



西安交通大学

中国 西安 710049

Xi'an Jiaotong University
Xi'an 710049, P.R. China

一. 导数.

1. 定义: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. 当 f 在 x_0 的某个邻域内有定义.

2. 计算: $c' = 0$. $(e^x)' = e^x$. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. $(\sin x)' = \cos x$. $(\cos x)' = -\sin x$.
 $(x^a)' = ax^{a-1}$

3. 性质: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$. $(fg)' = f'g + fg'$. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ($g \neq 0$).

从而 $(a^x)' = (e^{\ln a \cdot x})' = \ln a \cdot a^x$. 复合: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

反函数: $y = f(x)$. $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

①. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

②. $(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

③. $a^x = e^{x \ln a}$. $(a^x)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$.

④. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



4. 导数与极限. (Pf. 反证 + Lagrange 中值定理).

①. $f' = 0 \Rightarrow f \equiv c$. ②. $f' > 0$, f 在有限个点上成立.

则有 f 严格单调增加.

5. 应用: (6.27, 作业) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln(n+1)$.



二. 不等式.

1. n 维欧氏空间和内积.

$$\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n\}.$$

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n). \quad dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n). \quad 0 = (0, 0, \dots, 0).$$

~~模~~ 范: $\exists \alpha, \beta$ 不全为 0, $\alpha x + \beta y = 0$. 有一个 0. $x \parallel y$.

内积: $x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. $x \cdot x \geq 0$ (当且仅当 $x=0$ 时取等).

$$x \cdot y = y \cdot x. \quad (\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha x \cdot z + \beta y \cdot z$$

模: $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (2 范数)

2. ~~三~~ 不等式.

三角不等式: $|x+y| \leq |x| + |y|$. pf. $|x+y|^2 = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$.
 Cauchy 不等式: $|x \cdot y| \leq |x||y|$. 当且仅当 $x \parallel y$.

$$|tx+y|^2 = |x|^2 t^2 + 2x \cdot y t + |y|^2. \quad \Delta = 4[(x \cdot y)^2 - |x|^2 |y|^2] \leq 0.$$

(x=0, 或 y=0, 或 x, y 不共线)

" $\leq$ " 或 " $=$ ": 显见.

均值不等式 (AM-GM 不等式): $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Jensen. $\Rightarrow$ 加权均值 $\Rightarrow$ Young $\Rightarrow$ Hölder. $\Rightarrow$ Minkowski.



①. $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ 凸. "凸", 不足几何形. 不足"上方集合是凸集"



Def. 凸, 设 f 是区间 I 上的函数.

(1). $\forall x, y \in I, t \in (0, 1), f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$

称 f 是 I 上的凸函数. (2). $x \neq y$ 时有 " $<$ ": 严格凸.

从而 $f'' > 0 \Rightarrow$ 严格凸 $\Rightarrow$ 凸 $\Rightarrow f'' \geq 0$.

② Jensen: f 在 I 上凸, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I, t_1, t_2, \dots, t_n \in (0, 1).$

若 $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, 则: $f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n).$

$n=2$ 成立; n 成立 $\Rightarrow$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) = f\left((1-t_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{1-t_{n+1}} x_k + t_{n+1} x_{n+1}\right)$$

$$\leq (1-t_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^n \frac{t_k}{1-t_{n+1}} x_k\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) = \dots$$

③ 加权均值. $a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_n^{t_n} \leq t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n, a_i > 0, t_i \in (0, 1), \sum t_i = 1.$

Lemma. $-\ln$ 凸. $(-\ln)' = -\frac{1}{x}, \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0.$

从而 $-\ln(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \leq -t_1 \ln a_1 - t_2 \ln a_2 - \dots = -\ln(a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_n^{t_n}).$

④ Young $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1, a, b \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$

令 $a = m^{\frac{1}{p}}, b = n^{\frac{1}{q}} \Rightarrow m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} m + \frac{1}{q} n. (自然 6.1).$

⑤ Holder 范数. $\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$

Hölder. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 (p, q > 1), \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$

由 Young 不等: $\frac{|a_k|}{\|a\|_p} \cdot \frac{|b_k|}{\|b\|_q} \leq \frac{|a_k|^p}{p \|a\|_p^p} + \frac{|b_k|^q}{q \|b\|_q^q}.$

所以对其求和, $\sum_{k=1}^n \frac{|a_k| |b_k|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq 1 \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| |b_k| \leq \|a\|_p \|b\|_q.$

$p=q=2$: 退化为 Cauchy.

⑥ Minkowski: $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p. (chm).$



三. 集合论初步.

1. 集合: 一些事物, 有一些性质(朴素). $\rightarrow [ZFC]$

2. 包含 " $\subseteq$ ": 子集, 幂集.

3. 集合的运算. $\cap, \cup, ^c, \setminus$ (-).

交换, 结合, 分配, 对偶, De Morgan.

4. 集合族. I : 指标集.
 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

5. $\sim$ 关系. (0.17, 0.20, 0.23).

定义. Cartesian 积. 二元关系. 复合. 逆.

等价关系. 偏序关系.

6. 映射. 定义 (from 关系). $\sim$ 定义域, 陪域. 单射, 满射. 复合. 逆. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

像集. 原像集 .

mapping Vs function: 有区别, 但相似

7. 等价. $|A| \leq |B|$ 的判定: 单射. "双射".

Bernstein 定理.

8. 序 (数集的). (此前开"实数论").

pf of 7. ① Banach 引理. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X, \exists X_1, X_2, Y_1, Y_2$.

$$X_1 \cup X_2 = X, X_1 \cap X_2 = \emptyset, Y_1 \cup Y_2 = Y, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset.$$

$$\text{s.t. } f(X_1) = Y_1, g(Y_2) = X_2.$$

② Bernstein 定理: $f: X \rightarrow Y$ 单, $g: Y \rightarrow X$ 单 $\Rightarrow X, Y$ 同构双射.

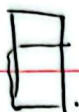
$$X_1 \rightarrow Y_1 \text{ 双}, Y_2 \rightarrow X_2 \text{ 双}, \text{从而 } X \rightarrow Y \text{ 双}.$$



西安交通大学

中国 西安 710049

Xi'an Jiaotong University
Xi'an 710049, P.R. China



$$\mathcal{A}: A \mapsto X - g(Y - f(A)).$$

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow Y - f(A) \supseteq Y - f(B)$$

$$\Rightarrow g(Y - f(A)) \supseteq g(Y - f(B)) \Rightarrow X - g(Y - f(A)) \stackrel{\subseteq}{\subseteq} X - g(Y - f(B)).$$

从而 $\mathcal{A}$ 单调. 它必有不动点:

$$\text{事实上, 记 } S = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq \mathcal{A}(A)\}.$$

$$T = \bigcup_{A \in S} A. \quad \text{从而 } \mathcal{A}(T) = T.$$

$$\text{事实上, 由 } A \subseteq f(A) \subseteq f(T). \quad \text{从而 } T = \bigcup_{A \in S} A \subseteq f(T).$$

$$\text{另一方面, } T \subseteq f(T) \Rightarrow f(T) \subseteq f(f(T)) \Rightarrow f(T) \in S. \Rightarrow f(T) \subseteq T. \quad \square$$

与 11.20 对比: $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 连续 f 必有不动点.

$$\xi \in \sup_{x \in [a, b]} \{x : x \leq f(x)\}. \quad x \in S \Rightarrow x \leq f(x) \leq f(\xi). \quad x \leq f(x) \leq f(\xi)$$

$$\text{且 } f(\xi) \leq \xi \quad \text{故 } \xi \leq f(\xi).$$

$$\text{从而 } f(\xi) \leq f(f(\xi)) \Rightarrow f(\xi) \in S \Rightarrow f(\xi) \leq \xi. \quad \square$$

⑥. Minkowski 不等式. ~~参见 appendix.~~



零. 关于学习与考试.

1. 双子风格. 重证明. 基本: 定义, 定理, 命题.

2. 速通之子: 不反对, 但不了解.

3. 老牛: 高而少, 挂科多.

4. 《习题集》.

易知 // 不试
集合论 与 实数论
数列收敛 // 收敛 ~

一. 实数论.

0. $\mathbb{R}$: 唯一有序完备域

1. $\mathbb{Q}$: 域. 序 (偏序关系). 缺陷: $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$; $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 2$. $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $(d + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$.

2. $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. Dedekind 分割; Cauchy 列收敛.

3. 连续性, 完备性. 连续性, 完备性.

定义: (有上界, 最小性). 存在原理 (略); 唯一性;

性质: $\sup (A+B) = \sup A + \sup B$; $\sup A = -\inf (-A)$.

$\inf \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \inf \{ \inf A_{\alpha} : \alpha \in I \}$. (有限时).

收敛性: 对 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. $\inf f = \inf f(A)$. $\sup f = \sup f(A)$.

性质: $\sup f = -\inf (-f)$; $\inf f + \inf g \leq \inf (f+g) \leq \inf f + \sup g$. (12.4)

$h = \min \{ f, g \}$. $\inf h = \min \{ \inf f, \inf g \}$. (11.24).

集合论 $\rightarrow$ 实数论.



二. 数列极限.

1. 数列是什么? $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n, \{a_n\}$.

2. 极限定义. ϵ - δ ! 收敛? (保序性). 保号性. 夹逼. 四则运算. $\frac{a+b}{c} < \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

3. 收敛收敛性.

① 两个工具: 子列. 零点. (子列收敛). 收敛 $\Leftrightarrow$ 任一子列收敛.

② 单调收敛. 应用: 11.27, 12.01. 4. 迭代序列 (11.27, 12.11).

③ B-W (零点存在性). $x_{n+1} = f(x_n)$. 单调; 压缩映射.

④ Cauchy

5. 上下极限.

① 定义: $\alpha_k = \inf_{n \geq k} x_n$. $\{\alpha_k\}$ 单调增加.

若 $\{x_n\}$ 有下界 $\Rightarrow \{\alpha_k\}$ 收敛 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k$. 上极限同理.

无下界 $\Rightarrow \alpha_k \rightarrow -\infty$.

② 性质. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 对 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ 保持.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \min \{x_n \text{ 的极限点} \}$.

i. 2. $\alpha_k \rightarrow h \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^+, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N,$

$h - \frac{1}{k} < \alpha_k = \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\} < h + \frac{1}{k}.$

$\Rightarrow \exists x_{n_k}, h - \frac{1}{k} < x_{n_k} < h + \frac{1}{k}. \Rightarrow \{x_{n_k}\}$ 收敛于 h .

$\forall \{x_{n_k}\}: x_{n_k} \geq \alpha_{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow \square \geq h.$

3. (Cor of 2) $x_n \rightarrow A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k = A$. (收敛 $\Leftrightarrow \forall$ 子列).

③ 应用: $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

H.H.: $H = 1 + \frac{1}{H}, h = 1 - \frac{1}{H} \Rightarrow H = h = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$



三. 收敛极限.

1. 定义 (基于集合 ^{$U(x_0, \delta)$} 上有定义). 左、右极限. ($x_0 - t, x_0 + t$ 上有定义即行).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

唯一性. 局部有界性. 局部保序性 $\begin{cases} 1) \lim f < \lim g \Rightarrow f < g \text{ in } a \cup \\ 2) f \leq g \text{ in } a \cup \Rightarrow \lim f \leq \lim g. \end{cases}$

夹逼. 四则运算 $\begin{cases} \frac{\alpha f + \beta g}{\frac{f}{g}} \end{cases}$

2. Heine 归结原理. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} (x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0),$

有 $\{f(x_n)\}$ 收敛. pf. " $\Rightarrow$ " 显见; " $\Leftarrow$ ":

I. $x_n, y_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n), f(y_n)$ 收敛于相同极限.

事实上. 考虑 $z_n = \begin{cases} x_{2n}, & 2 \nmid n \\ y_{2n}, & 2 \mid n \end{cases}$. $z_n \rightarrow x_0$ 而 $f(z_n)$ 收敛 $\Rightarrow$ 两括弧 —

II. 设 $f(x_n) \rightarrow A$. 我们证明 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$. 若不然 取 $\delta = \frac{1}{2}$ 的 $\{x_n\}$.

应用: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在. (两个不同子列)

3. Cauchy 收敛原理. $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 上有定义. $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x_1 - x_0| < \delta, 0 < |x_2 - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

pf. " $\Rightarrow$ " 显见; " $\Leftarrow$ " Heine. 考虑 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

4. $\rightarrow \infty$ 的极限. 推广即行.