \circ I_B \circ g^{-1} \\&= g \circ g^{-1} \\&= I_B,\end{aligned}$$

所以由命题 7, $g \circ f$ 可逆, 并且

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad \square$$

6. 双曲函数和双曲函数的反函数

如果 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ 可逆, 我们称 f 有反函数, 称 f 的逆映射为 f 的反函数。例如,

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$, 则 f 可逆, f 的反函数为 $f^{-1}(x) = \ln x$ 。

命题 10. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

则 f 可逆并且

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明: 设 $y \in \mathbb{R}$ 。下面求解方程

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y. \quad (4)$$

方程 (4) 等价于

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0. \quad (5)$$

令 $t = e^x$, 则 $t > 0$, 则方程 (5) 等价于

$$t^2 - 2yt - 1 = 0, \quad t > 0. \quad (6)$$

由二元一次方程的求根公式, (6) 有唯一解

$$t = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

因此方程 (4) 有唯一解

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

所以 f 可逆, 并且 f 的反函数为

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

命题 11. 设 $f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \geq 0.$$

则 f 可逆, 并且

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1.$$

证明: 设 $y \geq 1$ 。下面求解

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y, \quad x \geq 0. \quad (7)$$

(7) 等价于

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0, \quad x \geq 0. \quad (8)$$

令 $t = e^x$, 则 $t \geq 1$, (8) 等价于

$$t^2 - 2yt + 1 = 0, \quad t \geq 1. \quad (9)$$

如果 $y = 1$, 解 (9) 得 $t = 1$; 如果 $y > 1$, 解 (9) 得

$$t = y + \sqrt{y^2 - 1},$$

因此 (9) 有唯一解

$$t = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

所以方程 (7) 有唯一解

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

因此 f 可逆, 并且 f 的反函数为

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1. \quad \square$$

记

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

分别称 $\sinh x$, $\cosh x$ 为双曲正弦函数和双曲余弦函数。

双曲正弦函数为奇函数，双曲余弦函数为偶函数。由命题 7，命题 8，双曲正弦函数有反函数；当 $x \geq 0$ 时，双曲余弦函数有反函数。我们记

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1,$$

分别称 $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{arcosh} x$ 为反双曲正弦函数和反双曲余弦函数。

7. 反三角函数

设 $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, 则 f 可逆, 记

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1],$$

称 $y = \arcsin x$ 为反正弦函数。

设 $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, 则 f 可逆, 记

$$f^{-1}(x) = \arccos x, \quad x \in [-1, 1],$$

称 $y = \arccos x$ 为反余弦函数。

设 $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$, 则 f 可逆, 记

$$f^{-1}(x) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R},$$

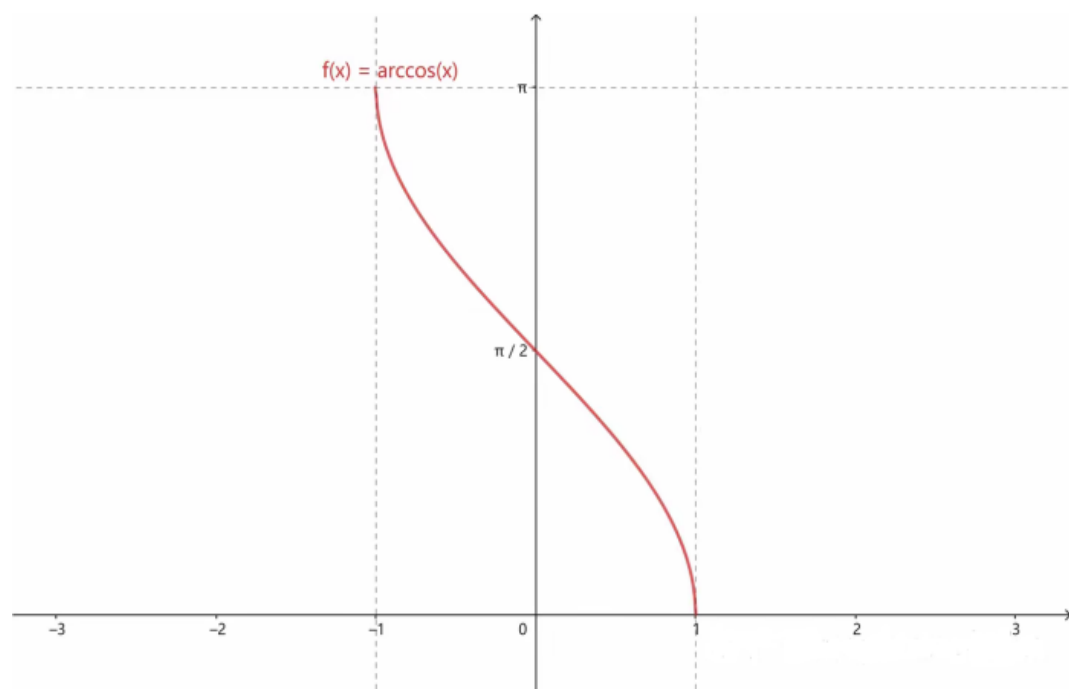
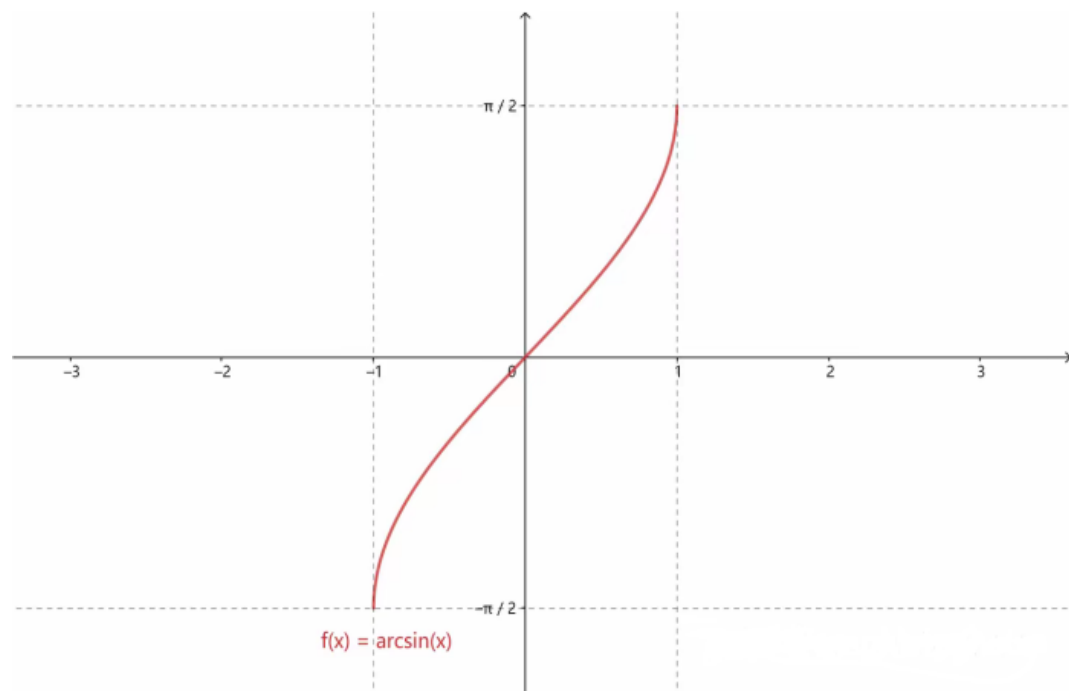
称 $y = \arctan x$ 为反正切函数。

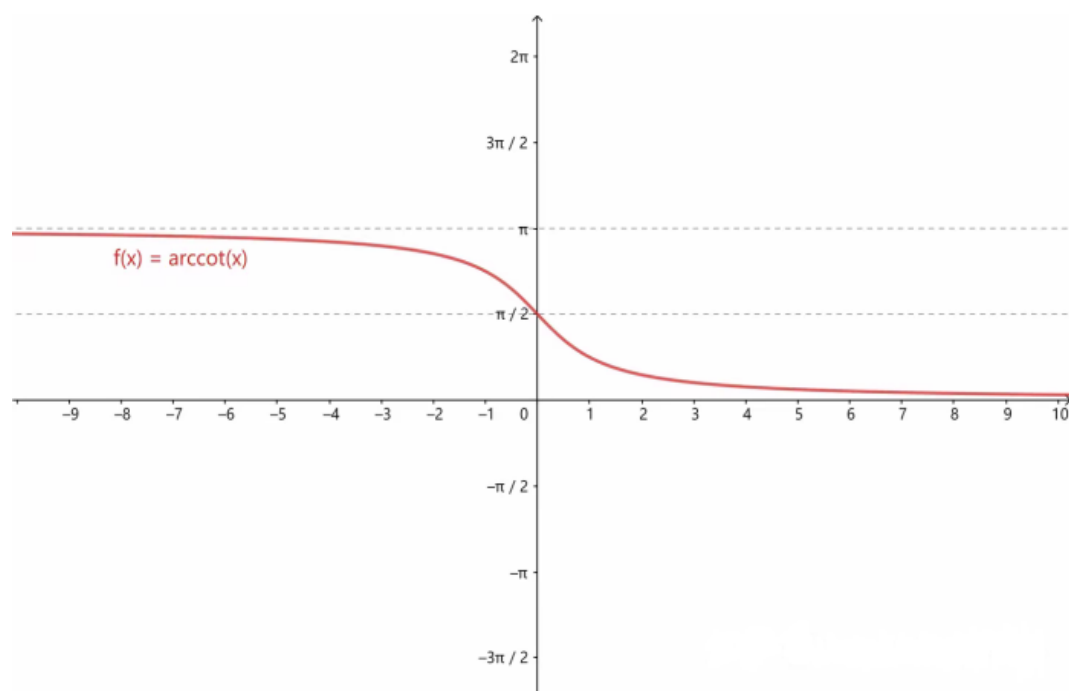
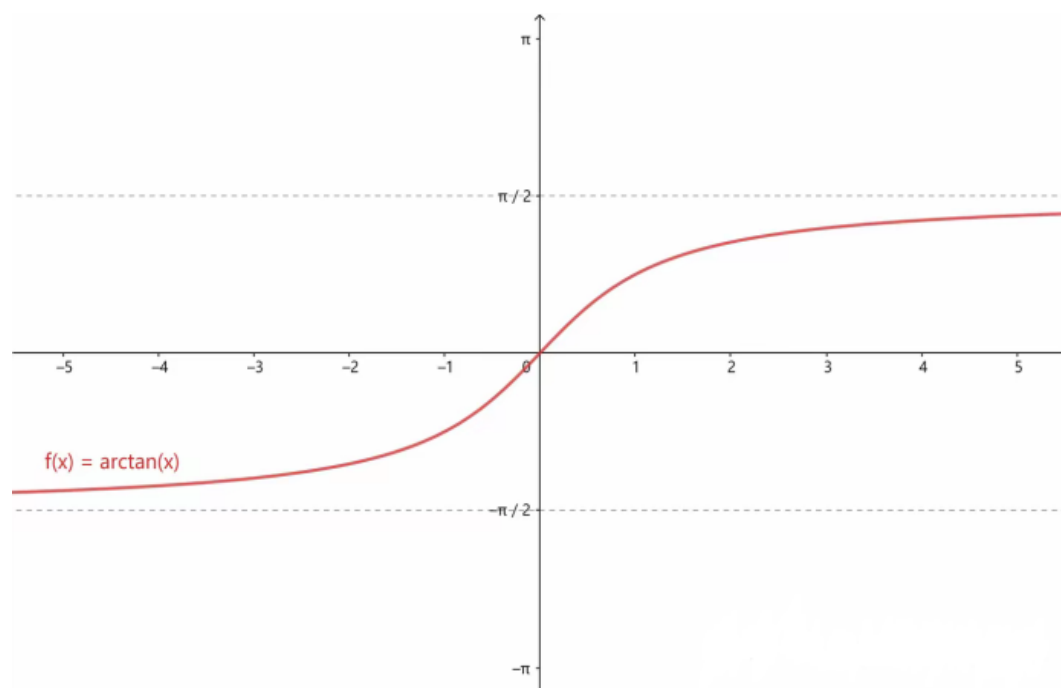
设 $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cot x$, 则 f 可逆, 记

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

称 $y = \operatorname{arccot} x$ 为反余切函数。

下面给出反三角函数的图像。函数 f 和 f 的反函数的图像关于直线 $y = x$ 对称。





下面给出关于反三角函数的两个基本的恒等式。

命题 12. 我们有

$$(i) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1];$$

$$(ii) \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

(i) 设 $\theta = \arcsin x$, 则 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 且 $\sin \theta = x$ 。则 $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi]$, 且

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta = x,$$

因此

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos x,$$

由此可得

$$\arcsin x + \arccos x = \theta + (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) 设 $\theta = \arctan x$, 则 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 且 $\tan \theta = x$ 。则 $\frac{\pi}{2} - \theta \in (0, \pi)$, 且

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta = x,$$

因此

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \operatorname{arccot} x,$$

由此可得

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \theta + (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

习题

1. 设 X 为全集, $A \subset X$ 。定义 $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in A^c, \end{cases}$$

称 χ_A 为 A 的特征函数。设 $A, B \subset X$ 。证明:

$$\chi_A = \chi_B \Leftrightarrow A = B.$$

2. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 可逆。证明: 如果 f 为奇函数, 则 f^{-1} 为奇函数。

3. 证明: $y = \operatorname{arsinh} x$ 为奇函数。

4. 设 $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \ln(2x+1)$ 。证明 f 可逆, 并求 f 的逆映射。

5. 定义 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x+1, y-1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

证明 f 可逆, 并求 f 的逆映射。

6. 设 $\theta \in \mathbb{R}$ 。定义 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

证明 f 可逆, 并求 f 的逆映射。

7. 设 $f: A \rightarrow B$ 可逆, $g: B \rightarrow C$ 可逆, $h: C \rightarrow D$ 可逆, 证明 $h \circ g \circ f$ 可逆, 并给出 $h \circ g \circ f$ 的逆映射。

8. 求 $f(x) = \operatorname{arsinh}(2x+1)$ 的反函数。

9. 定义

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

分别称 $\sec x$ 和 $\csc x$ 为正割函数和余割函数。证明:

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1,$$

$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1.$$

第 3 讲 Schröder-Bernstein 定理

1. 像集和原像集

设 $f: X \rightarrow Y$ 。设 $A \subset X$, $B \subset Y$ 。记

$$f(A) = \{f(x); x \in A\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\},$$

称 $f(A)$ 为 A 的像集, $f^{-1}(B)$ 为 B 的原像集。这里我们注意, f^{-1} 并不表示 f 的逆映射。

例 1. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ 。则

$$f([0, 2]) = [0, 4],$$

$$f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2].$$

命题 1. 设 $f: X \rightarrow Y$ 。

(i) 如果 $A_1 \subset A_2 \subset X$ ，则 $f(A_1) \subset f(A_2)$ ；

(ii) 如果 $B_1 \subset B_2 \subset Y$ ，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ 。

2. 单调增映射的不动点

设 X 一个集合。记

$$2^X = \{A; A \subset X\},$$

称 2^X 为 X 的幂集。

定义 1. 设 $F: 2^X \rightarrow 2^X$ 。如果

$$F(S_1) \subset F(S_2), \quad \forall S_1 \subset S_2 \subset X,$$

称 F 单调增。

定义 2. 设 $F:2^X \rightarrow 2^X$ 。如果存在 $A \subset X$ ，使得 $F(A) = A$ ，称 F 有不动点，称 A 为 F 的不动点。

例 2. 设 $f: X \rightarrow X$ 。定义 $F: 2^X \rightarrow 2^X$,

$$F(S) = f(S), \quad \forall S \subset X,。$$

则由命题 1, F 单调增。由于

$$F(\emptyset) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

因此 $\emptyset$ 是 F 的不动点。

命题 2. 设 $F: 2^X \rightarrow 2^X$ 。如果 F 单调增，则 F 有不动点。

证明：记

$$\Omega = \{S \subset X; S \subset F(S)\}.$$

显然， $\emptyset \in \Omega$ ，因此 $\Omega \neq \emptyset$ 。令

$$A = \bigcup_{S \in \Omega} S. \quad (1)$$

下面证明 $F(A) = A$ 。

设 $S \in \Omega$ ，则 $S \subset F(S)$ 。因为 F 单调增， $S \subset A$ ，所以 $F(S) \subset F(A)$ ，因此 $S \subset F(A)$ ，这样，我们得到

$$S \subset F(A), \quad \forall S \in \Omega,$$

因此由(1)式

$$A \subset F(A). \quad (2)$$

因为 F 单调增，由(2)式， $F(A) \subset F(F(A))$ ，这意味着 $F(A) \in \Omega$ ，因此，由(1)式，

$$F(A) \subset A. \quad (3)$$

由(2), (3)式的 $F(A) = A$ ，因此 A 是 F 的不动点。这就证明了 F 有不动点。□

3. Schröder-Bernstein 定理。

定理 1. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ 为单射。则存在双射 $h: X \rightarrow Y$ 。

证明：定义 $F: 2^X \rightarrow 2^X$

$$F(S) = X - g(Y - f(S)), \quad S \subset X.$$

容易验证 F 单调增。由命题 2，存在 $A \subset X$ ，使得 $F(A) = A$ ，即

$$X - g(Y - f(A)) = A,$$

因此

$$X - A = g(Y - f(A)). \quad (4)$$

如果 $A = \emptyset$ ，则由(4)式， $g(Y) = X$ ，因此 g 为双射。令 $h = g^{-1}$ ，则 $h: X \rightarrow Y$ 为双射；

如果 $f(A) = Y$ ，则 $f(X) = Y$ ，因此 f 为双射。令 $h = f$ ，则 $h: X \rightarrow Y$ 为双射。

下面设 $A \neq \emptyset$, $f(A) \neq Y$ 。定义

$$f : A \rightarrow f(A),$$

$$f(x) = f(x), \quad x \in A,$$

则 f 为双射。定义

$$g : Y - f(A) \rightarrow X - A$$

$$g(y) = g(y), \quad y \in Y - f(A),$$

由(4)式, g 为双射, 因此 $g^{-1} : X - A \rightarrow Y - f(A)$ 为双射。最后我们定义 $h : X \rightarrow Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g^{-1}(x), & x \in X - A. \end{cases}$$

因为 $f : A \rightarrow f(A)$ 为双射, $g^{-1} : X - A \rightarrow Y - f(A)$ 为双射, 所以 $h : X \rightarrow Y$ 为双射。这就证明了定理 1. $\square$

第4讲 集合的势

在这一讲,我们首先引入集合的势的概念,然后利用集合的势的概念,给出有限集,无限集,可数集和不可数集严格定义。粗略的说,集合的势这个概念是用来比较两个集合“所含元素个数的多少”。在这里我们要注意,我们只能比较两个集合的势的大小,不能说一个集合的势等于多少。

1. 集合的势

定义 1. 设 A, B 是非空的集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$, 我们称 A 的势小于等于 B 的势 (或 B 的势大于等于 A) 的势, 记为 $\overline{A} \leq \overline{B}$ (或 $\overline{B} \geq \overline{A}$)。

例 1. 如果 A 是 B 的非空子集, 则 $\overline{A} \leq \overline{B}$ 。

证明: 定义 $f: A \rightarrow B$

$$f(x) = x, \quad x \in A.$$

则 f 是单射, 因此 $\overline{A} \leq \overline{B}$ 。□

命题 1. 设 A, B, C 是非空的集合。则下列结论成立:

(i) $\overline{A} \leq \overline{A}$;

(ii) 如果 $\overline{A} \leq \overline{B}$, $\overline{B} \leq \overline{C}$, 则 $\overline{A} \leq \overline{C}$ 。

证明:

(i) 因为 $I_A: A \rightarrow A$ 为单射, 所以 $\overline{A} \leq \overline{A}$ 。

(ii) 因为 $\overline{A} \leq \overline{B}$, $\overline{B} \leq \overline{C}$, 所以存在单射 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, 则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 为单射, 因此 $\overline{A} \leq \overline{C}$ 。□

定义 2. 设 A, B 是非空的集合。如果 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ ，我们称 A, B 等势，记 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ；否则称 A, B 不等势，记为 $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$ 。

命题 2. 设 A, B 是非空的集合。则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 当且仅当存在双射 $h: A \rightarrow B$ 。

证明：

“ $\Leftarrow$ ” 因为 $h: A \rightarrow B$ 为双射，所以 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ ；又因为 $h^{-1}: A \rightarrow B$ 为双射，所以 $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ 。因此 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 。

“ $\Rightarrow$ ” 因为 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ ，所以存在单射 $f: A \rightarrow B$ ；又因为 $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ ，所以存在单射 $g: B \rightarrow A$ 。

由 Schröder-Bernstein 定理，存在双射 $h: A \rightarrow B$ 。□

命题 3. 设 A, B, C 是非空的集合。则下列结论成立。

(i) $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$ ；

(ii) 如果 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ，则 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$ ；

(iii) 如果 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ， $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$ ，则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ 。

证明：

(i) 因为 $I_A: A \rightarrow A$ 为双射，所以 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$ 。

(ii) 因为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ，所以存在双射 $f: A \rightarrow B$ 。因为 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为双射，所以 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$ 。

(iii) 因为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ， $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$ ，所以存在双射 $f: A \rightarrow B$ ， $g: B \rightarrow C$ ，则 $g \circ f: A \rightarrow C$ 为双射，因此 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ 。□

例 2. $\overline{\overline{\mathbb{Z}^*}} = \overline{\overline{\{2, 3, \dots\}}}$ 。

证明：定义 $f: \mathbb{Z}^* \rightarrow \{2, 3, \dots\}$

$$f(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{Z}^*,$$

则 f 是双射，因此 $\overline{\overline{\mathbb{Z}^*}} = \overline{\overline{\{2, 3, \dots\}}}$ 。□

例 3. $\overline{\overline{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} = \mathbb{R}$ 。

证明：记

$$f(x) = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

则 f 为双射，因此 $\overline{\overline{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} = \mathbb{R}$ 。□

例 4. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 则 $\overline{\overline{(a, b)}} = \mathbb{R}$ 。

证明：令 $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (a, b)$,

$$f(x) = \frac{b-a}{\pi}(x + \frac{\pi}{2}) + a, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

则 f 为双射，因此， $\overline{\overline{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} = \overline{\overline{(a, b)}}$ 。又因为 $\overline{\overline{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}} = \mathbb{R}$ ，所以 $\overline{\overline{(a, b)}} = \mathbb{R}$ 。□

例 5. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 则 $\overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{[a, b]}}$ 。

证明：因为 $(a, b) \subset [a, b]$, 所以 $\overline{\overline{(a, b)}} \leq \overline{\overline{[a, b]}}$ 。因为 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, 所以 $\overline{\overline{[a, b]}} \leq \mathbb{R}$ 。又因为 $\mathbb{R} = \overline{\overline{(a, b)}}$, 所以 $\overline{\overline{[a, b]}} \leq \overline{\overline{(a, b)}}$, 因此 $\overline{\overline{(a, b)}} = \overline{\overline{[a, b]}}$ 。□

定义 3. 设 A, B 是非空的集合。如果 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ 并且 $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$, 称 A 的势严格小于 B 的势 (或 B 的势严格大于 A 的势), 记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ (或 $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$)。

Remark. 在这里我们要注意, 我们只定义了集合的势之间的大小关系, 并没有定义一个集合的势等于多少。

2. 有限集和无限集，可数集和不可数集

定义 4. 设 A 是一个非空的集合。如果存在 $n \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\{1, 2, \dots, n\}}},$$

称 A 为有限集，否则称 A 为无限集。

命题 4. $\mathbb{N}^*$ 为无限集，并且如果 A 为无限集，则 $\overline{\overline{\mathbb{N}^*}} \leq \overline{\overline{A}}$ 。

Remark. 命题 4 说明，在所有无限集中， $\mathbb{N}^*$ 的势最小。

命题 4 的证明：首先证明 * 为无限集。反证法。假设 * 为有限集，则存在双射

$f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow ^*$ ，其中 $n \in ^*$ 。令

$$N = \max\{f(1), \dots, f(n)\},$$

则 $N+1 \notin \text{Rg}f$ ，这与 f 为双射矛盾。因此假设不成立，所以 * 为无限集。

设 A 为无限集。下面证明，存在单射 $f: ^* \rightarrow A$ 。为此，我们首先用归纳法定义“点列”

$\{a_n\}$ ， $a_n \in A$ ， $n=1, 2, \dots$ ，使得

$$a_i \neq a_j, \quad \forall i \neq j.$$

由已知 $A \neq \emptyset$ ，任取 $a_1 \in A$ 。假设 $a_n \in A$ ， $n=1, 2, \dots, m$ ，并且

$$a_i \neq a_j, \quad \forall 1 \leq i, j \leq m, i \neq j.$$

因为 A 为无限集，所以 $A \neq \{a_i; i=1, 2, \dots, m\}$ ，因此

$$A \setminus \{a_i; i=1, 2, \dots, m\} \neq \emptyset.$$

任取 $a_{m+1} \in A \setminus \{a_i; i=1, 2, \dots, m\}$ ，则

$$a_i \neq a_j, \quad \forall 1 \leq i, j \leq m+1, i \neq j.$$

这样我们就得到了点列 $\{a_n\}$ ， $a_n \in A$ ， $n=1, 2, \dots$ ，并且

$$a_i \neq a_j, \quad \forall i \neq j.$$

定义 $f: ^* \rightarrow A$ ，

$$f(n) = a_n, \quad n \in ^*,$$

则 f 为单射。因此 $\overline{^*} \leq \overline{A}$ 。□

定义 5. 设 A 为无限集。如果 $\overline{A} = \overline{A}^*$, 称 A 为无限可数集, 否则称 A 为不可数集。

设 A 是一个非空的集合。如果 A 为有限集或无限可数集, 称 A 为可数集。(在有的书上, 可数集专门指无限可数集。)

下面是几个常用的结论:

(i) 实数集是不可数集, 有理数集是可数集, 无理数集是不可数集;

(ii) 可数个可数集的并是可数集, 严格的说, 如果 A_λ 是可数集, $\lambda \in \Lambda$, 并且 Λ 是可数集,

则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 也是可数集。

由于 (i), (ii) 的证明要用到更多的集合论的知识, 在这里我们不证明这些结论。

第 5 讲 导数初步

1. 导数和函数的增长率

设 I 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ 。所谓 f 在 x_0 点的导数, 就是 f 在 x_0 点的增长率。问题是如何计算 f 在 x_0 点的增长率。

我们称

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

为 f 在 x_0 和 x 之间的平均增长率。如果当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \rightarrow a \in \mathbb{R},$$

则 a 就是 f 在 x_0 点的增长率。也就是说, 我们可以通过计算 f 在 x_0 点附近的平均增长率的极限计算 f 在 x_0 点的增长率。

例 1. 设 $k, b \in \mathbb{R}$, $f(x) = kx + b$ 。设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则 $f'(x_0) = k$ 。

例 2. 设 $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$, 则 $f'(x_0) = 2x_0$ 。

2. 导数的几何意义

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ 。我们称直线

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

为 f 的图像在 x_0 点的切线, 简称 f 在 x_0 点的切线。因此, $f'(x_0)$ 就是 f 在 x_0 点的切线的斜率。

例 3. 二次函数 $y = x^2$ 在 $x = x_0$ 点的切线为

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Remarks.

(i) f 在 x_0 点的切线与 f 在 x_0 点有相同的增长率。

(ii) 抛物线的切线和抛物线只有一个公共点。然而, 对于一般的函数 f , f 在 x_0 点的切线与 f 不一定只有一个公共点。

(iii) 记 $y_0 = x_0^2$, 则抛物线 $y = x^2$ 在 (x_0, y_0) 点的切线方程可写成如下形式

$$\frac{y + y_0}{2} = x_0x.$$

对于一般的圆锥曲线, 有类似的结论。

3. 导函数

设 I 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ 。记 $f': I \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = f \text{ 在 } x \text{ 点的导数, } x \in I,$$

称 f' 为 f 的导函数, 简称 f 的导数。

例 4. 由例 1, 例 2

$$(kx + b)' = k,$$

$$(x^2)' = 2x.$$

4. 求导法则

下面给出求一般的函数的导数的求导法则。下面设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间。

(1) 求导的线性性

设 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, α, β 为常数, 则

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g',$$

特别地

$$(\alpha f)' = \alpha f',$$

$$(f + g)' = f' + g',$$

$$(f - g)' = f' - g'.$$

(2) 乘积函数求导法则

设 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(3) 除法

设 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, 并且

$$g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I,$$

则

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(4) 复合函数求导法则

设 $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$, $g: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 则

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x), \quad \forall x \in I.$$

(5) 反函数求导

设 $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ 有反函数, $g: J \rightarrow I$ 是 f 的反函数, 则

$$f(g(x)) = x, \quad \forall x \in J,$$

因此由复合函数求导法则

$$f'(g(x))g'(x) = 1, \quad \forall x \in J,$$

所以

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad \forall x \in J.$$

5. 基本初等函数的导数

下面利用求导法则求基本初等函数的导数。

首先，利用乘积函数求导法则容易证明

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n=1,2,\cdots.$$

(1) 指数函数的导数

定义

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

因此

$$(e^x)' = e^x.$$

设 $a > 0$, $a \neq 1$ 。则

$$a^x = e^{x \ln a},$$

由复合函数求导法则

$$(a^x)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

因此

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

(2) 对数函数的导数

由于

$$e^{\ln x} = x, \quad \forall x > 0,$$

上式两端求导, 由复合函数求导法则

$$e^{\ln x} (\ln x)' = 1, \quad \forall x > 0,$$

即

$$x (\ln x)' = 1, \quad \forall x > 0,$$

因此

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

设 $a > 0$, $a \neq 1$ 。则

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \forall x > 0,$$

因此由求导的线性性

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad \forall x > 0.$$

(3) 幂函数的导数

设 $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ 。则

$$\ln x^a = a \ln x, \quad \forall x > 0,$$

上式两端求导, 由复合函数求导法则

$$\frac{1}{x^a} (x^a)' = \frac{a}{x}, \quad \forall x > 0,$$

由此可得

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad \forall x > 0.$$

(4) 三角函数的导数

设 i 为虚数单位。由 Euler 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

可得

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

上式两端求导得

$$(\cos x)' = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = -\sin x,$$

因此

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

由诱导公式

$$(\sin x)' = (\cos(\frac{\pi}{2} - x))' = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x,$$

因此

$$(\sin x)' = \cos x.$$

直接应用求导公式可得

$$(\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x,$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

(5) 反三角函数的导数

设 $x \in (-1, 1)$, 则

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

上式两端求导, 由复合函数求导法则

$$\cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1,$$

即

$$\sqrt{1-x^2} (\arcsin x)' = 1,$$

由此可得

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

由于

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

所以

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arc cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6. 对勾函数

设 $a, b > 0$ 。我们称

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}, \quad x > 0$$

为对勾函数。我们有

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x} \left(ax - \frac{b}{x} \right).$$

设 $x_0 > 0$ 满足

$$ax_0 = \frac{b}{x_0}.$$

则当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 因此 f 在 $(0, x_0)$ 上单调减; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 因

此 f 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调增。

7. 利用导数证明不等式

例 5. 证明:

$$\ln x \leq x-1, \quad \forall x > 0,$$

等号成立当且仅当 $x=1$ 。

例 6. 证明:

$$e^x \geq x+1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

等号成立当且仅当 $x=0$ 。

例 7. 证明:

$$\sin x < x, \quad \forall x > 0.$$

例 8. 证明:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

等号成立当且仅当 $x=0$ 。

例 9. 证明:

$$\tan x > x, \quad \forall x > 0.$$

例 10. 证明:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x \geq 0.$$

8. 函数的极值

设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 如果存在 $\varepsilon > 0$, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$, 使得

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

称 x_0 为 f 的极小值点, 称 $f(x_0)$ 为 f 的极小值; 如果存在 $\varepsilon > 0$, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$, 使得

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\},$$

称 x_0 为 f 的严格极小值点, 称 $f(x_0)$ 为 f 的严格极小值。类似的可定义 f 的极大值点, f 的极大值, f 的严格极大值点和 f 的严格极大值。 f 的极小值点和极大值点统称为 f 的极值点。

设 f 在 x_0 可导。如果 x_0 为 f 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$, 反之不然。例如, 设 $f(x) = x^3$, 则 $f'(0) = 0$, 但 $x = 0$ 不是 f 的极值点。

9. 三次函数

下面考虑一元三次函数的单调性和极值。设

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $a \neq 0$ 。称 Q 为一元三次函数。

我们有

$$Q'(x) = 3ax^2 + 2bx + c。$$

一元二次方程

$$Q'(x) = 0$$

的判别式

$$\Delta = 4b^2 - 12ac。$$

下面分两种情况讨论。

Case (i) $\Delta \leq 0$

如果 $a > 0$ ，则 $Q' \geq 0$ ， f 单调增；如果 $a < 0$ ，则 $Q' \leq 0$ ， f 单调减。

Case (ii) $\Delta > 0$

设方程(1)的两个根为 x_1, x_2 ， $x_1 < x_2$ 。

设 $a > 0$ 。则在 $(-\infty, x_1)$ 上， $f' > 0$ ， f 单调增；在 (x_1, x_2) 上， $f' < 0$ ， f 单调减；在 $(x_2, +\infty)$

上， $f' > 0$ ， f 单调增。因此， x_1 为 f 的严格极大值点； x_2 为 f 的严格极小值点。

设 $a < 0$ 。则在 $(-\infty, x_1)$ 上， $f' < 0$ ， f 单调减；在 (x_1, x_2) 上， $f' > 0$ ， f 单调增；在 $(x_2, +\infty)$

上， $f' < 0$ ， f 单调减。因此， x_1 为 f 的严格极小值点； x_2 为 f 的严格极大值点。

10. 均值不等式

定理 1. 设 $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ 。设 $x, y > 0$ 。则

$$\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta, \quad (1)$$

等号成立当且仅当 $x = y$ 。

Remark. 我们称 $\alpha x + \beta y$ 为 x, y 的加权的平均值, 称 $x^\alpha y^\beta$ 为 x, y 的几何平均值。

定理 1 的证明: 显然, 当 $x = y$ 时 (1) 式中等号成立, 因此我们只需证明当 $x \neq y$ 时

$$\alpha x + \beta y > x^\alpha y^\beta。$$

上式等价于:

$$\alpha \left(\frac{x}{y} \right)^\beta + \beta \left(\frac{y}{x} \right)^\alpha > 1。 \quad (2)$$

令

$$f(x) = \alpha x^\beta + \beta x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

则

$$f(1) = 1,$$

$$f'(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} - \alpha \beta x^{-\alpha-1} = \alpha \beta x^{-\alpha-1}(x-1),$$

因此, 在区间 $(0, 1)$ 上, f 单调减; 在区间 $(1, +\infty)$ 上, f 单调增, 所以

$$f(x) > 1, \quad \forall x > 0, x \neq 1.$$

因此 (2) 式成立。这就证明了定理 1. $\square$

下面给出定理 1 的两个推论。

在定理 1 中，令

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad x = a^p, \quad y = b^q,$$

我们得到如下的 Young 不等式。

推论 1. 设 $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。则对任意 $a, b > 0$

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

等号成立当且仅当 $a^p = b^q$ 。

Remark. 在 Young 不等式中， p, q 称为共轭指数。

由数学归纳法，我们可得如下形式的加权的均值不等式。

推论 2. 设 $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ 。则对任意的 $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 。这里, $n \geq 2$ 。

Remark: 在推论 2 中, α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ 称为权重, 如果取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, 我们就

得到通常的代数几何平均值不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

n 维欧式空间

从具体到抽象是数学发展的一条重要大道，因此具体的例子往往是抽象概念的源泉，而所用的方法也往往是高深数学里所用的方法的依据。

-----华罗庚

0. 引言

在平面上建立平面直角坐标系后，平面上的点和向量可以用它们的坐标 (x, y) 表示。这里 (x, y) 为有序数对，也就是说

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

我们记

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\},$$

称集合 $\mathbb{R}^2$ 为二维欧式空间。

在三维空间建立空间直角坐标系后，三维空间中的点和向量可以用它们的坐标 (x, y, z) 表示。

这里 (x, y, z) 为 3 元有序数组，也就是说

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2.$$

我们记

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

称集合 $\mathbb{R}^3$ 为三维欧式空间。

在这一部分，我们将会定义 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ ，讲述 $\mathbb{R}^n$ 中的基本运算。我们还要证明几个重要的不等式：加权的均值不等式，Young 不等式，Cauchy 不等式，Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。在这里，我们实际上给出了 Cauchy 不等式，Hölder 不等式和 Minkowski 不等式的几何意义。

1. n 维欧式空间的定义

首先定义 n 元有序数组。

定义 1. 设 $x: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ 。记

$$x_i = x(i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

我们称 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 元有序数组。

设

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

为两个 n 元有序数组，则

$$x = y \Leftrightarrow x(i) = y(i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

即

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

定义 2. 记

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\},$$

称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧式空间。

设 $x \in \mathbb{R}^n$ ，我们称 x 为点或向量。设

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

称 x_i 为点 x 的第 i 个坐标或向量 x 的第 i 个分量， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

记

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

称 0 为零向量。记

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

...

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1),$$

称 e_i 为第 i 个单位坐标向量。

Remark: 我们也可以用集合的笛卡尔乘积定义 n 维欧式空间

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{重}}.$$

2. 线性运算

下面定义 $\mathbb{R}^n$ 中的运算。

定义 3. (加法和数乘) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$,

$$x = (x_1, \cdots, x_n),$$

$$y = (y_1, \cdots, y_n).$$

定义

$$kx = (kx_1, \cdots, kx_n),$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n).$$

有了加法和数乘运算，我们就可以定义负向量和减法：

$$-x = (-1)x = (-x_1, \cdots, -x_n),$$

$$x - y = x + (-y) = (x_1 - y_1, \cdots, x_n - y_n).$$

数乘和加法统称为线性运算。

命题 1. 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ 。

证明: 由定义直接可得。□

Remark. 命题 1 告诉我们, 每一个向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 都可以用单位坐标向量 $e_1, \dots, e_n$ 表示, 我们称 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。

二维向量和三维向量的线性运算的所有运算律都可以推广到 n 维向量。

设 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $k, l \in \mathbb{R}$ 。则

(1) $x + y = y + x$;

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(3) $0 + x = x$;

(4) $x + (-x) = 0$;

(5) $1x = x$;

(6) $(kl)x = k(lx)$;

(7) $(k + l)x = kx + lx$;

(8) $k(x + y) = kx + ky$.

设 $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$ 。显然, 如果 $k = 0$ 或 $x = 0$, 则 $kx = 0$ 。反之亦然。

命题 2. 设 $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$ 。如果 $kx = 0$, 则 $k = 0$ 或 $x = 0$ 。

证明: 反证法。假设 $k \neq 0$, $x \neq 0$ 。设 x 的第 i 个分量 $x_i \neq 0$, 则 kx 的第 i 个分量 $kx_i \neq 0$,

因此 $kx \neq 0$, 矛盾。所以假设不成立, 因此必有 $k = 0$ 或 $x = 0$ 。□

3. 平行和同向

下面给出几个名词和术语。

(1) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 称 $\alpha x + \beta y$ 为 x, y 的线性组合。

(2) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 。如果存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 其中 α, β 不全为零, 使得

$$\alpha x + \beta y = 0,$$

称 x, y 平行(线性相关), 记为 $x \parallel y$ 。

由定义, 对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \parallel x$ 。

(3) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x, y \neq 0$ 。如果存在 $k > 0$, 使得 $y = kx$, 称 x, y 同向。

命题 3. 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 。下列叙述等价。

(i) $x \parallel y$;

(ii) 存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得 $x = ky$ 或者 $y = kx$;

(iii) $x_i y_j = x_j y_i, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

证明:

(i) $\Rightarrow$ (ii): 由 (i), 存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, α, β 不全为零, 使得 $\alpha x + \beta y = 0$ 。如果 $\alpha \neq 0$,

则 $x = -\frac{\beta}{\alpha} y$; 如果 $\beta \neq 0$, 则 $y = -\frac{\alpha}{\beta} x$ 。

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 设 $x = ky$, 则 $x_i = ky_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。因此

$$x_i y_j = ky_i y_j = x_j y_i, \forall i, j = 1, 2, \dots, n。$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): 如果 $x = 0$, 则 (i) 成立。设 $x \neq 0$ 。首先证明, 当 $x_i = 0$ 时 $y_i = 0$ 。设 $x_i = 0$,

则由 (iii)

$$x_j y_i = 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, n,$$

又因为 x 的分量不全为零, 所以 $y_i = 0$ 。因此当 $x_i = 0$ 时 $y_i = 0$ 。记

$$\Lambda = \{i; x_i \neq 0, i = 1, 2, \dots\}。$$

由 (iii)

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_j}{x_j}, \forall i, j \in \Lambda。$$

记 $k = y_i / x_i, i \in \Lambda$, 则

$$y_i = kx_i, \forall i \in \Lambda。$$

又因为当 $x_i = 0$ 时 $y_i = 0$, 所以

$$y_i = kx_i, \forall i = 1, 2, \dots, n。$$

因此 $y = kx$, 即 $kx - y = 0$ 。□

命题 4. 设 $x, y, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 。则

(i) $x \parallel y$ 当且仅当存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得 $y = kx$;

(ii) 如果 $x \parallel y$, $y \parallel z$, 则 $x \parallel z$ 。

证明:

(i) 设 $x \parallel y$, 则存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, α, β 不全为零, 使得 $\alpha x + \beta y = 0$ 。如果 $\beta = 0$, 则 $\alpha x = 0$,

又因为 $x \neq 0$, 所以 $\alpha = 0$, 这与 α, β 不全为零矛盾, 因此 $\beta \neq 0$, 所以 $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$ 。

(ii) 由 (i), 存在 $k, l \in \mathbb{R}$ 使得 $y = kx$, $z = ly$, 则 $z = klx$, 从而由 (i), $x \parallel z$ 。□

Remark. 命题 4(ii) 称为传递性。我们注意, 如果去掉假设 $x, y, z \neq 0$, 命题 4(ii) 不成立。

4. 向量的内积

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ ，定义

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

称 $x \cdot y$ 为 x, y 的内积。我们也记

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle .$$

命题 5. (内积的基本性质)

设 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。则下列结论成立:

(i) (非负性) $\langle x, x \rangle \geq 0$, “=” 成立当且仅当 $x = 0$;

(ii) (对称性) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

(iii) (线性性) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ 。

我们注意, 由(ii), (iii)可得

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle .$$

命题 5 的证明: 由定义直接可得。□

5. 向量的模

设 $x \in \mathbb{R}^n$ ，定义

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

称 $|x|$ 为 x 的长度，模或者 2-范数。由定义

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}.$$

如果 $|x| = 1$ ，我们称 x 为单位向量。

下面给出内积和模之间的关系。

命题 6. (Cauchy 不等式) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|,$$

等号成立当且仅当 $x \parallel y$ 。

证明: 因为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_j x_j y_i) \\ &= 2(\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2), \end{aligned}$$

所以

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2 \geq 0,$$

即

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|,$$

等号成立当且仅当

$$x_i y_j = x_j y_i, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

即 $x \parallel y$ 。□

命题 7. (向量的模的基本性质)

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$ 。则下列结论成立:

(i) (非负性) $|x| \geq 0$, “=” 成立当且仅当 $x = 0$;

(ii) (非负齐性) $|kx| = |k| |x|$;

(iii) (三角不等式) $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。

证明: (i), (ii) 由定义直接可得。下面证明 (iii)。由 Cauchy 不等式

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

因此 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。□

Remark. 设 $x, y \neq 0$, 则三角不等式中等号成立当且仅当 x, y 同向。

6. 向量的夹角

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x, y \neq 0$ 。由 Cauchy 不等式

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{|x| |y|} \leq 1,$$

因此存在唯一的 $\theta \in [0, \pi]$, 使得

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x| |y|},$$

称 θ 为向量 x, y 的夹角。

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 。如果 $x \cdot y = 0$, 称 x, y 垂直或正交, 记为 $x \perp y$ 。如果 $x, y \neq 0$, 则 $x \perp y$ 等价于 x, y 的夹角为 90° 。设 $x \perp y$, 则有如下的勾股定理成立

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

7. 正交投影

设 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 。记

$$x^\circ = x/|x|,$$

则 $|x^\circ| = 1$ ，称 x° 为 x 对应的单位向量。

设 $a \in \mathbb{R}^n$ ， $a \neq 0$ 。设 $b \in \mathbb{R}^n$ 。称 $b \cdot a^\circ$ 为 b 在 a 上的投影，称向量 $(b \cdot a^\circ)a^\circ$ 为 b 在 a 上的投影向量。

命题 8. (正交分解)

设 $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ 。记

$$b_1 = (b \cdot a^\circ) a^\circ,$$

$$b_2 = b - b_1,$$

则 $b_1 \perp b_2$, 且

$$|b|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2.$$

我们称

$$b = b_1 + b_2$$

为 b 的正交分解。

命题 8 的证明: 我们有

$$b_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot (b - b_1) = b_1 \cdot b - |b_1|^2 = (b \cdot a^\circ)(b \cdot a^\circ) - |b \cdot a^\circ|^2 = 0,$$

因此 $b_1 \perp b_2$ 。由勾股定理

$$|b|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2. \square$$

8. 平行四边形和三角形的面积

设 $a \in \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 且 x, y 不平行。设 x, y 的夹角为 θ 。我们记

$$P = \{a + \lambda x + \mu y; 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\},$$

称 P 为以 a 为顶点, x, y 为邻边的平行四边形, 记

$$S(P) = |x| |y| \sin \theta,$$

称 $S(P)$ 为平行四边形 P 的面积。

命题 9. (平行四边形面积公式) 我们有

$$S(P) = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - (x \cdot y)^2}.$$

证明: 由定义

$$S(P) = |x| |y| \sin \theta = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - |x|^2 |y|^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - (x \cdot y)^2}. \quad \square$$

9. 两点距离公式

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 。我们称 $|x - y|$ 为 x, y 的距离，则

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

命题 10. (距离的基本性质)

设 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ 。则下列结论成立:

(i) (非负性) $|x - y| \geq 0$, “=” 成立当且仅当 $x = y$;

(ii) (对称性) $|x - y| = |y - x|$;

(iii) (三角不等式) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ 。

证明: 由命题 9 可得。□

10. 向量的 p -范数

设 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 。设 $p \geq 1$ 。记

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

称 $|x|_p$ 为 x 的 p -范数。记

$$|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

称 $|x|_\infty$ 为 x 的 ∞ -范数。

下面给出向量的内积和 p -范数的关系。

命题 11. (Hölder 不等式)

设 $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 。则

$$|x \cdot y| \leq |x|_p |y|_q. \quad (1)$$

Remark. Hölder 不等式是 Cauchy 不等式的推广。

命题 11 的证明: 如果 $x = 0$ 或者 $y = 0$, (6) 式显然成立。设 $x, y \neq 0$ 。记

$$x = \frac{x}{|x|_p}, \quad y = \frac{y}{|y|_p},$$

则 $|x|_p = |y|_q = 1$, (6) 式等价于 $|x \cdot y| \leq 1$; 因此我们只需证明, 当 $|x|_p = |y|_q = 1$ 时, 等式 (1) 成立。

设 $|x|_p = |y|_q = 1$ 。由 Young 不等式

$$|x \cdot y| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right) = \frac{1}{p} |x|_p^p + \frac{1}{q} |y|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

这就证明了 (1) 式。□

向量的 p -范数和向量的模具有类似的性质。

命题 12. (向量的 p -范数的基本性质)

设 $p \geq 1$ 或 $p = \infty$. 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$. 则下列结论成立:

(i) (非负性) $|x|_p \geq 0$, “=” 成立当且仅当 $x = 0$;

(ii) (非负齐性) $|kx|_p = |k| |x|_p$;

(iii) (三角不等式) $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$.

(i), (ii) 由定义直接可得。当 $p = 1$ 或者 $p = \infty$ 时, 容易证明 (iii) 成立。

下面证明当 $p > 1$ 时命题 11 (iii) 成立。

命题 13. (Minkowski 不等式)

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$ 。则

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p. \quad (2)$$

Remark. Minkowski 不等式是通常的三角不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

的推广。

命题 16 的证明: 当 $x + y = 0$ 时, (7) 式显然成立, 因此我们假设 $x + y \neq 0$ 。设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。

则由 Young 不等式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \right\} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q} \{ |x|_p + |y|_p \}, \end{aligned}$$

其中在第二个不等式中, 我们用到了 Young 不等式, 这样我们得到

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q} \{ |x|_p + |y|_p \}. \quad (3)$$

因为 $x + y \neq 0$, 所以

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q} \neq 0.$$

(3) 式两端同除 $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q}$ 即得 (2) 式。□

第 7 讲 确界原理

1. 实数理论

实数集满足如下四个公理。

(I) 加法公理: 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $x + y \in \mathbb{R}$ 。加法满足如下的运算律

1. (零元) $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
2. (负元) $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
3. (加法结合律) $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R};$
4. (加法交换律) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

(II) 乘法公理: 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $xy \in \mathbb{R}$ 。乘法满足如下的运算律

1. (单位元) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
2. (逆元) $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0;$
3. (乘法结合律) $(xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R};$
4. (乘法交换律) $xy = yx, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

乘法和加法满足

5. (分配率) $x(y + z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$

(III) 序公理: $\mathbb{R}$ 中的不等关系 “ $\leq$ ” 满足

1. (自反性) $x \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
2. (反对称性) 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 如果 $x \leq y, y \leq x$, 则 $x = y$;
3. (传递性) 设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 如果 $x \leq y, y \leq z$, 则 $x \leq z$;
4. (全序) 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $x \leq y$ 或 $y \leq x$;

加法与不等关系满足

5. 设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 如果 $x \leq y$, 则 $x + z \leq y + z$;

乘法与不等关系满足

6. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 如果 $0 \leq x, 0 \leq y$, 则 $0 \leq xy$.

(IV) 完备性公理：设 $A, B \subset \mathbb{R}$ ， $A, B \neq \emptyset$ 。如果

$$x \leq y, \quad \forall x \in A, y \in B,$$

则存在 $c \in \mathbb{R}$ ，使得

$$x \leq c \leq y, \quad \forall x \in A, y \in B.$$

公理 (IV) 也称为实数的连续性公理。从几何上看，公理 (IV) 告诉我们，如果 A, B 是数轴 l 上的两个点集，并且 A 在 B 的左边，那么数轴上一定有一点 c 位于 A, B 之间。这意味着我们使用的数轴 l 是一条连续的有向直线，所谓 l 连续，指的是 l 上没有间断点。如果 l 有间断点，公理 (IV) 不成立。例如设 $l = \mathbb{R} \setminus \{c\}$ ，令 $A = (-\infty, c)$ ， $B = (c, +\infty)$ ，则在 l 上不存在一点位于 A, B 之间。

2. 有界集

定义 1. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。如果存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得

$$x \leq M, \quad \forall x \in A,$$

称 A 有上界, 称 M 是 A 的上界; 如果存在 $m \in \mathbb{R}$, 使得

$$x \geq m, \quad \forall x \in A,$$

称 A 有下界, 称 m 是 A 的下界。如果 A 既有上界也有下界, 称 A 有界。

Remarks.

(i) 我们通常默认 $\emptyset$ 为有界集。

(ii) 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。容易证明, A 有界当且仅当存在 $M > 0$, 使得

$$|x| \leq M, \quad \forall x \in A$$

3. 上确界和下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。如果 A 有上界, 则 A 有无数个上界, A 的上界越小, 这个上界就越准确, 那么 A 的最小的上界就是 A 的最准确的上界, 称为 A 的上确界。类似的, 如果 A 有下界, 则 A 有无数个下界, A 的下界越大, 这个下界就越准确, 那么 A 的最大的下界就是 A 的最准确的下界, 称为 A 的下确界。

定义 2. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。设 $M \in \mathbb{R}$ 。如果

$$x \leq M, \quad \forall x \in A,$$

并且对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x \in A$, 使得

$$x > M - \varepsilon,$$

称 M 为 A 的上确界。设 $m \in \mathbb{R}$ 。如果

$$x \geq m, \quad \forall x \in A,$$

并且对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x \in A$, 使得

$$x < m + \varepsilon,$$

称 m 为 A 的下确界。

命题 1. (上下确界的唯一性)

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。

(i) 如果 M_1, M_2 都是 A 的上确界, 则 $M_1 = M_2$;

(ii) 如果 m_1, m_2 都是 A 的下确界, 则 $m_1 = m_2$ 。

证明:

(i) 反证法。假设 $M_1 \neq M_2$ 。不妨设 $M_1 > M_2$ 。因为 M_2 是 A 的上确界, 所以 M_2 是 A 的上界。因为 M_1 是 A 的上确界, $M_2 < M_1$, 所以存在 $x \in A$, 使得 $x > M_2$, 这与 M_2 是 A 的上界矛盾, 因此假设不成立。所以 $M_1 = M_2$ 。

(ii) 可类似证明。□

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。如果存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得 M 为 A 的上确界, 称 A 有上确界。命题 1 告诉我们, 如果 A 有上确界, A 的上确界必唯一, 我们用 $\sup A$ 表示 A 的上确界。类似的, 如果存在 $m \in \mathbb{R}$, 使得 m 为 A 的下确界, 称 A 有下确界。命题 1 告诉我们, 如果 A 有下确界, A 的下确界必唯一, 我们用 $\inf A$ 表示 A 的下确界。

4. 确界原理

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。由定义, 如果 A 有上确界, A 首先必需有上界; 如果 A 有下确界, A 首先必需有下界。下面我们证明, 如果 A 有上界, A 必有上确界; 如果 A 有下界, A 必有下确界, 这就是如下的确界原理。

定理 1. (确界原理)

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。

(i) 如果 A 有上界, A 必有上确界;

(ii) 如果 A 有下界, A 必有下确界。

证明: (i) 记

$$B = \{y \in \mathbb{R}; y \geq x, \forall x \in A\}.$$

由定理的假设, $B \neq \emptyset$ 。由 B 的定义,

$$x \leq y, \quad \forall x \in A, y \in B,$$

因此由实数的完备性公理, 存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得

$$x \leq M \leq y, \quad \forall x \in A, y \in B. \quad (1)$$

下面证明 M 是 A 的上确界。由(1)式

$$x \leq M, \quad \forall x \in A.$$

设 $\varepsilon > 0$ 。下面证明: 存在 $x \in A$, 使得 $x > M - \varepsilon$ 。反证法。假设对于任意 $x \in A$, 都有 $x \leq M - \varepsilon$ 。则 $M - \varepsilon \in B$, 则由(1)式, $M \leq M - \varepsilon$, 矛盾。因此假设不成立, 所以, 存在 $x \in A$, 使得 $x > M - \varepsilon$ 。这就证明了 M 是 A 的上确界。

(ii) 可类似证明。□

Remark. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。如果 A 没有上界, 我们也称 A 的上确界为正无穷, 记 $\sup A = +\infty$; 如果 A 没有下界, 我们也称 A 的下确界为负无穷, 记 $\inf A = -\infty$ 。这样, $\mathbb{R}$ 的任意子集都有上确界和下确界。

例 1. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ 。

(i) 如果 $M = \max A$, 则 $M = \sup A$;

(ii) 如果 $m = \min A$, 则 $m = \inf A$.

证明:

(i) 因为 $M = \max A$, 所以

$$x \leq M, \quad \forall x \in A.$$

设 $\varepsilon > 0$ 。因为 $M = \max A$, 所以 $M \in A$ 。因为 $\varepsilon > 0$, 所以 $M > M - \varepsilon$ 。这就证明了 $M = \sup A$ 。

(ii) 可类似证明。□

例 2. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ 。则 $a = \inf(a, b)$, $b = \sup(a, b)$ 。

证明：显然，

$$a < x, \quad \forall x \in (a, b).$$

设 $\varepsilon > 0$ 。令

$$x = \frac{\min\{a + \varepsilon, b\} + a}{2},$$

则 $x \in (a, b)$, 且 $x < a + \varepsilon$ 。这就证明了 $a = \inf(a, b)$ 。类似的可以证明 $b = \sup(a, b)$ 。□

5. 函数的上确界和下确界

定义 3. 设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果存在 $M \in \mathbb{R}$ ，使得

$$f(x) \leq M, \quad \forall x \in A,$$

称 f 有上界，称 M 是 f 的上界；如果存在 $m \in \mathbb{R}$ ，使得

$$f(x) \geq m, \quad \forall x \in A,$$

称 f 有下界，称 M 是 f 的下界。如果 f 既有上界也有下界，称 f 有界。

Remarks.

(i) 由定义， f 有上界(有下界，有界)当且仅当 $\mathbf{Rg} f$ 有上界(有下界，有界)。

(ii) 容易证明， f 有界当且仅当存在 $M > 0$ ，使得

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

定义 4. 设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果 $\mathbf{Rg} f$ 有上确界，称函数 f 有上确界，记

$$\sup f = \sup(\mathbf{Rg} f),$$

称 $\sup f$ 为函数 f 的上确界；如果 $\mathbf{Rg} f$ 有下确界，称函数 f 有下确界，记

$$\inf f = \inf(\mathbf{Rg} f),$$

称 $\inf f$ 为函数 f 的下确界。

由定理 1，如果 f 有上界， f 必有上确界；如果 f 有下界， f 必有下确界。

第 8 讲 数列的极限

1. 数列极限的定义

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ 。定义 $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$a(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

我们称 a 为数列, 记为 $a = \{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 。

在不会引起混淆的情况下, 我们也简单地将数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 记为 $\{a_n\}$ 。

Remark. 我们将数列看成定义域为 $\mathbb{N}^*$ 的函数。

定义 1. 设 $a_n, a \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$ 。如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

称 a 是 $\{a_n\}$ 的极限。

Remark: 在定义 1 中, $|a_n - a|$ 表示 a_n 与 a 的误差。 a 是 $\{a_n\}$ 的极限意味着: 当 n 充分大时, a_n 与 a 很接近, 而且要多接近有多接近。

例 1. 设 $\alpha > 0$ 。证明：0 是数列 $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ 的极限。

证明：设 $\varepsilon > 0$ 。令

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}} \right] + 1,$$

则

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

因此 0 是数列 $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ 的极限。□

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$ 。如果存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 a 是 $\{a_n\}$ 的极限, 我们称数列 $\{a_n\}$ 有极限, 否则称数列 $\{a_n\}$ 没有极限。下面证明极限的唯一性。

命题 1 (唯一性). 设 $a, b, a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$ 。如果 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限, 则 $a=b$ 。

证明：设 $\varepsilon > 0$ 。存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1,$$

$$|a_n - b| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，则

$$|a - b| \leq |a - a_N| + |b - a_N| \leq 2\varepsilon.$$

这样，我们就证明了

$$|a - b| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

因此 $|a - b| = 0$ ，即 $a = b$ 。□

记号:

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$ 。如果 $\{a_n\}$ 有极限, a 是 $\{a_n\}$ 的极限, 我们记 $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$,

或者 $a_n \rightarrow a$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时。

在不引起混淆的情况下, 我们也简单地记为 $a_n \rightarrow a$ 。

一个数列不一定有极限。下面举一个反例。

例 2. 设 $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ 。证明: $\{a_n\}$ 没有极限。

证明：反证法。假设 $\{a_n\}$ 有极限， $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ，则存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq N,$$

因此

$$|a_{2N-1} - a| < \frac{1}{2},$$

$$|a_{2N} - a| < \frac{1}{2},$$

从而

$$|a_{2N} - a_{2N-1}| < 1,$$

即 $2 < 1$ ，矛盾。因此，假设不成立，所以 $\{a_n\}$ 没有极限。□

下面给出两个专业的术语。

定义 2. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ 。如果存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 a 是 $\{a_n\}$ 的极限, 我们称 $\{a_n\}$ 收敛, 否则称 $\{a_n\}$ 发散。

下面给出数列极限的一个常用的等价定义。

命题 2(等价定义). 设 $a_n, a \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$. 设 $C > 0$. 则下列叙述是等价的:

(i) $a_n \rightarrow a$;

(ii) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|a_n - a| \leq C\varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Remark. 在命题 2 中, C 是一个与 n 无关的正常数。

命题 2 的证明:

(i) $\Rightarrow$ (ii): 设 $\varepsilon > 0$ 。由 (i), 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|a_n - a| < C\varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

则

$$|a_n - a| \leq C\varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): 设 $\varepsilon > 0$ 。由 (ii), 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|a_n - a| \leq C \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N,$$

则

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

因此, $a_n \rightarrow a$ 。□

练习题

练习 1. 设 $a_n, a \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。设 $C>0$, $\varepsilon_0>0$, $N_0 \in \mathbb{N}^*$ 。证明下列叙述是等价的:

(i) $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$;

(ii) 对于任意 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq N_0$, 使得

$$|a_n - a| \leq C\varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

练习 2. 设 $\alpha > 0$, $C > 0$, $a_n = \frac{C}{n^\alpha}$, $n = 1, 2, \dots$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 。

练习 3. 设 $a_n, a \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$, $a_n \rightarrow a$ 。证明:

(i) 如果 $b \in \mathbb{R}$, $b > a$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$a_n < b, \quad \forall n \geq N;$$

(ii) 如果 $b \in \mathbb{R}$, $b < a$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$a_n > b, \quad \forall n \geq N;$$

(iii) 如果 $a \neq 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|a_n| > |a|/2, \quad \forall n \geq N.$$

练习 4. 设 $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ 。设 $n_0 \in \mathbb{N}^*$ 。

(i) 证明: 数列 $\{a_{n+n_0}\}_{n=1}^{+\infty}$ 的极限也是 a ;

(ii) 证明: 如果

$$a_n = b_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

则 $a = b$ 。

[Remark. 这个结论表明, 一个数列的极限和它的前有限项没有关系。]

练习 5. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。证明: $a_n \rightarrow 0$ 当且仅当 $|a_n| \rightarrow 0$ 。

[Remark. 如果 $a_n \rightarrow 0$, 我们又称数列 $\{a_n\}$ 为无穷小量, 练习 5 的结论告诉我们, $\{a_n\}$ 为无穷小量意味着: 当 n 充分大时, a_n 的绝对值 (而不是 a_n) 很小, 而且要多小有多小。]

2. 数列极限的基本性质

定义 3. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。如果存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得

$$a_n \leq M, \quad \forall n=1,2,\dots,$$

称数列 $\{a_n\}$ 有上界; 如果存在 $m \in \mathbb{R}$, 使得

$$a_n \geq m, \quad \forall n=1,2,\dots,$$

称数列 $\{a_n\}$ 有下界。如果 $\{a_n\}$ 既有上界 也有下界, 称 $\{a_n\}$ 有界。

Remark. 数列 $\{a_n\}$ 有界当且仅当: 存在 $M > 0$, 使得

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n=1,2,\dots.$$

命题 3 (有界性). 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界。

证明：存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|a_n - a| \leq 1, \quad \forall n \geq N,$$

则

$$|a_n| \leq |a| + 1, \quad \forall n \geq N.$$

令

$$M = \sum_{n=1}^N |a_n| + |a| + 1,$$

则

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

因此 $\{a_n\}$ 有界。□

定义 4. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。设 $n_k \in \mathbb{N}^*$, $k=1,2,\dots$,

$$n_{k+1} > n_k, \quad k=1,2,\dots,$$

称 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列。

Remark. 如果 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列, 则

$$n_k \geq k, \quad k=1,2,\dots.$$

命题 4(子列的极限). 设 $a_n, a \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 。如果 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列, 则 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ 。

证明：设 $\varepsilon > 0$ 。存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

设 $k \geq N$ ，则

$$n_k \geq n_N \geq N,$$

因此

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon, \quad \forall k \geq N.$$

这就证明了 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ 。□

命题 5(夹逼定理). 设 $a_n, b_n, c_n, a \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \cdots$, $a_n \rightarrow a$, $c_n \rightarrow a$ 。如果

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

其中 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, 则 $b_n \rightarrow a$ 。

证明：设 $\varepsilon > 0$ 。存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1,$$

$$|c_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2.$$

令 $N = \max\{n_0, N_1, N_2\}$ ，则当 $n \geq N$ 时，

$$-\varepsilon < a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a < \varepsilon,$$

因此

$$|b_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

这就证明了 $b_n \rightarrow a$ 。□

命题 6 (不等式取极限). 设 $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ 。如果

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

其中 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, 则 $a \leq b$ 。

Remark. 我们注意, 如果

$$a_n < b_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

我们并不能得到 $a < b$ 。例如, 设 $a_n = \frac{1}{2n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, 则

$$a_n < b_n, \quad \forall n \geq 1,$$

但是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ 。

命题 6 的证明：设 $\varepsilon > 0$ 。存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1,$$

$$|b_n - b| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2.$$

令 $N = \max\{n_0, N_1, N_2\}$ ，则

$$a - b \leq a_N - b_N + (a - a_N) + (b - b_N) \leq 2\varepsilon,$$

这样我们就证明了

$$a - b \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

因此 $a - b \leq 0$ ，即 $a \leq b$ 。□

练习题

练习 1. 设 $\alpha > 0$, $a_n = n^\alpha$, $n = 1, 2, \dots$ 。证明数列 $\{a_n\}$ 无界, 从而由命题 3 $\{a_n\}$ 不收敛。

练习 2. 设 $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ 。利用命题 4 证明: 数列 $\{a_n\}$ 不收敛。

练习 3. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$, 如果 $a_n \rightarrow 0$, 我们又称数列 $\{a_n\}$ 为无穷小量。利用命题 5 证明下列数列为无穷小量。

$$(1) a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n=1,2,\cdots;$$

$$(2) a_n = \frac{1}{e^n}, \quad n=1,2,\cdots;$$

$$(3) a_n = \frac{n}{n^2 + n}, \quad n=1,2,\cdots。$$

练习 4. 设 $\alpha > 0$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$ 。

[提示: 利用不等式 $\ln x \leq x^\alpha / \alpha$ 。]

练习 5. 设 $a_n, a, b \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n-1} = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = b$ 。证明: $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $a = b$ 。

练习 6. 设 $a_n, a \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$, $a_n \rightarrow a$ 。记

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \quad n=1, 2, \dots.$$

证明: $b_n \rightarrow a$ 。

3. 数列极限的四则运算

命题 7 (四则运算). 设 $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ 。设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。

下列结论成立:

(i) $\alpha a_n + \beta b_n \rightarrow \alpha a + \beta b$;

(ii) $a_n b_n \rightarrow ab$;

(iii) 如果

$$b_n \neq 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

则 $a_n / b_n \rightarrow a / b$ 。

证明：(i) 设 $\varepsilon > 0$ 。则存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

$$|b_n - b| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

则当 $n \geq N$ 时，

$$|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| \leq |\alpha| |a_n - a| + |\beta| |b_n - b| \leq (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon,$$

因此 $\alpha a_n + \beta b_n \rightarrow \alpha a + \beta b$ 。

(ii) 设 $\varepsilon > 0$ 。则存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

$$|b_n - b| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

因为 $\{a_n\}$ 有界，存在 $M > 0$ ，使得

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n = 1, 2, \dots.$$

则当 $n \geq N$ 时，

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq (M + |b|)\varepsilon,$$

因此 $a_n b_n \rightarrow ab$ 。

(iii) 由(ii), 我们只需要证明 $1/b_n \rightarrow 1/b$ 。设 $\varepsilon > 0$ 。则存在 $N_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|b_n - b| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1.$$

因为 $b \neq 0$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|b_n| \geq |b|/2, \quad \forall n \geq N_2.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 。则当 $n \geq N$ 时,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} \varepsilon,$$

因此 $a_n/b_n \rightarrow a/b$ 。□

练习题

练习 1. 设 $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$ 。记

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

称 P 为(一元) n 次多项式, 称 $a_n x^n$ 为 P 的主项。设 $n \geq 1$ 。证明: $\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\frac{1}{k}\right) = P(0)$ 。

练习 2. 设 $a_n, b_n, c_n, a, b \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ 。证明: 如果

$$|a_n - b_n| \leq c_n, \quad \forall n \geq 1,$$

并且 $c_n \rightarrow 0$, 则 $a = b$ 。

4. 单调收敛定理

定义 5. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。如果

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n=1,2,\dots,$$

称 $\{a_n\}$ 单调增；如果

$$a_n < a_{n+1}, \quad \forall n=1,2,\dots,$$

称 $\{a_n\}$ 严格单调增。类似地可以定义 $\{a_n\}$ 单调减和 $\{a_n\}$ 严格单调减。如果 $\{a_n\}$ 单调增或单调减，称 $\{a_n\}$ 单调。

定义 6. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$ 。记

$$\sup a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$\inf a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}^*\},$$

分别称 $\sup a_n$ 和 $\inf a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的上确界和下确界。

定理 8(单调收敛定理). 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$ 。

(i) 如果 $\{a_n\}$ 单调增有上界, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup a_n$;

(ii) 如果 $\{a_n\}$ 单调减有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf a_n$ 。

证明：(i) 记 $a = \sup a_n$ 。设 $\varepsilon > 0$ ，则存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$a - \varepsilon < a_N.$$

因为 $\{a_n\}$ 单调增，所以

$$a - \varepsilon < a_n, \quad \forall n \geq N,$$

则

$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

因此

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 。

(ii) 考虑数列 $\{-a_n\}$ 。因为 $\{a_n\}$ 单调减有下界, 所以 $\{-a_n\}$ 单调增有上界。由 (i),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\sup(-a_n) = \inf a_n. \quad \square$$

练习题

在下面的练习中，我们证明几个常用的极限

(1) $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 严格单调增, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$,

其中第一个极限可以作为自然对数的底数 e 的定义。

Remark. 自然对数的底数 e 有两个等价的定义

$$(i) \quad e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(ii) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

练习 1. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。证明: 如果 $a_n \rightarrow 0$, 则 $e^{a_n} \rightarrow 1$ 。

练习 2. 设 $a_n, a \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$ 。证明: 如果 $a_n \rightarrow a$, 则 $e^{a_n} \rightarrow e^a$ 。

[Remark. 这个结论实际上证明了指函数 $y = e^x$ 为连续函数。]

练习 3. 设 $a > 0$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 。

[提示: 首先取对数 $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{\ln a}{n}$, 然后利用练习 1 的结论。这是计算形如 $f(x)^{g(x)}$ 的函数的常用方法。]

练习 4. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 。

练习 5. 证明：数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 严格单调增并且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$ 。

[提示：取对数 $\ln(1+\frac{1}{n})^n = \frac{\ln(1+1/n)}{1/n}$ ，然后利用函数 $y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ 的单调性和不

$$\text{等式 } \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad x > 0$$

证明。]

5. Cauchy 收敛原理

定义 7. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N,$$

称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列。

数列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列意味着: 当 n 充分大时, 数列 $\{a_n\}$ 的变化很小, 而且要多小有多小。

Remark. 类似于数列极限的定义, 在定义 7 中, 不等式

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N,$$

可以替换为

$$|a_n - a_m| \leq C\varepsilon, \quad \forall n, m \geq N,$$

其中 $C > 0$ 为不依赖于 m, n 的常数。

定理 9 (Cauchy 收敛原理). 设 $x_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。则 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。

Remark. Cauchy 收敛原理的重要意义在于：在我们不知道数列 $\{x_n\}$ 的极限的情况下，我们可以应用 Cauchy 收敛原理判定数列 $\{x_n\}$ 是否有极限。

下面用二分法证明定理 9.

定理 9 的证明:

(1) 首先证明必要性。设 $x_n \rightarrow x$ 。设 $\varepsilon > 0$ 。存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|x_n - x| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

则

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| \leq 2\varepsilon, \quad \forall n, m \geq N,$$

这就证明了 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。

(2) 下面证明充分性。设 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。下面证明 $\{x_n\}$ 收敛。

设 $A \subset \mathbb{R}$ 。如果集合 $\{n \in \mathbb{N}^*; x_n \in A\}$ 为无限集，我们称在集合 A 中有数列 $\{x_n\}$ 的无限项。设 $A = B \cup C$ 。如果在集合 A 中有数列 $\{x_n\}$ 的无限项，则在集合 B 或 C 中必有数列 $\{x_n\}$ 的无限项。

首先证明 $\{x_n\}$ 有界。因为 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|x_n - x_N| \leq 1, \quad \forall n \geq N,$$

则

$$|x_n| \leq |x_N| + 1, \quad \forall n \geq N.$$

令

$$M = \sum_{n=1}^N |x_n| + 1,$$

则

$$|x_n| \leq M, \quad \forall n = 1, 2, \dots.$$

下面用归纳法构造一系列区间 $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \dots$, 使得每个区间中都有数列 $\{x_n\}$ 的无限项。

记 $[a_1, b_1] = [-M, M]$, 则在 $[a_1, b_1]$ 中有 $\{x_n\}$ 的无限项。

记 $c_1 = (a_1 + b_1) / 2$ 。则在 $[a_1, c_1]$ 或 $[c_1, b_1]$ 中有 $\{x_n\}$ 的无限项。如果在 $[a_1, c_1]$ 中有 $\{x_n\}$ 的无限项, 记 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$, 否则记 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$; 则在 $[a_2, b_2]$ 中有 $\{x_n\}$ 的无限项。

不断重复上述过程，我们得到数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，它们满足

(C1) $\{a_n\}$ 单调增， $\{b_n\}$ 单调减，并且 $a_n < b_n$ ， $n=1,2,\cdots$;

(C2) $b_n - a_n \leq (b_1 - a_1) / 2^{n-1}$ ， $n=1,2,\cdots$;

(C3) 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ， $[a_n, b_n]$ 中有 $\{x_n\}$ 的无限项。

由 (C1)， $\{a_n\}, \{b_n\}$ 单调有界，因此由单调收敛定理， $\{a_n\}, \{b_n\}$ 收敛。由 (C2)，

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ 。记

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

下面证明 $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 。

设 $\varepsilon > 0$ 。因为 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 存在 $\alpha \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq \alpha.$$

因为 $a_n \rightarrow x$, $b_n \rightarrow x$, 存在 $\beta \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$x - \varepsilon < a_\beta < b_\beta < x + \varepsilon.$$

由 (C3), $[a_\beta, b_\beta]$ 中有 $\{x_n\}$ 的无限项, 因此存在 $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq \alpha$, 使得 $x_N \in [a_\beta, b_\beta]$,

则

$$x - \varepsilon < x_N < x + \varepsilon,$$

即 $|x_N - x| < \varepsilon$ 。设 $n \geq N$, 则 $n \geq \alpha$, 因此

$$|x_n - x_N| < \varepsilon,$$

从而

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_N| + |x_N - x| \leq 2\varepsilon.$$

这样我们就证明了

$$|x_n - x| \leq 2\varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

因此 $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 。□

6. 数列趋于无穷大

定义 8. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$ 。如果对于任意 $M > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$a_n > M, \quad \forall n \geq N,$$

称 $\{a_n\}$ 趋于正无穷, 记为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ 或 $a_n \rightarrow +\infty$; 如果对于任意 $M > 0$, 存在

$N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$a_n < -M, \quad \forall n \geq N,$$

称 $\{a_n\}$ 趋于负无穷, 记为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ 或 $a_n \rightarrow -\infty$ 。

Remark. 我们注意, 如果 $a_n \rightarrow +\infty$ 或者 $a_n \rightarrow -\infty$, 则 $\{a_n\}$ 无界, 因此 $\{a_n\}$ 不收敛。

例 3. 设 $\alpha > 0$ 。证明: $n^\alpha \rightarrow +\infty$ 。

证明: 设 $M > 0$ 。令 $N = [M^{1/\alpha}] + 1$, 则

$$n^\alpha > M, \quad \forall n \geq N,$$

因此 $n^\alpha \rightarrow +\infty$ 。□

练习题

练习 1. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$ 。证明: $a_n \rightarrow +\infty$ 当且仅当 $-a_n \rightarrow -\infty$ 。

练习 2. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$. 证明:

(i) 如果 $a_n > 0$, $n=1,2,\dots$, 则 $a_n \rightarrow +\infty$ 当且仅当 $1/a_n \rightarrow 0$;

(ii) 如果 $a_n < 0$, $n=1,2,\dots$, 则 $a_n \rightarrow -\infty$ 当且仅当 $1/a_n \rightarrow 0$.

[Remark. 我们经常利用变换 $y=1/x$, 在 0 和无穷之间进行转换。]

练习 3. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$, $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列。证明:

(i) 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, 则 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = +\infty$;

(ii) 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, 则 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = -\infty$ 。

练习 4. 设 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

其中 $n_0 \in \mathbb{N}^*$ 。证明：如果 $a_n \rightarrow +\infty$, 则 $b_n \rightarrow +\infty$; 如果 $b_n \rightarrow -\infty$, 则 $a_n \rightarrow -\infty$ 。

练习 5. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。证明:

(i) $\{a_n\}$ 无上界当且仅当存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = +\infty$;

(ii) $\{a_n\}$ 无下界当且仅当存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = -\infty$ 。

练习 6. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。证明:

(i) 如果 $\{a_n\}$ 单调增无上界, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$;

(ii) 如果 $\{a_n\}$ 单调减无下界, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ 。

练习 7. 设 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $a_n > 0$ 。记

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) 证明: 存在 $M > 0$, 使得

$$P(x) \geq \frac{1}{2} a_n x^n, \quad \forall x \geq M.$$

(ii) 证明: $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(k) = +\infty$ 。

7. 数列的上极限和下极限

我们记

$$[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

称 $[-\infty, +\infty]$ 为广义实数集。在广义实数集中, 我们约定

$$(i) \quad -\infty < k < +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad k + (+\infty) = +\infty + k = +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$k + (-\infty) = -\infty + k = -\infty, \quad \forall k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

$$(iii) \quad k \cdot (+\infty) = +\infty \cdot k = +\infty, \quad \forall k \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

$$k \cdot (-\infty) = -\infty \cdot k = -\infty, \quad \forall k \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

$$k \cdot (+\infty) = +\infty \cdot k = -\infty, \quad \forall k \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\},$$

$$k \cdot (-\infty) = -\infty \cdot k = +\infty, \quad \forall k \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}.$$

设 $a \in \mathbb{R}$ 。我们记

$$[-\infty, a) = \{-\infty\} \cup (-\infty, a),$$

$$[-\infty, a] = \{-\infty\} \cup (-\infty, a],$$

$$(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

$$[a, +\infty] = [a, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ 。我们记

$$\sup_{k \geq n} a_k = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}^*, k \geq n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\inf_{k \geq n} a_k = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}^*, k \geq n\}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

我们注意到, 如果 $\{a_n\}$ 有上界, 则数列 $\{\sup_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调减; 如果 $\{a_n\}$ 有下界, 则

数列 $\{\inf_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调增。

定义 9. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ 。如果 $\{a_n\}$ 有上界, 我们记

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_k,$$

否则记

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty,$$

称 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的上极限; 如果 $\{a_n\}$ 有下界, 我们记

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k,$$

否则记

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty,$$

称 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的下极限。

Remarks.

(i) 如果 $\{a_n\}$ 有上界, 则数列 $\{\sup_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调减, 因此 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n < +\infty$, 并且 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 可能等于 $-\infty$; 如果 $\{a_n\}$ 有下界, 则数列 $\{\inf_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调增, 因此 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n > -\infty$, 并且 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 可能等于 $+\infty$ 。

(ii) 容易证明, 上极限和下极限有如下关系

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = - \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n),$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = - \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n).$$

对数列的上极限，我们有如下等价定义。

命题 10. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $a \in [-\infty, +\infty]$ 。则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 当且仅当

(C1) 如果 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列，且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = s \in [-\infty, +\infty]$ ，则 $s \leq a$ ；

(C2) 存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ ，使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ 。

类似的，对数列的下极限，我们有如下等价定义。

命题 10' . 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $a \in [-\infty, +\infty]$ 。则 $\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 当且仅当

(C1) 如果 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列，且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = s \in [-\infty, +\infty]$ ，则 $s \geq a$ ；

(C2) 存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ ，使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ 。

Remark. 命题 10 和命题 10' 告诉我们, 数列 $\{a_n\}$ 的上极限是 $\{a_n\}$ 的最大的子列的极限, 数列 $\{a_n\}$ 的下极限是 $\{a_n\}$ 的最小的子列的极限。

下面证明命题 10 和命题 10'。由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n)$ ，由命题 10 可得命题 10'。

因此，我们只证明命题 10。

命题 10 的证明:

“ $\Rightarrow$ ” 设 $\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = a$ 。下面证明 (C1) (C2)。我们分三种情形讨论。

(a) $\{a_n\}$ 无上界

由定义, $a = +\infty$, 因此 (C1) 成立。下面证明 (C2)。我们用归纳法构造 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 。因为 $\{a_n\}$ 无上界, 因此存在 $n_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_{n_1} \geq 1$ 。因为 $\{a_n\}$ 无上界, 因此存在 $n_2 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} \geq 2$ 。重复上述过程, 我们得到 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{n_k}\}$ 满足

$$a_{n_k} \geq k, \quad \forall k = 1, 2, \dots,$$

因此 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = +\infty$ 。这就证明了 (C2)。

(b) $a = -\infty$

我们只需要证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ 。因为

$$a_n \leq \sup_{i \geq n} a_i, \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{i \geq n} a_i = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = -\infty,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ 。

(c) $a \in \mathbb{R}$

首先证明 (C1)。设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列, $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = s \in [-\infty, +\infty]$ 。因为

$$a_{n_k} \leq \sup_{i \geq n_k} a_i, \quad \forall k = 1, 2, \dots,$$

并且

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{i \geq n_k} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{i \geq n} a_i = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = a,$$

所以 $s \leq a$ 。这就证明了 (C1)。

下面证明 (C2)。记

$$b_n = \sup_{k \geq n} a_k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 $\{b_n\}$ 单调减, $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \inf b_n$ 。

下面用归纳法构造 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ 。因为 $b_1 = \sup_{n \geq 1} a_n$, $a \leq b_1$,

存在 $n_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$a - 1 \leq a_{n_1} \leq b_1.$$

下面证明存在 $n_2 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} \geq a - 1/2$ 。反证法。假设

$$a_n < a - 1/2, \quad \forall n > n_1,$$

则当 $n > n_1$ 时,

$$b_n = \sup_{k \geq n} a_k \leq \sup_{k \geq n_1+1} a_k \leq a - 1/2,$$

因此

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq a - 1/2,$$

矛盾, 所以假设不成立, 因此存在 $n_2 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} \geq a - 1/2$ 。又因为

$n_2 \geq 2$, 所以 $a_{n_2} \leq b_2$ 。这样我们得到 $n_2 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 > n_1$, 使得

$$a - 1/2 \leq a_{n_2} \leq b_2.$$

重复上述过程, 我们得到 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{n_k}\}$ 满足

$$a - 1/k \leq a_{n_k} \leq b_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots.$$

由夹逼定理得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ 。这就证明了 (C2)。

“ $\Leftarrow$ ” 设 (C1) (C2) 成立, 下面证明 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 。根据已经证明的必要性, 我们有如下结论

(C1') 如果 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列, 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = s \in [-\infty, +\infty]$, 则 $s \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$;

(C2') 存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 。

由 (C2) 与 (C1') 知 $a \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$, 由 (C1) 与 (C2') 知 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq a$, 因此 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 。□

下面给出数列的上极限、下极限和极限的关系。

命题 11. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $a \in [-\infty, +\infty]$ 。则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 当且仅当

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = a.$$

证明：“ $\Rightarrow$ ” 由命题 10，存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ ，使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}$ ，则

$$\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a.$$

同理，由命题 10' 可得 $\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = a$ 。这就证明了必要性。

“ $\Leftarrow$ ” 因为

$$\inf_{k \geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \geq n} a_k, \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

并且

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_k = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = a,$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_k = \underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = a,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 。这就证明了充分性。□

练习题

练习 1. 设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ 。设

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n-1} = a,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = b,$$

其中 $a, b \in [-\infty, +\infty]$ 。证明: 如果 $a \leq b$, 则 $\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$ 。

练习 2. 求数列 $\{(-1)^n\}$ 的上极限和下极限，并由此证明数列 $\{(-1)^n\}$ 不收敛。

练习 3. 设 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $\{a_n\}$ 有界, $\{b_n\}$ 收敛。证明:

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n;$$

$$(ii) \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

练习 4. 设 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$ 。设 $\{a_n\}$ 有界, $b_n \geq 0$, $n=1, 2, \dots$, $\{b_n\}$ 收敛。

证明:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n;$$

$$(ii) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

练习 5. 设 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 有界。证明:

$$(i) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n;$$

$$(ii) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

第9讲 函数的极限

1. 聚点和孤立点

定义 1. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset,$$

称 x_0 是 A 的聚点。

Remarks. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) A 不一定有聚点;

(ii) 如果 A 有聚点, A 的聚点不一定属于 A ;

(iii) 如果 x_0 是 A 的聚点, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, $A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\})$ 为无限集。

例 1. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A = (a, b)$. 设 $x \in [a, b]$, 则 x 是 A 的聚点。

定义 2. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. 设 $x_0 \in A$. 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0\},$$

称 x_0 是 A 的孤立点。

Remarks. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) A 的孤立点是 A 中的点;

(ii) 设 $x_0 \in A$. 则 x_0 要么是 A 的聚点, 要么是 A 的孤立点。

例 2. 设 $A = [0, 1] \cup \{2\}$, 则 2 是 A 的孤立点。

我们可以用数列的极限刻画聚点。

命题 1. 设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 则 x_0 是 A 的聚点当且仅当存在 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, 使得 $x_n \rightarrow x_0$.

证明:

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow x_0$. 设 $\varepsilon > 0$. 因为 $x_n \rightarrow x_0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|x_N - x_0| < \varepsilon$, 又因为 $x_N \in A \setminus \{x_0\}$, 所以 $x_N \in A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\})$, 因此

$$A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

这就证明了 x_0 是 A 的聚点。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 x_0 是 A 的聚点。则对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A \cap ((x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

设

$$x_n \in A \cap ((x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \setminus \{x_0\}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, 并且

$$x_0 - 1/n \leq x_n \leq x_0 + 1/n, \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

因此由夹逼定理, $x_n \rightarrow x_0$. $\square$

2. 函数的极限的定义

定义 3. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbb{R}$. 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta,$$

称 a 是 f 在 x_0 点的极限。

Remarks.

(i) 我们注意, f 在 x_0 点不一定有定义, 即使 f 在 x_0 点有定义, a 是否是 f 在 x_0 点的极限也与 f 在 x_0 点的函数值没关系。我们之所以这样定义 f 在 x_0 点的极限, 是因为我们希望考察当自变量 x 趋于 x_0 时, 函数值 $f(x)$ 的变化趋势。

(ii) 在定义 3 中, $|f(x) - a|$ 表示函数值 $f(x)$ 与 a 的误差。 a 是 f 在 x_0 点的极限意味着:

当自变量 x 趋于 x_0 并且不等于 x_0 时, 函数值 $f(x)$ 与 a 越来越接近, 而且要多接近有多接近。

下面考虑函数极限的存在性和唯一性。

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点。如果存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 a 是 f 在 x_0 点的极限, 我们称 f 在 x_0 点有极限, 否则称 f 在 x_0 点没有极限。 f 在 x_0 点不一定有极限; 如果 f 在 x_0 点有极限, 极限必唯一。

例 3. 设

$$f(x) = x^a, \quad x \in (0, +\infty)$$

其中 $a > 0$ ，则 0 是 f 在 $x = 0$ 点的极限。

证明: 设 $\varepsilon > 0$ 。令 $\delta = \varepsilon^{1/a}$, 则

$$|f(x) - 0| = x^a < \varepsilon, \quad \forall x \in (0, \delta),$$

因此 0 是 f 在 $x = 0$ 点的极限。□

例 4. 设 $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

我们称 H 为 Heaviside 函数。 H 在 0 点没有极限。

证明：反证法。假设 a 是 H 在 0 点的极限。由定义存在 $\delta > 0$ ，使得

$$|H(x) - a| \leq \frac{1}{3}, \quad \forall 0 < |x| < \delta,$$

则

$$|H(\delta/2) - a| = |1 - a| \leq \frac{1}{3},$$

$$|H(-\delta/2) - a| = |a| \leq \frac{1}{3},$$

矛盾，因此假设不成立，所以 H 在 0 点没有极限。□

命题 2. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a, b \in \mathbb{R}$ 。如果 a, b 都是 f 在 x_0 点的极限, 则 $a = b$ 。

证明: 由定义, 存在 $\delta_1, \delta_2 > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_1,$$

$$|f(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 。因为 x_0 是 A 的聚点, 所以 $A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ 。设

$x_1 \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$, 则

$$|a - b| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_1) - b| \leq 2\varepsilon.$$

这样我们得到

$$|a - b| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

因此 $a = b$ 。□

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点。如果 f 在 x_0 点有极限, 我们用 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 表示 f

在 x_0 点的极限; 如果 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 我们也记

$$f(x) \rightarrow a, \quad \text{当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时.}$$

下面给出函数极限的两个常用的等价定义。

命题 3. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbb{R}$. 设 $C > 0$. 下列叙述是等价的:

(i) a 是 f 在 x_0 点的极限;

(ii) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - a| \leq C\varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

证明: 练习. $\square$

命题 4. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbb{R}$. 设 $\delta_0 > 0$. 下列叙述是等价的:

(i) a 是 f 在 x_0 点的极限;

(ii) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta < \delta_0$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

证明: 练习. $\square$

f 在 x_0 点的极限仅与 f 在 x_0 点的邻域内的函数值有关, 严格地说, 我们有如下结论。

命题 5. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbb{R}$ 。设 $\delta_0 > 0$ 。定义 $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中

$$B = A \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0),$$

$$g(x) = f(x), \quad x \in B,$$

则 x_0 是 B 的聚点, 并且 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 当且仅当 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。

Remark。我们又称 g 为 f 在 B 上的限制, 记为 $g = f|_B$ 。

命题 5 的证明: 设 $\varepsilon > 0$ 。令 $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \delta_0\}$, 则

$$B \cap ((x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon') \setminus \{x_0\}) = A \cap ((x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon') \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset,$$

又因为

$$B \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \supset B \cap ((x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon') \setminus \{x_0\}),$$

所以

$$B \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset,$$

因此 x_0 是 B 的聚点。由命题 4,

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \delta_0, \text{ 使得}$$

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \delta_0, \text{ 使得}$$

$$|g(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in B \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$$

$$\Leftrightarrow a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad \square$$

3.Heine 归结原理

我们可以用数列的极限刻画函数的极限。

命题 6. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbb{R}$, $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。如果 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow x_0$, 则 $f(x_n) \rightarrow a$ 。

Remark. 由命题 6, 我们可以利用函数的极限求数列的极限。例如, 设 $a > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} x^a = 0$;

又因为 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, 所以 $\frac{1}{n^a} \rightarrow 0$ 。

命题 6 的证明: 设 $\varepsilon > 0$ 。因为 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

因为 $x_n \rightarrow x_0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n \geq N,$$

则当 $n \geq N$ 时, $x_n \in A$, $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 因此

$$|f(x_n) - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

这就证明了 $f(x_n) \rightarrow a$ 。□

命题 7.(Heine 归结原理)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点。下列叙述是等价的:

(i) f 在 x_0 点有极限;

(ii) 如果 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow x_0$, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛。

Remark. Heine 归结原理告诉我们, 如果对于任意的趋于 x_0 且不等于 x_0 的点列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 都收敛, 则 f 在 x_0 点有极限。我们注意, 在(ii)中, 我们并没有假设对于不同的点列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 有相同的极限。

命题 7 的证明:

(i) $\Rightarrow$ (ii): 由命题 6 可得。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 因为 x_0 是 A 的聚点, 存在 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, 使得 $x_n \rightarrow x_0$ 。由 (ii), $\{f(x_n)\}$ 收敛。设 $f(x_n) \rightarrow a$ 。下面证明 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。

反证法。假设 a 不是 f 在 x_0 点的极限。则存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意的 $\delta > 0$, 存在 $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$, 使得 $|f(x) - a| \geq \varepsilon$ 。特别的, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $y_n \in A$, $0 < |y_n - x_0| < 1/n$, 使得 $|f(y_n) - a| \geq \varepsilon$ 。这样, 我们得到 $y_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, $y_n \rightarrow x_0$ 。由 (ii), $\{f(y_n)\}$ 收敛。设 $f(y_n) \rightarrow b$ 。因为

$$|f(y_n) - a| \geq \varepsilon, \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

所以 $b \neq a$ 。

定义

$$z_{2n-1} = x_n, \quad z_{2n} = y_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

则 $z_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$ 。因为 $z_{2n-1} \rightarrow x_0$, $z_{2n} \rightarrow x_0$, 所以 $z_n \rightarrow x_0$; 因为 $f(z_{2n-1}) \rightarrow a$, $f(z_{2n}) \rightarrow b$, 并且 $a \neq b$, 所以 $\{f(z_n)\}$ 不收敛, 这与 (ii) 矛盾, 因此假设不成立, 所以必有 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。□

由命题 6, 命题 7 立马可得如下推论。

推论 8. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbb{R}$ 。如果对于任意的 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow x_0$, 都有 $f(x_n) \rightarrow a$, 则 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。

证明: 由命题 7, f 在 x_0 点有极限。设 $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。因为 x_0 是 A 的聚点, 存在 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, 使得 $x_n \rightarrow x_0$ 。由假设, $f(x_n) \rightarrow a$ 。因为 $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 由命题 6, $f(x_n) \rightarrow b$, 所以 $a = b$, 即 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。□

4. 函数的极限的性质

定义 4. 设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ 。如果存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in B,$$

称 f 在 B 上有界。

命题 9.(局部有界性)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点。如果 f 在 x_0 点有极限, 则存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界。

证明: 记 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。则存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - a| \leq 1, \quad \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}),$$

则

$$|f(x)| \leq |a| + 1, \quad \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}).$$

令

$$M = \begin{cases} |a| + 1, & x_0 \notin A, \\ |a| + |f(x_0)| + 1, & x_0 \in A, \end{cases}$$

则

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

这就证明了 f 在 $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界。□

命题 10. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

(i) 如果 $a < b$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) < b, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta;$$

(ii) 如果 $a > b$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) > b, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta;$$

(iii) 如果 $a \neq 0$, $0 < r < |a|$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x)| > r, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

证明:

(i) 因为 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \frac{b-a}{2}, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta,$$

则

$$f(x) < b, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

(ii) 因为 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \frac{a-b}{2}, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta,$$

则

$$f(x) > b, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

(iii) 因为 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < |a| - r, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta,$$

则

$$|f(x)| > r, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta. \quad \square$$

命题 11.(夹逼定理)

设 $f, g, h: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a \in \mathbb{R}$, $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ 。如果存

在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_0,$$

则 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。

证明: 设 $\varepsilon > 0$ 。因为 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, 存在 $\delta_1, \delta_2 > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_1,$$

$$|h(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

令 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, 则

$$|g(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta,$$

因此 $a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。□

命题 12.(不等式取极限)

设 $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。如

果存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_0,$$

则 $a \leq b$ 。

Remark. 在命题 12 中, 我们要注意, 如果存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$f(x) < g(x), \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_0,$$

我们也只能得到 $a \leq b$, 严格的不等式 $a < b$ 不一定成立。例如, 设

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0,$$

$$g(x) = 2\sqrt{x}, \quad x > 0,$$

则

$$f(x) < g(x), \quad \forall x > 0,$$

但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 。

命题 12 的证明: 设 $\varepsilon > 0$ 。则存在 $\delta_1, \delta_2 > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_1,$$

$$|g(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

令 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ 。因为 x_0 是 A 的聚点, 所以 $A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ 。设

$x_1 \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$, 则

$$a - b = f(x_1) - f(x_2) + (a - f(x_1)) - (b - f(x_2)) \leq 2\varepsilon.$$

这样我们就证明了

$$a - b \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

因此 $a - b \leq 0$, 即 $a \leq b$ 。□

下面是一个常用的推论。

推论 13. (不等式取极限)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。

(i) 如果存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$f(x) \leq b, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_0,$$

则 $a \leq b$;

(ii) 如果存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$f(x) \geq b, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_0,$$

则 $a \geq b$ 。

命题 14.(四则运算)

设 $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点, $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。设

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。则

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b;$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab;$$

(iii) 如果

$$b \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \forall x \in A,$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}。$$

证明:

(i) 方法 1. 设 $\varepsilon > 0$. 则存在 $\delta_1, \delta_2 > 0$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_1,$$

$$|g(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} |(af(x) + \beta g(x)) - (aa + \beta b)| &\leq |a| |f(x) - a| + |\beta| |g(x) - b| \\ &\leq (|a| + |\beta| + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} (af(x) + \beta g(x)) = aa + \beta b$.

方法 2. 设 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow x_0$, 则 $f(x_n) \rightarrow a$, $g(x_n) \rightarrow b$, 因此由数列

极限的四则运算 $af(x_n) + \beta g(x_n) \rightarrow aa + \beta b$, 所以, 由 Heine 归结原理,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (af(x) + \beta g(x)) = aa + \beta b.$$

(ii), (iii) 可类似证明。□

5. Cauchy 收敛原理

下面给出函数极限的 Cauchy 收敛原理。

定理 15. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点。则 f 在 x_0 点有极限当且仅当: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}).$$

证明：必要性是显然的。下面证明充分性。设 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow x_0$ 。下面

证明 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列。设 $\varepsilon > 0$ 。则存在 $\delta > 0$ ，使得

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}).$$

因为 $x_n \rightarrow x_0$ ，存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n \geq N.$$

则当 $n \geq N$ 时， $x_n \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$ ，因此

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N,$$

这就证明了 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列。由数列极限的 Cauchy 收敛原理， $\{f(x_n)\}$ 收敛。因此，

由 Heine 归结原理， f 在 x_0 点有极限。□

6. 函数在无穷远点的极限

下面我们定义函数在正无穷远点的极限。

定义 5. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $M \in \mathbb{R}$, $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$. 设 $a \in \mathbb{R}$.

如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, x > M,$$

我们称 a 是 f 在正无穷远点的极限。

Remark. 我们也称 $(M, +\infty)$ 为正无穷远点的邻域。

如果存在 $a \in \mathbb{R}$ ，使得 a 是 f 在正无穷远点的极限，我们称 f 在正无穷远点有极限。下面考查 f 在正无穷远点极限的存在唯一性。 f 在正无穷远点不一定有极限；如果 f 在正无穷远点有极限，极限必唯一。

例 5. 设 $a > 0$ ， $f(x) = \frac{1}{x^a}$ ， $x \in (0, +\infty)$ 。则 0 是 f 在正无穷远点的极限。

证明: 设 $\varepsilon > 0$ 。令 $M = 1/\varepsilon^{1/a}$, 则

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x^a} < \varepsilon, \quad \forall x > M,$$

这就证明了 0 是 f 在正无穷远点的极限。□

例 6. 设 $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ 。 f 在正无穷远点无极限。

证明：反证法。假设 $a \in \mathbb{R}$ 是 f 在正无穷远点的极限，则存在 $M \in \mathbb{R}$ ，使得

$$|f(x) - a| < 1/2, \quad \forall x > M.$$

设 $N = [M] + 1$ ，则

$$2 = |f(2N\pi) - f((2N+1)\pi)| \leq |f(2N\pi) - a| + |f((2N+1)\pi) - a| < 1,$$

矛盾。因此假设不成立，所以 f 在正无穷远点无极限。□

如果 f 在正无穷远点有极限，极限必唯一。

命题 16. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $M \in \mathbb{R}$, $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$ 。设 $a, b \in \mathbb{R}$ 都是 f 在正无穷远点的极限, 则 $a = b$ 。

证明: 设 $\varepsilon > 0$, 则存在 $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$, 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x > M_1,$$

$$|f(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x > M_2.$$

令 $M = \max\{M_1, M_2\}$, 则 $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$ 。设 $x_1 \in A \cap (M, +\infty)$, 则

$$|a - b| \leq |a - f(x_1)| + |b - f(x_1)| \leq 2\varepsilon.$$

这样我们就证明了

$$|a - b| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

因此 $a - b = 0$, 即 $a = b$ 。□

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $M \in \mathbb{R}$, $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$ 。如果 f 在正无穷远点有极限, 我们用 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 表示 f 在正无穷远点的极限; 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, 我们也称当 x 趋于正无穷时, $f(x)$ 趋于 a , 记为

$$f(x) \rightarrow a, \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时。}$$

类似地，我们可以定义函数在负无穷远点的极限。

定义 6. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，其中 A 满足：对于任意 $m \in \mathbb{R}$ ， $A \cap (-\infty, m) \neq \emptyset$ 。设 $a \in \mathbb{R}$ 。

如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $m \in \mathbb{R}$ ，使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, x < m,$$

我们称 a 是 f 在负无穷远点的极限。

Remark. 我们也称 $(-\infty, m)$ 为负无穷远点的邻域。

如果存在 $a \in \mathbb{R}$ ，使得 a 是 f 在负无穷远点的极限，我们称 f 在负无穷远点有极限。下面考查 f 在负无穷远点极限的存在唯一性。 f 在负无穷远点不一定有极限；如果 f 在负无穷远点有极限，极限必唯一。

例 7. 设 $f(x) = e^x$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，则 0 是 f 在负无穷远点的极限。

证明：设 $\varepsilon > 0$ 。令 $m = \ln \varepsilon$ ，则

$$|f(x) - 0| = e^x < \varepsilon, \quad \forall x < m,$$

这就证明了 0 是 f 在负无穷远点的极限。□

例 8. 设 $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ 。则 f 在负无穷远点无极限。

证明：反证法。假设 $a \in \mathbb{R}$ 是 f 在负无穷远点的极限。设 $\varepsilon > 0$ ，则存在 $m \in \mathbb{R}$ ，使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x < m.$$

令 $M = -m$ ，则当 $x > M$ 时， $-x < m$ ，因此

$$|f(x) - a| = |f(-x) - a| < \varepsilon,$$

所以 a 是 f 在正无穷远点的极限，这与 f 在正无穷远点无极限矛盾，因此假设不成立，所

以 f 在负无穷远点无极限。□

命题 17. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $m \in \mathbb{R}$, $A \cap (-\infty, m) \neq \emptyset$ 。如果 $a, b \in \mathbb{R}$ 都是 f 在负无穷远点的极限, 则 $a = b$ 。

证明: 练习。□

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $m \in \mathbb{R}$, $A \cap (-\infty, m) \neq \emptyset$ 。如果 f 在负无穷远点有极限, 我们用 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 表示 f 在负无穷远点的极限; 如果 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$, 我们也称当 x 趋于负无穷时, $f(x)$ 趋于 a , 记为

$$f(x) \rightarrow a, \quad \text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时。}$$

正无穷远点的极限和负无穷远点的极限可以互相转换。

命题 18. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $m \in \mathbb{R}$, $A \cap (-\infty, m) \neq \emptyset$ 。定义

$g: -A \rightarrow \mathbb{R}$, 其中

$$-A = \{-x; x \in A\},$$

$$g(x) = f(-x), \quad x \in -A.$$

设 $a \in \mathbb{R}$ 。则

(i) 对于任意 $M \in \mathbb{R}$, $(-A) \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a$ 。

证明: 练习。□

命题 3~15 可以毫无困难的推广到函数在无穷远点的极限，在这里我们不再赘述。

7. 函数趋于无穷大

类似于数列趋于无穷大，我们也可以定义一个函数趋于无穷大。

定义 7. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点。如果对于任意的 $M > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) > M, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta,$$

我们称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 趋于正无穷, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ 。

定义 8. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点。如果对于任意的 $m < 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) < m, \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta,$$

我们称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 趋于负无穷, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ 。

Remark. 如果当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 趋于正无穷或负无穷, 则 f 在 x_0 点的任意邻域内无界, 因此 f 在 x_0 点无极限。

例 9. 设 $a > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^a}$, $x \in (0, +\infty)$ 。则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ 。

证明：设 $M > 0$ 。因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得

$$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M}, \quad \forall 0 < x < \delta,$$

则

$$f(x) > M, \quad \forall 0 < x < \delta,$$

这就证明了 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ 。□

我们也可以定义一个函数在无穷远点趋于无穷大。

定义 9. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $M \in \mathbb{R}$, $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$ 。如果对于任意 $M_1 > 0$, 存在 $M_2 \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) > M_1, \quad \forall x \in A, x > M_2,$$

我们称当 x 趋于正无穷时, $f(x)$ 趋于正无穷, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。

定义 10. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $M \in \mathbb{R}$, $A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset$ 。如果对于任意 $m < 0$, 存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) < m, \quad \forall x \in A, x > M,$$

我们称当 x 趋于正无穷时, $f(x)$ 趋于负无穷, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 。

Remark. 如果 f 在正无穷远点趋于正无穷或负无穷, 则 f 在正无穷远点的任何邻域内无界, 所以 f 在正无穷远点无极限。

例 10. 设 $a > 0$, $f(x) = x^a$, $x \in (0, +\infty)$ 。则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。

证明：设 $M_1 > 0$ 。令 $M_2 = M_1^{1/a}$ 。则

$$f(x) > M_1, \quad \forall x > M_2.$$

这就证明了 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。□

我们可以类似的定义一个函数在负无穷远点趋于正无穷或负无穷。

定义 11. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $m \in \mathbb{R}$, $A \cap (-\infty, m) \neq \emptyset$ 。如果对于任意 $M > 0$, 存在 $m \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) > M, \quad \forall x \in A, x < m,$$

我们称当 x 趋于负无穷时, $f(x)$ 趋于正无穷, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ 。

定义 12. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 A 满足: 对于任意 $m \in \mathbb{R}$, $A \cap (-\infty, m) \neq \emptyset$ 。如果对于任意 $m_1 < 0$, 存在 $m_2 \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) < m_1, \quad \forall x \in A, x < m_2,$$

我们称当 x 趋于负无穷时, $f(x)$ 趋于负无穷, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 。

Remark. 同样, 如果 f 在负无穷远点趋于正无穷或负无穷, 则 f 在负无穷远点的任何邻域内无界, 所以 f 在负无穷远点无极限。