2024-2025 数学 I 解答

少年班 2302 张杰铭

2025.1.7

1 填空题 ($4 \times 10 = 40$)

1 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，求 $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ 的最小值. (1)

解

$$\begin{aligned}\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \\ &= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} - 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

这是一个关于 $\sin\alpha\cos\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上的减函数.
由于 $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \leq \frac{1}{2}$，在 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 处取到等号，则 $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ 的最小值是 1.

2 设 x, y, z 均为正数，且 $x + y + z = 1$，求 $f(x, y, z) = xy^2z^3$ 的最大值. ($\frac{1}{432}$)

解 由 AM-GM 不等式

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= xy^2z^3 \\ &= 108 \cdot [x \cdot (\frac{y}{2}) \cdot (\frac{y}{2}) \cdot (\frac{z}{3}) \cdot (\frac{z}{3}) \cdot (\frac{z}{3})] \\ &\leq 108 \cdot (\frac{x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3}}{6})^6 \\ &= \frac{1}{432}\end{aligned}$$

当且仅当 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$，即

$$x = \frac{1}{6},\ y = \frac{1}{3},\ z = \frac{1}{2}$$

时取到等号.

3 $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}, \tan(\alpha + \beta) = \frac{24}{7}$，求 $\cos\alpha + \cos\beta$. ($-\frac{3}{16}$ 或 $\frac{1}{3}$)

解 设 $\cos\alpha + \cos\beta = a$. 和差化积得到：

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=a$$

两式相除，得到

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{4a}$$

而

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{24}{7}$$

解之得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{4}{3},\frac{3}{4}$，进而 $\cos\alpha+\cos\beta=a=-\frac{3}{16},\frac{1}{3}$.

4 求值：$9\tan 10^\circ+2\tan 20^\circ+4\tan 40^\circ-\tan 80^\circ$.（0）

解 由 $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$，得

$$\tan x-\cot x=-\cot 2x$$

于是

$$\tan 10^\circ-\tan 80^\circ=-2\cot 20^\circ$$

$$\tan 20^\circ-\cot 20^\circ=-2\cot 40^\circ$$

$$\tan 40^\circ-\cot 40^\circ=-2\cot 80^\circ$$

依次代入原式，得到 $9\tan 10^\circ+2\tan 20^\circ+4\tan 40^\circ-\tan 80^\circ=0$.

5 设 $X=\{1,2,3,4\}$，若 $H=\{(x,y)|\frac{x-y}{2}\in Z,x,y\in X\}$，
$S=\{(x,y)|\frac{x-y}{3}\in Z^+,x,y\in X\}$，求 $H\cap S$.（$\emptyset$）

解 依题意得：

$$H=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$$

$$S=\{(4,1)\}$$

故

$$H\cap S=\emptyset$$

6 设 f，g，$g\circ f$ 为映射，判断真假：“若 f，g 均为满射，则 $g\circ f$ 为满射”.
（真）

解 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，则：

$$\forall\ z\in Z,\exists\ y\in Y(g(y)=z),\exists\ x\in X(f(x)=y)$$

即

$$\forall\ z\in Z,\exists\ x\in X(\exists\ y\in Y((x,y)\in f\wedge(y,z)\in g))$$

即

$$\forall\ z \in Z, \exists\ x \in X((x,z) \in g \circ f)$$

即 $g \circ f$ 为满射. 原命题为真命题.

7 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 3 为周期的奇函数，且 $f(2)=0$，求 $f(x)$ 在 $(-6,6)$ 内零点个数的最小值. (11)

解 由于 3 是 $f(x)$ 的一个周期，则

$$f(-4)=f(-1)=f(2)=f(5)=0$$

由于 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$，由周期性

$$f(-3)=f(0)=f(3)$$

又因为 $f(-2)=-f(2)=0$，由周期性

$$f(-5)=f(-2)=f(1)=f(4)=0$$

显然，恰当的选取 $f(x)$，可以使得 x 不为整数时 $f(x)\neq 0$. 于是 $f(x)$ 在 $(-6,6)$ 内零点个数的最小值为 11.

8 $f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，则求 $f(-5)+f(-4)+...+f(0)+f(1)+...+f(6)$. $(3\sqrt{2})$

解 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：

$$f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}+\frac{1}{2^{1-x}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2^{x-\frac{1}{2}}+1}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}-x}+1})=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+2^{x-\frac{1}{2}}}{2^{x-\frac{1}{2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

于是

$$f(-5)+f(-4)+...+f(0)+f(1)+...+f(6)=6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

9 设 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=1$，求 $a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}$ 的最大值. $(\frac{1}{9})$

解

$$\begin{aligned}a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}&=(abc)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}-a}b^{\frac{2}{3}-b}c^{\frac{2}{3}-c}\\&\leq\frac{a+b+c}{3}\cdot[(\frac{2}{3}-a)a+(\frac{2}{3}-b)b+(\frac{2}{3}-c)c]\\&\leq\frac{a+b+c}{3}\cdot(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9})\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

10　实数 a,b,c,d 满足：$a+b+c+d=3, a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$，求 a 的取值范围. ([1,2])

解　由题意得

$$b+c+d=3-a$$

$$2b^2+3c^2+6d^2=5-a^2$$

由 Cauchy 不等式

$$(2b^2+3c^2+6d^2)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\geq(b+c+d)^2$$

即

$$(5-a^2)\geq(3-a)^2$$

解得 $a\in[1,2]$.

2　解答题 $(12\times 5=60)$

11　设集合 A 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，$f,g:A\to\mathbb{R}$ 有界. 记 $h:A\to\mathbb{R}$, $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$. 证明：h 有界，且 $\inf h=\min\{\inf f,\inf g\}$.

证明　先证 h 有界. 由于 f，g 有界，则存在 m_1,M_1,m_2,M_2，使得

$$m_1\leq f(x)\leq M_1$$

$$m_2\leq g(x)\leq M_2$$

由于 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，则 $h(x)=f(x)$ 或 $h(x)=g(x)$. 于是

$$\begin{cases} h(x)\geq m_1\vee h(x)\geq m_2 \\ h(x)\leq M_1\vee h(x)\leq M_2 \end{cases}$$

所以得到

$$\min\{m_1,m_2\}\leq h(x)\leq\max\{M_1,M_2\}$$

即 h 有界.

再证 $\inf h=\min\{\inf f,\inf g\}$，用下确界的定义证明.

(i)$\forall\ x\in A$，$h(x)\geq\min\{\inf f,\inf g\}$. 事实上，由于

$$\forall\ x\in A, f(x)\geq\inf f$$

$$\forall\ x\in A, g(x)\geq\inf g$$

我们可得 $h(x)\geq\inf f\vee h(x)\geq\inf g$，即

$$\forall\ x\in A, h(x)\geq\min\{\inf f,\inf g\}$$

(ii)$\forall\ \epsilon > 0, \exists x_0 \in A, s.t. h(x_0) < \min\{\inf f, \inf g\} + \epsilon$. 不失一般性，设 $\inf f \le \inf g$. 则

$$\exists x_0 \in A, s.t. f(x_0) < \inf f + \epsilon$$

于是 $h(x_0) \le f(x_0) < \inf f + \epsilon = \min\{\inf f, \inf g\} + \epsilon$.
由 (i)(ii) 可知，$\min\{\inf f, \inf g\}$ 是 h 的下确界. $\square$

12 (1) 设 $x \in [-1, 1]$，求 $\arcsin x + \arccos x$.
(2) 设 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \ge 0$，求 f 的值域及其反函数.
解 (1) 设 $\alpha = \arcsin x, \beta = \arccos x$. 则有

$$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \beta \in [0, \pi]$$

由 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 得

$$\cos\alpha = \sin\beta = \sqrt{1 - x^2}$$

于是 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = 1$. 由于 $\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$:

$$\arcsin x + \arccos x = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

(2) 由于 $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}})^2 + 1 \ge 1$，可知 f 的值域是 $[1, +\infty)$ 的子集. 以下证明 f 的值域就是 $[1, +\infty)$，即

$$\forall\ y \in [1, +\infty), \exists x \ge 0 (f(x) = y)$$

考虑方程 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} (x \ge 0, y \ge 1)$. 整理得

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

这是一个关于 e^x 的二次方程，y 的范围保证了判别式非负. 解之得

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

由于 $x \ge 0$，则 $e^x \ge 1$，则舍去 $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$，得到 $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$. 即:

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

这表明，$\forall\ y \in [1, +\infty), \exists x \ge 0 (f(x) = y)$，即 f 的值域是 $[1, +\infty)$.
从上述过程也可以看出，f 的反函数为:

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \ge 1)$$

13 求 $f(x) = \cos 4x + 6\cos 3x + 17\cos 2x + 30\cos x$ 的最大值与最小值.

解　由于

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

可将 $f(x)$ 整理为关于 $\cos x$ 的多项式：

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 4x + 6\cos 3x + 17\cos 2x + 30\cos x \\ &= (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) + 6(4\cos^3 x - 3\cos x) + 17(2\cos^2 x - 1) + 30\cos x \\ &= 8\cos^4 x + 24\cos^3 x + 26\cos^2 x + 12\cos x - 16 \end{aligned}$$

进一步观察可以注意到：

$$f(x) = 2(2\cos^2 x + 3\cos x + 1)^2 - 18$$

由于 $|2\cos^2 x + 3\cos x + 1| \leq 6$，且当 $\cos x = 1$ 时，$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 6$，则此时 $f(x)$ 取最大值：54；
当 $\cos x = -1$ 或 $-\frac{1}{2}$ 时，$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$，此时 $f(x)$ 取最小值：-18.

14　设 $q_i > 0$，$i = 1, 2, ..., n$，$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$，$a_i > 0$，$i = 1, 2, ..., n$. 记 $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$，对 $r \geq 0$，定义

$$m_r(\mathbf{a}) = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n q_i a_i^r)^{\frac{1}{r}}, & r > 0 \\ a_1^{q_1} a_2^{q_2} ... a_n^{q_n}, & r = 0 \end{cases}$$

证明：$\forall\ 0 \leq r \leq s, m_r(\mathbf{a}) \leq m_s(\mathbf{a})$.
证明　当 $r = s$ 时，显然有 $m_r(\mathbf{a}) = m_s(\mathbf{a})$. 我们只需证明：

$$(i)\quad \forall\ 0 < r < s, m_r(\mathbf{a}) \leq m_s(\mathbf{a});$$

$$(ii)\quad \forall\ r > 0, m_r(\mathbf{a}) > m_0(\mathbf{a}).$$

(i) 由 Hölder 不等式：

$$(\sum_{i=1}^n q_i)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} (\sum_{i=1}^n q_i a_i^s)^{\frac{1}{s}} \geq (\sum_{i=1}^n q_i^{\frac{s-r}{s}} (q_i a_i^s)^{\frac{r}{s}})^{\frac{1}{r}}$$

整理即得

$$(\sum_{i=1}^n q_i a_i^s)^{\frac{1}{s}} \geq (\sum_{i=1}^n q_i a_i^r)^{\frac{1}{r}}$$

(ii) 对 $a_1^r, a_2^r, ..., a_n^r$ 用加权均值不等式：

$$\sum_{i=1}^n q_i a_i^r \geq (a_1^r)^{q_1} (a_2^r)^{q_2} ... (a_n^r)^{q_n}$$

即

$$(\sum_{i=1}^n q_i a_i^r)^{\frac{1}{r}} \geq a_1^{q_1} a_2^{q_2} ... a_n^{q_n}$$

由 (i)(ii) 可知，$\forall\ 0 \leq r \leq s, m_r(\mathbf{a}) \leq m_s(\mathbf{a})$. $\square$

15 对于 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，若存在 $L\in\mathbb{R}$，使得

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$$

则称 f Lipschitz 连续. 设集合 A 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，$d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$d(x) = \inf\{|x-y| : y\in A\}$$

求证 d Lipschitz 连续.

注 在此感谢数试 2401 武煜尧提供的解答.

证明 我们先给出这样一个引理:

设 $f:I\to\mathbb{R}$，$y\in\mathbb{R}$，集合 A 是 I 的非空子集. 如果

$$f(x) \geq y\ (\forall\ x\in A)$$

那么

$$\inf_{x\in A} f(x) \geq y.$$

引理的证明：用反证法. 假设 $\inf_{x\in A} f(x) < y$，则由下确界的定义：

$$\exists x_0 \in A,\ f(x_0) < y$$

这与 $f(x) \geq y\ (\forall\ x\in A)$ 矛盾！于是引理得证.

回到原题. $\forall\ x,z\in\mathbb{R}, y\in A$：

$$\inf_{y\in A} |x-y| \leq |x-y| \leq |z-y| + |x-z|$$

由引理:

$$\inf_{y\in A} |x-y| \leq \inf_{y\in A} |z-y| + |x-z|$$

即

$$d(x) - d(z) \leq |x-z|$$

同理可得 $d(z)-d(x) \leq |z-x| = |x-z|$，于是 $\exists L=1$，

$|d(x)-d(y)| \leq L|x-y|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

这就是说，d Lipschitz 连续. $\square$