2024-2025 数学 I

整理：少年班 2302 张杰铭

2025.1.7

1 填空题 $(4 \times 10 = 40)$

1 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，求 $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ 的最小值.

2 设 x, y, z 均为正数，且 $x + y + z = 1$，求 $f(x, y, z) = xy^2z^3$ 的最大值.

3 $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}, \tan(\alpha + \beta) = \frac{24}{7}$，求 $\cos\alpha + \cos\beta$.

4 求值：$9\tan 10° + 2\tan 20° + 4\tan 40° - \tan 80°$.

5 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$，若 $H = \{(x, y) | \frac{x-y}{2} \in Z, x, y \in X\}$，
$S = \{(x, y) | \frac{x-y}{3} \in Z^+, x, y \in X\}$，求 $H \cap S$.

6 设 f，g，$g \circ f$ 为映射，判断真假："若 f，g 均为满射，则 $g \circ f$ 为满射".

7 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 3 为周期的奇函数，且 $f(2) = 0$，求 $f(x)$ 在 $(-6, 6)$ 内零点个数的最小值.

8 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$，则求 $f(-5) + f(-4) + ... + f(0) + f(1) + ... + f(6)$.

9 设 a, b, c 均为正数，且 $a + b + c = 1$，求 $a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}$ 的最大值.

10 实数 a, b, c, d 满足：$a + b + c + d = 3, a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 6d^2 = 5$，求 a 的取值范围.

2 解答题 $(12 \times 5 = 60)$

11 设集合 A 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集，$f, g : A \to \mathbb{R}$ 有界. 记 $h : A \to \mathbb{R}$，
$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. 证明：$h$ 有界，且 $\inf h = \min\{\inf f, \inf g\}$.

12 (1) 设 $x \in [-1, 1]$，求 $\arcsin x + \arccos x$.
(2) 设 $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, x \geq 0$，求 f 的值域及其反函数.

13 求 $f(x)=\cos 4x+6\cos 3x+17\cos 2x+30\cos x$ 的最大值与最小值.

14 设 $q_i>0$, $i=1,2,...,n$, $q_1+q_2+...+q_n=1$, $a_i>0$, $i=1,2,...,n$. 记 $\mathbf{a}=(a_1,...,a_n)$, 对 $r\geq 0$, 定义

$$m_r(\mathbf{a})=\begin{cases}(\sum_{i=1}^n q_i a_i^r)^{\frac{1}{r}},\ r>0\\ a_1^{q_1}a_2^{q_2}...a_n^{q_n},\ r=0\end{cases}$$

证明: $\forall\ 0\leq r\leq s, m_r(\mathbf{a})\leq m_s(\mathbf{a})$.

15 对于 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 若存在 $L\in\mathbb{R}$, 使得

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$$

则称 f Lipschitz 连续. 设集合 A 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$d(x)=\inf\{|x-y|:y\in A\}$$

求证 d Lipschitz 连续.