数学I期末练习题

1 选择与填空题

1. 设函数f的定义域为$(0,1)$, $c\in(0,\frac{1}{2})$. 求$g(x)=f(x+c)+f(x-c)$的定义域.

解. 即要求$x+c, x-c\in(0,1)$, 得到$g(x)$的定义域为$(c,1-c)$. $\square$

2. 求$y=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x,\ x\in[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$的反函数.

解. 变形, 得:$y=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
容易解得$y^{-1}=\frac{\arccos(x-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}+\frac{\pi}{12}$. $\square$

3. 判断下列函数是否为凸函数： (i)2^x (ii)$\log_2 x$ (iii)$\sin x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$ (iv)$x^{\frac{1}{3}}$.

解. 显然, 仅(i)为凸函数, 其余均为凹函数. $\square$

4. 关于特征函数的叙述, 下列选项错误的是:
(A)$\chi_A\le\chi_B\Leftrightarrow A\subseteq B$.
(B)$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A\cdot\chi_B=0$.
(C)$\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$.
(D)$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$.

解. (D),$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B$. $\square$

5. 在$\triangle ABC$中, 已知$a+c=3b$, 试求$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$的值.

解. 根据Helen公式的推论：$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$
得到$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\frac{p-b}{p}=\frac{a+c-b}{a+c+b}=\frac{1}{2}$. $\square$

6. 判断下列函数是否有界:(i)$f(x)=\dfrac{\sin x+2}{\cos x-3}$; (ii)$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

解. (i)由于$\sin x,\cos x\in(-1,1)$, 显然$f(x)$有界.
(ii)该函数单调递增, 且为奇函数. 且有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.故函数有界. □

7. 设$R=\{(1,2),(2,3),(4,2)\},S=\{(4,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$为$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的关系,
求$R\circ S,S\circ R$.

解. 由复合关系的定义, 得到：
$R\circ S=\{(4,2),(2,3),(3,2)\}$;
$S\circ R=\{(1,2),(2,1),(4,2)\}$. □

8. 求$f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$的反函数.

解. 设$a=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}},b=\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$. 容易得到：$ab=-1$.
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$.
可以得到：$f^{-1}(x)=\dfrac{x^3+3x}{2}$. □

9. $f(x)=\log_a(4x+\dfrac{a}{x}),x\in[1,2]$. 试求$a$的范围, 使得$f(x)$单调递增.

解. $(1,4]$, 分类讨论即可. □

10. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为奇函数. $f(x)=x^2,x\in(0,+\infty)$. 若$f(x+a)\geq 2f(x),\forall x\in[a,a+2]$.
求a的取值范围.

解. 变形得到$f(x+a)\geq f(\sqrt{2}x)$, 由于$f(x)$单调递增, 可得$x+a\geq\sqrt{2}x$. 即$a\geq(\sqrt{2}-1)x$.
当$x=a+2$, 求得a的范围为: $a\geq\sqrt{2}$. □

11. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(2-x)=f(x+2),\forall x\in\mathbb{R}$. 如果$f$有7个零点, 求这些零点之和.

解. 由对称性, 容易得到零点和$s=7\times 2=14$. □

12. 设$a>b>0$,求$a+\dfrac{1}{b(a-b)}$的最小值.

解. $a+\dfrac{1}{b(a-b)}=(a-b)+b+\dfrac{1}{b(a-b)}$. 由AM-GM不等式,最小值为3. □

13. 设$a, b \geq 0, a+b=1$, 求a^4+b^4的取值范围.

解. 由幂平均不等式得到下界为$\frac{1}{8}$, 而由$a^4+b^4<(a+b)^4$得上界为1. 故本题答案为$[\frac{1}{8}, 1]$. □

14. (与考试原题系数不同, 解法一致)求$\frac{5}{4\cos^2\theta+1}+\frac{4}{5\sin^2\theta+2}$的最小值.

解. 由Schwarz不等式,$\frac{5}{4\cos^2\theta+1}+\frac{4}{5\sin^2\theta+2} \geq \frac{(\frac{5}{2}+2)^2}{5+\frac{5}{4}+2}=\frac{27}{11}$. □

15. 设$a \in \mathbb{R}$. 已知$x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 且

$$\begin{cases} x^3+\sin x-2a=0, \\ 4y^3+\frac{1}{2}\sin 2y+a=0. \end{cases}$$

求$\cos(x+2y)$.

解. 设函数$f(t)=t^3+\sin t$, 则$f(x)=2a, f(2y)=2(4y^3+\sin y\cos y)=-2a$. 由于$f(t)$为奇函数, 且严格单调递增, 得到: $x=-2y$. 则$\cos(x+2y)=1$. □

16. 求$f(x)=\frac{x-x^3}{(1+x^2)^2}$的值域.

解. 令$x=\tan\theta$, 则$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{4}\sin 4\theta$. 易得值域为$[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. □

17. 求$f(x)=\sin x\sin 2x$的值域.

解. 变形, 得到$f(x)=2\sin^2 x\cos x=2(\cos x-\cos^3 x)$. 容易得到其极值点在$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$处. 观察到$f(x)$为奇函数, 则这两个极值点分别为极大值与极小值的原像. 代入求得函数值域为$[-\frac{8\sqrt{3}}{9}, \frac{8\sqrt{3}}{9}]$. □

2 解答题

1. 已知$\sin A+\sin B=\sin C,\ \cos A+\cos B=\cos C$, 求$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$.

解. 将上述两式做平方和,平方差,得

$$\cos(A-B)=-\frac{1}{2}, \cos(A+B)=\cos 2C.$$

因此 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$
$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$
$=\frac{3}{2}-\cos(A-B)\cos(A+B)-\frac{1}{2}\cos 2C$
$=\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2}\cos 2C)-\frac{1}{2}\cos 2C$
$=\frac{3}{2}.$ □

2. 叙述**等价类**的定义. 若E是X上的等价关系, $x,y\in X$,
试证明:$[x]_E=[y]_E\Leftrightarrow xEy$.

证明. **等价类**:记$[x]_E:=\{y\in X;yEx\}$为E的一个等价类.
充分性:设$t\in[x]_E$, 易得$t\in[y]_E$. 则xEt, tEy, 则xEy.
必要性:$\forall t\in[x]_E$, 有tEx. 又xEy, 则tEy. 得到$[x]_E\subseteq[y]_E$.
同理, $[y]_E\subseteq[x]_E$. 则$[x]_E=[y]_E$. □

3. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为凸函数, $x\in[a,b]$. 试证明:$f(x)\leq\max\{f(a),f(b)\}$.

证明. 设$\lambda,\mu\in[0,1],\lambda+\mu=1$. 由Jensen不等式, 容易得到:
$f(x)=f(\lambda a+\mu b)\leq\lambda f(a)+\mu f(b)\leq\max\{f(a),f(b)\},\forall x\in[a,b]$. □