

数学 I 每日一题习题集



少学组

2025 年 12 月

编者

数试 2502	张杰铭
人智 2502	宋奕歆
少年班 2407	吴悠
少年班 2403	王昱栋
少年班 2402	钱贞臻
电气钱 2501	李睿翔
少年班 2404	刘仁兆

前言

钱院学辅于本学期的第 5 至 14 周开展了每日一题活动，依托学辅平台，少学组于同期为预科二同学开展了数学 I 的每日一题活动。在每日一题活动所出题目的基础上，我们将这些题目按照章节编写，并添加了一些新的题目，形成了这本习题集。

本习题集包括一些经典的定理、结论，23 级少年班的作业题、期末考试和数试加试等往年题，以及出题志愿者的原创题目。在题目的选取上，根据预科二数学教学、学习和考试的实际情况，习题集突出了以下特点：

1. 注重证明：从近两届的教学内容和 23 级的考试题目来看，本门课程更侧重于考察对基本定义、定理的理解和基本证明方法与技巧的掌握。习题集的选题也以证明题为主。
2. 在难度上提出要求：23 级的考试题目相较以往难度较大，习题集的选题也在难度上有一定的要求，以帮助同学们应对可能出现的较为困难的考试。
3. 拓展数学视野：在上课讲授的内容之外，我们也提供了一些补充内容并用“*”标注。这些内容不仅可以锻炼同学们利用已有工具解决陌生问题的能力，同时可以拓宽同学们的数学视野。

在使用习题集时，同学们也应当注意到：这本习题集不仅仅提供了数学 I 课程的练习题，同时也尝试通过题目介绍了一些深刻的结论、思想与方法。受活动形式所限，习题集难以涵盖所有的知识点抑或考点，但其中的题目都体现了出题者对数学 I 课程学习的独到体会，我们希望它能为同学们在某些方面带来别样的收获。

感谢所有为这份习题集的供题、排版、审核做出贡献的志愿者们。感谢陈老师、王老师两位老师为习题集的编写提供帮助。感谢钱院学辅对每日一题活动的组织与运营。

祝愿同学们学有所成。

编者

2025 年 12 月

目录

第一章 导数及其应用	1
1.1 导数及其性质	1
1.2 导数在证明不等式中的应用	1
1.3 解答	2
第二章 不等式	5
2.1 一些经典的不等式	5
2.2 不等式的证明	6
2.3 解答	8
第三章 集合论初步	19
3.1 集合与映射	19
3.2 上确界和下确界	19
3.3 * 二元关系	21
3.4 解答	24
第四章 数列极限	33
4.1 数列极限的定义与性质	33
4.2 迭代序列的处理方法	34
4.3 Bolzano-Weierstrass 定理	35
4.4 * 闭区间套定理和有限覆盖定理	35
4.5 解答	37

第五章 函数极限	49
5.1 函数极限的定义与性质	49
5.2 *Lipschitz 连续	50
5.3 解答	51

第一章 导数及其应用

1.1 导数及其性质

题目 1.1.1. 设函数 $f(x) = x + e^x$.

(1) 证明 f 存在定义在 $\mathbb{R}$ 上的反函数 f^{-1} .

(2) 求 $(f^{-1})'(1)$ 和 $(f^{-1})''(1)$.

题目 1.1.2. 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $x > 0$, 满足 $f(x) < xf'(x)$, 则下列不等式成立的有:

$$A. 2f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) \quad B. 2f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$$

$$C. f\left(\frac{1}{2}\right) < 2f(1) \quad D. f\left(\frac{1}{2}\right) > 2f(1)$$

1.2 导数在证明不等式中的应用

题目 1.2.1 (作业题). 设 $n \in \mathbb{N}^+$. 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln(n+1)$.

题目 1.2.2 (Young 不等式). 设 $a, b > 0$; 且 $p, q > 1$; 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 则:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

且等号成立时, 当且仅当 $a^p = b^q$.

(试使用导数方法证明, 体现导数的放缩技巧)

Hint: 目前所学的导数都只关于一个变量. 对于多个变量的题目, 我们首先尝试固定其中一个. 此题 Young 不等式中, 变量共有两个, 即 a, b 因此, 可以考虑构造关于 a 的函数, 固定 b . 即转化为证明对于所有 $a > 0$, 都会有 $f(a) \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a^p = b^q$.

1.3 解答

解答 1.1.1. (1) 由于 $f'(x) = 1 + e^x > 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 故 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

所以 f 的值域为 $\mathbb{R}$, 因此 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射, 从而存在反函数 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. □

$$(2) \text{ 由反函数求导公式, } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

首先求 $f^{-1}(1)$, 即解方程 $x + e^x = 1$. 观察得 $x = 0$ 满足方程, 且由单调性知唯一, 故 $f^{-1}(1) = 0$. 于是

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

接下来求二阶导数. 对 $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ 两边关于 y 求导, 得

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)}{[f'(f^{-1}(y))]^2}.$$

其中 $f''(x) = e^x$. 代入 $y = 1, f^{-1}(1) = 0, f'(0) = 2, f''(0) = 1, (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$, 故

$$(f^{-1})''(1) = -\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2^2} = -\frac{1}{8}.$$

解答 1.1.2. 观察四个选项的结构, 注意到可以构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. 则有 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. $\because f(x) < xf'(x), \therefore g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增.

故选项 A 正确.

解答 1.2.1. 我们先证 $\forall k \in \mathbb{N}^+, \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln(1 + \frac{1}{k})$, 然后将其对 k 求和即可得到原命题.

设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x)$. 求导函数并整理得

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} (1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x})$$

当 $x > 0$ 时, 由于

$$1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} = \frac{\frac{1}{4}x^2}{1 + \frac{1}{2}x + \sqrt{1+x}} > 0$$

于是此时 $f'(x) > 0$. 故而对任意 $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$.

因此, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+k}} - \ln(1 + \frac{1}{k}) = f(\frac{1}{k}) > 0$$

这就是说, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $\frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln(1 + \frac{1}{k})$. 于是

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln(n+1)$$

□

解答 1.2.2. 考虑函数 $f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$, 其中 $b > 0$ 固定. 即证: $\forall a > 0$, $f(a) \geq 0$; 且等号成立当且仅当 $a^p = b^q$.

首先, 计算 $f(a)$ 的一阶导函数:

$$f'(a) = \frac{d}{da} (\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab) = a^{p-1} - b$$

容易看出, 导函数为 0 的情况下 a, b 存在关系: $f'(a) = 0 \iff a^{p-1} = b$.

代入参数 p, q 的关系, 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 有 $q = \frac{p}{p-1}$. 因此, 代入后:

$$a^{p-1} = b \iff a^p = b^{\frac{p}{p-1}} = b^q$$

即临界点处, 满足 $a^p = b^q$.

接下来, 计算二阶导数来证明临界点是极小值点 (也可以通过其他方法):

$$f''(a) = \frac{d}{da} (a^{p-1} - b) = (p-1)a^{p-2} > 0$$

这是显然的, 因为题设中 $p > 1$ 和 $a > 0$. 于是得到 f 是关于 a 的凸函数, 且临界点 $a^p = b^q$ 为全局最小值点. 我们把该点记作 a_0 . 接下来计算 a_0 的函数值, 希望能得到想要的结果.

现在计算 $f(a_0)$:

$$f(a_0) = \frac{(b^{\frac{1}{p-1}})^p}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{1}{p-1}} \cdot b = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{p}{p-1}}$$

由于 $q = \frac{p}{p-1}$, 因此 $b^{\frac{p}{p-1}} = b^q$. 整理后可得:

$$f(a_0) = \frac{b^q}{p} + \frac{b^q}{q} - b^q = b^q \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0$$

这是因为原始题设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

整理我们所做的事情: 1. 证明了 $f(a)$ 存在临界点, 且求出临界点的关系; 2. 证明了刚才求得的临界值点是全局的最小值点; 3. 通过计算证明了, 最小值点的函数值为 0, 也就是说函数在定义域内恒不小于 0. 唯一能取到 0 的点即最小值点, 等价于 Young 不等式的取等条件.

因此, $\forall a > 0$, $f(a) \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a = a_0$ 即 $a^p = b^q$. 即成功证明了 Young Inequality. $\square$

第二章 不等式

2.1 一些经典的不等式

题目 2.1.1 (Schur 不等式). (1) 证明:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

(2) 证明: 对于所有非负实数 a, b, c 和正实数 r , 有:

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

题目 2.1.2 (权方和不等式). 对于正实数 $a_i > 0$, $b_i > 0$ (其中 $i = 1, 2, \dots, n$) 和正整数 m , 试证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^{m+1}}{(\sum_{i=1}^n b_i)^m}$$

题目 2.1.3 (排序不等式). 对于两个实数数列 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, 设 $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, $b_1 > b_2 > \dots > b_n$, 则有:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{j_i} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i}$$

其中 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列.

题目 2.1.4 (Chebyshev 不等式). 对于两个实数数列 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, 设 $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, $b_1 > b_2 > \dots > b_n$. 试证明:

$$n \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$$

2.2 不等式的证明

题目 2.2.1. 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 证明: $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b}} \geq 3$.

题目 2.2.2. 设整数 $n \geq 3$, 正实数 $a_2, a_3, \dots, a_n$ 满足 $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. 证明:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n$$

题目 2.2.3. 已知: $A + B + C = \pi$, 求证:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos C + 2yz \cos A + 2zx \cos B$$

题目 2.2.4. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a + b + c = 1$, 求以下式子的最大值:

(1) (数学 I, P9) $a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$;

(2) $(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c$.

题目 2.2.5 (作业题). 证明: 圆内接 n 边形中, 正 n 边形面积最大.

题目 2.2.6. 求正整数 n 的最小值, 使得:

$$\sqrt{\frac{n-2011}{2012}} - \sqrt{\frac{n-2012}{2011}} < \sqrt[3]{\frac{n-2013}{2011}} - \sqrt[3]{\frac{n-2011}{2013}}$$

题目 2.2.7. 已知正实数 a, b, c, d 满足 $a + b + c + d = 4$, 求证:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 4 + (a-d)^2$$

题目 2.2.8. 设 $a, b, c > 0$, 证明不等式

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

并讨论等号情形.

题目 2.2.9. 已知: $a > 0, b > 0, c > 0$, 且

$$m = \frac{a+2b+5c}{a+b} + \frac{8a+2b+5c}{2b+3c} + \frac{a+3b+3c}{2c+a}$$

求解 m 的最小值.

(本题所用的技巧与期末考试的所用的类似, 且难度也接近)

题目 2.2.10. 设 $a > 1$; 且 $p, q \in \mathbb{Q}$; 满足 $|p - q| < 1$; 则:

$$|a^p - a^q| \leq a^q(a - 1)|p - q|$$

且等号成立时, 当且仅当 $p = q$.

(试使用多种方法证明; 若想挑战自己, 可以证明 $p, q \in \mathbb{R}$ 的情况得到更强的结论)

(题目源自陈虎民老师于 23 级数学 II 中的思考, 有改编)

题目 2.2.11 (数学 I, P14). 设 $q_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1, a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 记 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, 对 $r \geq 0$, 定义

$$m_r(\mathbf{a}) = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n q_i a_i^r)^{\frac{1}{r}}, & r > 0 \\ a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n}, & r = 0 \end{cases}$$

证明: $\forall 0 \leq r \leq s, m_r(\mathbf{a}) \leq m_s(\mathbf{a})$.

2.3 解答

解答 2.1.1. (1) 由轮换对称性, 不妨令 $a \geq b \geq c$, 则有:

$$LHS = a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

故原不等式成立.

(2) tips: 在第一问中, 我们已经证得 $r = 1$ 时, 原不等式成立. 更进一步地, 当 r 取任意实数时, 也应考虑类似的组合、配方法.

不妨令 $x \geq y \geq z$, 配方得:

$$LHS = a^r(a-b)^2 + c^r(b-c)^2 + (a^r + c^r - b^r)(a-b)(b-c) \geq 0$$

□

解答 2.1.2. 我们将不等式两边同时除以 $\frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^{m+1}}{(\sum_{i=1}^n b_i)^m}$, 可以得到原式等价于

$$\sum_{i=1}^n \frac{[(a_i / \sum_{i=1}^n a_i)]^{m+1}}{[(b_i / \sum_{i=1}^n b_i)]^m} \geq 1$$

$$\text{令 } A_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j}, B_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^n b_j}, \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{A_i^{m+1}}{B_i^m} \geq 1.$$

$$\text{有 } \sum_{i=1}^n A_i = 1, \sum_{i=1}^n B_i = 1,$$

$$\frac{A_1^{m+1}}{B_1^m} + B_1 + B_1 + \cdots + B_1 (\text{共 } m \text{ 个 } B_1) \geq (m+1) \sqrt[m+1]{A_1^{m+1}} = (m+1) A_1,$$

$$\frac{A_2^{m+1}}{B_2^m} + B_2 + B_2 + \cdots + B_2 (\text{共 } m \text{ 个 } B_2) \geq (m+1) \sqrt[m+1]{A_2^{m+1}} = (m+1) A_2,$$

.....

$$\frac{A_n^{m+1}}{B_n^m} + B_n + B_n + \cdots + B_n (\text{共 } m \text{ 个 } B_n) \geq (m+1) \sqrt[m+1]{A_n^{m+1}} = (m+1) A_n,$$

$$\text{上式相加, 可得 } \sum_{i=1}^n \frac{A_i^{m+1}}{B_i^m} + m \sum_{i=1}^n B_i \geq (m+1) \sum_{i=1}^n A_i.$$

$$\text{即 } \sum_{i=1}^n \frac{A_i^{m+1}}{B_i^m} \geq (m+1) - m = 1, \text{ 证毕.}$$

□

解答 2.1.3. 数学归纳法:

(i) 对于 $n = 1$ 时, 不等式显然成立;

(ii) 假设对于 $n = k$ 时成立, 故有 $\sum_{i=1}^k a_i b_i \geq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_k b_{j_k}$

那么, 对于 $n = k+1$ 时, $\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i \geq a_1 b_{j_1} + b_2 b_{j_2} + \dots + a_k b_{j_k} + a_{k+1} b_{k+1}$.

将 b_{k+1} 与第 m 项替换位置 ($m = 1, 2, \dots, k$), 易知:

$a_{k+1} b_{k+1} + a_m b_{j_m} \geq a_{k+1} b_{j_m} + a_m b_{k+1}$, 可多形成 $k+1$ 次排列,

因此排列数由 A_k^k 变为 A_{k+1}^{k+1} , 为全排列, 包括了所有的乱序情况.

故, $\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i \geq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_{k+1} b_{j_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} a_i b_{j_{k+1}}$, 即顺序和大于乱序和.

倒序和同理可证. □

解答 2.1.4. 由 $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ 以及排序不等式易知, 最大的和即为顺序和: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$, 于是有下式:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \dots + a_n b_2$$

.....

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1}$$

将这 n 个不等式相加, 同时对不等式右侧进行因式分解, 整理可得:

$$n \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$$

□

解答 2.2.1. 由题设得 $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

由均值不等式得 $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a}} = \sqrt{a^2 - 4a + 4a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$.

同理, $\sqrt{b^2 + \frac{1}{b}} \geq 2 - b$.

故 $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b}} \geq 2 - a + 2 - b = 3$. □

解答 2.2.2. 由均值不等式:

$$(1 + a_k)^k = \left(\frac{1}{k-1} \cdot (k-1) + a_k \right)^k \geq \frac{k^k \cdot a_k}{(k-1)^{k-1}}$$

故有：

$$\text{LHS} \geq \prod \left(\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \right) = n^n$$

而容易验证无法同时对 n 次放缩取等，故原不等式成立。 $\square$

解答 2.2.3. 法一：注意到

$$LHS - RHS = (x - y \cos C - z \cos B)^2 + (y \sin C - z \sin B)^2 \geq 0$$

$\square$

思路：

$$LHS - RHS = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy \cos C - 2yz \cos A - 2zx \cos B$$

注意到： $\cos A = -\cos(B+C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$ ，因此：

$$LHS - RHS$$

$$\begin{aligned} &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy \cos C - 2zx \cos B + 2yz \cos B \cos C - 2yz \sin B \sin C \\ &= (x - y \cos C - z \cos B)^2 + (y \sin C - z \sin B)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

法二：主元法

$$LHS - RHS = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy \cos C - 2yz \cos A - 2zx \cos B$$

令 $f(x) = LHS - RHS$ ，则

$$f(x) = x^2 - (2y \cos C + 2z \cos B)x + y^2 + z^2 - 2yz \cos A$$

是开口向上的二次函数，其判别式：

$$\begin{aligned} \Delta &= (2y \cos C + 2z \cos B)^2 - 4(y^2 + z^2 - 2yz \cos A) \\ &= 4y^2 \cos^2 C + 4z^2 \cos^2 B + 8yz \cos B \cos C - 4y^2 - 4z^2 + 8yz \cos A \end{aligned}$$

显然有： $\cos A = -\cos(B+C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$ ，因此：

$$\Delta = -(4y^2 \sin^2 C + 4z^2 \sin^2 B - 8yz \sin C \sin B) = -4(y \sin C - z \sin B)^2 \leq 0$$

函数开口向上 $+\Delta \leq 0 \iff f(x) \geq 0$ 恒成立. $\square$

其他方法还请大家多多探索吧 ~

解答 2.2.4. 关键的想法是, 利用加权均值不等式处理指数, 再通过进一步的处理得到结果. 需要注意的是, 在整个放缩过程中应保持取等条件的一致.

(1) 为了使用加权均值不等式, 我们希望指数相加为 1, 且使用加权均值不等式后的形式可以被进一步处理. 于是

$$\begin{aligned} a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b} &= a^{1-a} b^{1-b} c^{1-c} \\ &= (abc)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}-a} b^{\frac{2}{3}-b} c^{\frac{2}{3}-c} \\ &\leq \frac{a+b+c}{3} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}-a\right)a + \left(\frac{2}{3}-b\right)b + \left(\frac{2}{3}-c\right)c \right] \\ &\leq \frac{a+b+c}{3} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

其中最后一步放缩使用了基本不等式. 当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时取到等号.

(2) 作换元 $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$. 于是

$$\begin{aligned} (b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c &= x^{1-x} y^{1-y} z^{1-z} \\ &\leq x(1-x) + y(1-y) + z(1-z) \\ &= (x+y+z) - (x^2 + y^2 + z^2) \\ &\leq 2 - \frac{(x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1)^2}{1^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

其中最后一步放缩使用了 Cauchy 不等式. 当且仅当 $x = y = z = \frac{2}{3}$, 即 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时取到等号. $\square$

解答 2.2.5. 将圆的圆心设为 O , 半径设为 1. 则正 n 边形的面积为

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \quad (n \geq 3)$$

容易知道, S_n 随 n 的增加单调增加. 考虑圆周上任意 n 点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 组成的 n 边形, 记其面积为 S'_n . 并记

$$\theta_i := \angle A_i O A_{i+1} \quad (\theta = 1, 2, \dots, n, A_{n+1} = A_1)$$

若对于任意一条直径, 总存在两个顶点在其两侧, 则有:

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1} + \theta_n = 2\pi$$

由于 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上为上凸函数, 由 Jensen 不等式:

$$\begin{aligned} S'_n &= S_{\triangle A_1 O A_2} + S_{\triangle A_2 O A_3} + \dots + S_{\triangle A_{n-1} O A_n} + S_{\triangle A_n O A_1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_{n-1} + \sin \theta_n) \\ &\leq \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \\ &= S_n \end{aligned}$$

否则, 存在一条直径, 使得该 n 个点均分布在直径上或其一侧, 则有:

$$\theta_n = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}$$

进而可得:

$$\begin{aligned} S'_n &= S_{\triangle A_1 O A_2} + S_{\triangle A_2 O A_3} + \dots + S_{\triangle A_{n-1} O A_n} - S_{\triangle A_1 O A_n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_{n-1} - \sin \theta_n) \end{aligned}$$

由 Jensen 不等式:

$$\begin{aligned} S'_n &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_{n-1} - \sin \theta_n) \\ &< \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_{n-1}) \\ &\leq \frac{n-1}{2} \cdot \sin \frac{\theta_n}{n-1} \\ &\leq \frac{n-1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n-1} \end{aligned}$$

只需证 $\frac{n-1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n-1} \leq \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ ($n \geq 3$). 当 $n = 3$ 时代入得证. 当 $n \geq 4$ 时:

$$\frac{\pi}{n-1} \leq \frac{2\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$$

从而有

$$\frac{n-1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n-1} < \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n-1} \leq \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

□

解答 2.2.6. 由于

$n \leq 4023$ 时, 有 $LHS \geq 0 > RHS$;

$n = 4024$ 时, 有 $RHS = 0 > LHS$.

故 n 的最小值为 4024.

解答 2.2.7. 鉴于不等式并不完全对称, 这意味着应当进行局部放缩, 那么配方、应用均值不等式即是要考虑的手段.

$$LHS - 4 = \sum_{cyc} \left(\frac{a^2}{b} + b - 2a \right) = \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{(2a-2d)^2}{4} = (a-d)^2$$

□

解答 2.2.8. 将每一项写成平方的形式:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a^2}{a(b+c)}, \quad \frac{b}{c+a} = \frac{b^2}{b(c+a)}, \quad \frac{c}{a+b} = \frac{c^2}{c(a+b)}.$$

由 Cauchy 不等式, 对正数 $a(b+c)$, $b(c+a)$, $c(a+b)$ 有

$$\frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}.$$

而分母整理得

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2(ab+bc+ca).$$

因此

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

取等条件:

在上述 Cauchy 不等式中取等号当且仅当向量 $(\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}, \frac{b}{\sqrt{b(c+a)}}, \frac{c}{\sqrt{c(a+b)}})$ 与向量 $(\sqrt{a(b+c)}, \sqrt{b(c+a)}, \sqrt{c(a+b)})$ 成比例. 化简可得

$$\frac{a}{a(b+c)} = \frac{b}{b(c+a)} = \frac{c}{c(a+b)}$$

即

$$\frac{1}{b+c} = \frac{1}{c+a} = \frac{1}{a+b},$$

由此推出 $a = b = c$. 故等号当且仅当 $a = b = c$. □

解答 2.2.9. 首先分离常数

$$m = 3 + \frac{b+5c}{a+b} + \frac{8a+2c}{2b+3c} + \frac{3b+c}{2c+a}$$

即求 3 之后的三个分式之和的最小值.

想到三换元法: 令 $x = a + b, y = 2b + 3c, z = 2c + a$, 以此代换掉分母

反解出 a, b, c :

$$a = \frac{4x - 2y + 3z}{7}$$

$$b = \frac{3x + 2y - 3z}{7}$$

$$c = \frac{-2x + y + 2z}{7}$$

代入 m 中, 则有:

$$m = 3 + \frac{-x + y + z}{x} + \frac{4x - 2y + 4z}{y} + \frac{x + y - z}{z}$$

$$m = 3 + (\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1) + (\frac{4x}{y} + \frac{4z}{y} - 2) + (\frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1)$$

$$m = -1 + (\frac{y}{x} + \frac{4x}{y}) + (\frac{z}{x} + \frac{x}{z}) + (\frac{4z}{y} + \frac{y}{z})$$

$$m \geq -1 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \frac{4x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{4z}{y} \frac{y}{z}} = -1 + 4 + 2 + 4 = 9$$

取到等号当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}, \frac{z}{x} = \frac{x}{z}, \frac{4z}{y} = \frac{y}{z}$, 即:

$$x = z = \frac{1}{2}y$$

刚好可以取到, 带回 a, b, c 的表达式中可以成为取等条件. 因此得到 m 的最小值: 9.

解答 2.2.10. 注意到, 不等式左边可以改写:

$$|a^p - a^q| = a^q |a^{p-q} - 1|$$

问题转化为:

$$a^q |a^{p-q} - 1| \leq a^q (a - 1) |p - q| \implies |a^{p-q} - 1| \leq (a - 1) |p - q|$$

令 $x = p - q$, 即证:

$$|a^x - 1| \leq (a - 1) |x|$$

接下来需要分情况讨论 x 的取值.

当 $x = 0$ 时, 显然等式左右都为 0, 结论成立.

当 $x = \frac{m}{n} \in (0, 1)$ 时, (假设 $m, n > 0$) 有:

$$a^x = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^m \cdot 1^{n-m})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{am + 1 \cdot (n-m)}{n} = (a-1)\frac{m}{n} + 1 = (a-1)x + 1$$

注意到这里使用均值不等式来化简, 等号取到当且仅当 $a = 1$, 显然是取不到等号的. 因此得知, 当 $x \in (0, 1)$ 时, 有 $a^x - 1 < (a - 1)x$. 结论成立

当 $x \in (-1, 0)$ 时, 则令 $s = -x$, 等价于证明:

$$1 - a^{-s} \leq (a - 1)s$$

注意到这里可以使用 Bernoulli inequality: 对于 $u \in (0, 1], s \in [0, 1]$ 有:

$$u^s \geq 1 + s(u - 1)$$

此时代入 $u = a^{-1}$ 是符合条件的, 因此即有:

$$a^{-s} \geq 1 + s(a^{-1} - 1) = 1 - s(1 - \frac{1}{a})$$

因此, 此时有:

$$1 - a^{-s} \leq s(1 - \frac{1}{a}) = s \frac{a-1}{a} < s(a-1)$$

这里由于 $a > 1$, 因此右边的小于等于号自然地变成了小于号, 这也是我们乐意看到的.

综上所述, 当 $x \in (-1, 1)$,

$$|a^x - 1| \leq (a-1)|x|$$

即原命题得证. □

该命题在实数域上的情形:

Hint: 想要证明该命题在实数域的成立, 这里提供一个方法. 构造函数 $f(x) = |a^x - 1|$, 它是一个在 $(-1, 0)$ 内凹, 在 $(0, 1)$ 内凸的函数. 因此可以考虑在 0 之前, $f(x)$ 在 0 处的切线方程 (注意可能需要二次放缩), 以及在 0 之后, $f(x)$ 的一段弦方程 (连接着 $(0, f(0)), (1, f(1))$). 这个方法计算量较小, 自认为是较为优美的方法了.

题目即为: 设 $a > 1$; 且 $p, q \in \mathbb{R}$; 满足 $|p - q| < 1$; 则: $|a^p - a^q| \leq a^q(a-1)|p - q|$.

同样地, 注意到, 不等式左边可以改写:

$$|a^p - a^q| = a^q |a^{p-q} - 1|$$

问题转化为:

$$a^q |a^{p-q} - 1| \leq a^q(a-1)|p - q| \implies |a^{p-q} - 1| \leq (a-1)|p - q|$$

令 $x = p - q$, 即证:

$$|a^x - 1| \leq (a-1)|x|$$

定义函数 $f(x) = |a^x - 1|$, 则可以分类讨论:

当 $x \in [0, 1)$, $f(x) = a^x - 1$, 欲证明 $a^x - 1 \leq (a - 1)x$

显然, $f(x)$ 是凸函数(可用求二阶导证明), 因此有弦方程过 $(0, 0)(1, a - 1)$, 在 $f(x)$ 之上, 设弦方程为 $t(x)$, 容易求得:

$$t(x) = (a - 1)x$$

由于 $f(x)$ 是凸函数, 因此 $f(x) \leq t(x)$, 即

$$a^x - 1 \leq (a - 1)x$$

当 $x \in (-1, 0)$, $f(x) = -a^x + 1$, 欲证明 $-a^x + 1 \leq (a - 1)(-x) = (1 - a)x$

显然, $f(x)$ 是凹函数(可用求二阶导证明)

求解 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线, 设切线方程为 $v(x)$, 解得:

$$v(x) = -\ln a \cdot x \quad (1)$$

由于 $f(x)$ 是凹函数, 因此 $f(x) \leq v(x)$, 即

$$1 - a^x \leq -\ln a \cdot x$$

由于 $a > 1$, 因此有常见不等式 $\ln a \leq a - 1$ (容易证明后者是前者在 $a = 1$ 处的切线, 且 $\ln a$ 为凹函数), 即有:

$$-\ln a \geq 1 - a$$

因此当 $x < 0$ 时, 总有

$$-\ln a \cdot x \leq (1 - a)x \quad (2)$$

联立 (1)(2) 即得到:

$$1 - a^x \leq -\ln a \cdot x \leq (1 - a)x$$

综上所述, 对于 $a > 1, x \in (-1, 1)$, 总有 $f(x) = |a^x - 1| \leq (a - 1)|x|$

即证明了该性质在实数域的成立. □

解答 2.2.11. 当 $r = s$ 时, 显然有 $m_r(\mathbf{a}) = m_s(\mathbf{a})$. 我们只需证明:

$$(i) \quad \forall 0 < r < s, m_r(\mathbf{a}) \leq m_s(\mathbf{a});$$

$$(ii) \quad \forall r > 0, m_r(\mathbf{a}) \geq m_0(\mathbf{a}).$$

(i) 由 Hölder 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n q_i\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \geq \left(\sum_{i=1}^n q_i^{\frac{s-r}{s}} (q_i a_i^s)^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

整理即得

$$\left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \geq \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

(ii) 对 $a_1^r, a_2^r, \dots, a_n^r$ 用加权均值不等式:

$$\sum_{i=1}^n q_i a_i^r \geq (a_1^r)^{q_1} (a_2^r)^{q_2} \dots (a_n^r)^{q_n}$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \geq a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n}$$

由 (i)(ii) 可知, $\forall 0 \leq r \leq s, m_r(\mathbf{a}) \leq m_s(\mathbf{a})$. □

第三章 集合论初步

3.1 集合与映射

题目 3.1.1. 设 f 是定义在从 X 到 Y 上的满射, 试证明以下命题等价:

- (i) f 为一一映射;
- (ii) 对任意的 $A, B \subseteq X$, 有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
- (iii) 对满足 $A \cap B = \emptyset$ 的 $A, B \subset X$, 有 $f(A) \cap f(B) = \emptyset$;
- (iv) 对任意的 $A \subseteq B \subseteq X$, 有 $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.

题目 3.1.2 (Banach 引理). 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$, 则存在一组集合 X_1, X_2, Y_1, Y_2 满足

$$X_1 \cup X_2 = X \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad Y_1 \cup Y_2 = Y \quad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$$

使得 $f(X_1) = Y_1, g(Y_2) = X_2$.

题目 3.1.3 (22 数试加试, P6; 23 数试加试, P6). 设 A, B 为两个非空有限集, 映射 $f: A \rightarrow B$. 设集合

$$S = \{(a, a') : f(a) = f(a')\} \subseteq A \times A$$

求证:

$$|S| \geq \max \left\{ |A|, \frac{|A|^2}{|B|} \right\}.$$

3.2 上确界和下确界

题目 3.2.1 (数学 I, P11). 设集合 A 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ 有界. 记 $h: A \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. 证明: h 有界, 且 $\inf h =$

$\min\{\inf f, \inf g\}$.

题目 3.2.2. 设集合 A 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ 有界. 求证:

$$\inf f + \inf g \leq \inf(f + g) \leq \inf f + \sup g.$$

题目 3.2.3. 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是增函数, 且 $f(a) > a$, $f(b) < b$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

题目 3.2.4. 设 I 为指标集, 集合 $A_i \subseteq \mathbb{R}$ ($i \in I$) 非空且有下界. 记

$$S := \{\inf A_i : i \in I\}$$

(1) 设 $S, \bigcup_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} A_i$ 非空有界. 判断如下命题是否正确, 如果正确, 请证明之; 如果不正确, 请举出反例:

$$(i) \quad \inf \bigcup_{i \in I} A_i = \inf S$$

$$(ii) \quad \inf \bigcap_{i \in I} A_i = \sup S$$

(2) 求证: $\bigcup_{i \in I} A_i$ 无下界当且仅当 S 无下界;

(3) 我们称 $A \subseteq \mathbb{R}$ 是**连通集**, 如果 $x, y \in A, x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq A$. 对于 A_i ($i \in I$) 是连通集的情形, 证明 (1) 中的命题 (ii).

在下面的题目中, 我们尝试将通常的加法推广到可数集乃至不可数集上. 先给出如下定义:

定义 3.2.1 (有限集的和). 设 $A \subseteq \mathbb{R}^+$ 为非空有限集. 从而

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

记

$$\text{sum}(A) := \sum_{i=1}^n a_i$$

为集合 A 的和.

定义 3.2.2 (一般集合的和). 设 $A \subseteq \mathbb{R}^+$ 非空. 记

$$S_A := \{\text{sum}(S) : S \subseteq A, S \text{ 是有限集}\}$$

并记

$$\text{sum}(A) := \begin{cases} \sup S_A, & S_A \text{ 有上界} \\ +\infty, & S_A \text{ 无上界} \end{cases}$$

为集合 A 的和.

题目 3.2.5. 请证明以下命题:

(1) 设 $A \subseteq \mathbb{R}^+$ 为可数集, 记 $f(n) = a_n$ 为 $\mathbb{N}^+$ 到 A 的一个双射. 求证:

$$\text{sum}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

(2) 设 $A = (0, 1)$. 求证: $\text{sum}(A) = +\infty$.

(3) 设 $A \subseteq \mathbb{R}^+$ 满足 $\text{sum}(A)$ 是有限数, 求证: A 至多可数.

3.3 * 二元关系

定义 3.3.1 (直积, Cartesian 积). 设 X, Y 是集合, 称 $\{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}$ 为 X 与 Y 的直积, 记为 $X \times Y$.

定义 3.3.2 (二元关系). 设 X, Y 是非空集合, 若 R 是 $X \times Y$ 的一个子集, 我们就称 R 是一个从 X 到 Y 的二元关系.

定义 3.3.3 (复合关系). 设 R 是从 X 到 Y 的二元关系, S 是从 Y 到 Z 的二元关系, 记

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\},$$

并把从 X 到 Z 的二元关系 $S \circ R$ 称为 R 与 S 的复合关系.

定义 3.3.4 (逆关系). 设 R 是从 X 到 Y 的二元关系, 记

$$R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\},$$

并把从 Y 到 X 的二元关系 R^{-1} 称为关系 R 的逆关系.

题目 3.3.1. 请证明以下命题:

(1) 若 R 是从 X 到 Y 的二元关系, S 是从 Y 到 Z 的二元关系, T 是从 Z 到 W 的二元关系, 则 $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

(2) 若 R 是从 X 到 Y 的二元关系, 则 $(R^{-1})^{-1} = R$.

(3) 若 R 是从 X 到 Y 的二元关系, S 是从 Y 到 Z 的二元关系, 则有 $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

定义 3.3.5 (等价关系). 设 R 是非空集合 X 上的一个二元关系 (这是指从 X 到 X 的二元关系). 如果 R 满足

(1) 反身性: 对任意的 $x \in X$ 都有 xRx ;

(2) 对称性: 对任意的 $x, y \in X$, 若 xRy , 则 yRx ;

(3) 传递性: 对任意的 $x, y, z \in X$, 若 xRy 且 yRz , 则 xRz ;

那么就称 R 是 X 上的一个等价关系.

定义 3.3.6 (等价类, 商集). 设 R 是 X 上的等价关系. 对任意的 $x \in X$, 称 $[x]_R := \{y \in X \mid yRx\}$ 为 R 的一个等价类. 集合 $X/R := \{[x]_R \mid x \in X\}$ 称为 X 关于 R 的商集.

定义 3.3.7 (同余). 设 $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$. 若存在 $c \in \mathbb{Z}$ 使得 $a - b = mc$, 则称 a 和 b 模 m 同余, 记作 $a \equiv b \pmod{m}$.

定义 3.3.8 (划分). 对非空集合 S , P , $P \subseteq \mathcal{P}(S)$. 如果 P 满足:

(1) $\forall A \in P, A \neq \emptyset$;

(2) $\forall A, B \in P$, 如果 $A \neq B$, 那么 $A \cap B = \emptyset$;

(3) $\bigcup_{A \in P} A = S$;

那么就称 P 是 S 的一个划分.

题目 3.3.2. 请证明以下命题:

(1) 同余是 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系.

(2) 设 R 是 X 上的等价关系, 则 X 关于 R 的商集是 X 的一个划分.

定义 3.3.9 (偏序关系). 设 R 是非空集合 X 上的一个二元关系. 如果 R 满足

- (1) 反身性: 对任意的 $x \in X$ 都有 xRx ;
- (2) 反对称性: 对任意的 $x, y \in X$, 若 xRy 且 yRx , 则 $x = y$;
- (3) 传递性: 对任意的 $x, y, z \in X$, 若 xRy 且 yRz , 则 xRz ;

那么就称 R 是 X 上的一个偏序关系.

定义 3.3.10 (等势). 我们称两个集合 A, B 是等势的, 如果存在 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 记为 $A \sim B$.

给定非空集合 U , 它的元素是一些集合.

题目 3.3.3. 证明: 等势 ($\sim$) 是 U 上的一个等价关系.

题目 3.3.4. 在 $U/\sim$ 上定义如下关系

$$R = \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in (U/\sim)^2 \mid \exists A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \text{存在 } f: A \rightarrow B \text{ 是单射}\}$$

$$R' = \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in (U/\sim)^2 \mid \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \text{存在 } f: A \rightarrow B \text{ 是单射}\}$$

其中 $(U/\sim)^2$ 表示 $(U/\sim) \times (U/\sim)$.

(1) 证明: $R = R'$. 从而 $U/\sim$ 上的关系 R 不依赖于代表元的选取.

(2) 证明: R 是 $U/\sim$ 上的一个偏序关系.

(Hint: 使用 **Bernstein 定理**, 设 A, B 是两个集合, 如果存在一个 A 到 B 的单射, 也存在一个 B 到 A 的单射, 则存在一个 A 到 B 的双射)

3.4 解答

解答 3.1.1. (i) $\Rightarrow$ (ii): 只需指出 $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$ 即可. 假定 $y \in f(A) \cap f(B)$, 即存在 $x_1 \in A, x_2 \in B$, 使得 $f(x_1) = y = f(x_2)$. 由于 f 是一一映射, 故知有 $x = x_1 = x_2 \in A \cap B$, 且 $f(x) = y$, 即 $y \in f(A \cap B)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 由 A, B 的任意性, 可取 $A \cap B = \emptyset$, $f(A \cap B) = \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 因为 $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, 所以根据 (iii) 可知 $f(A) \cap f(B \setminus A) = \emptyset$. 这说明 $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): 用反证法. 若有 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = y \in Y$, 则令 $A = \{x_1\}, B = \{x_1, x_2\}$. 由 (iv) 知 $y = f(x_2) \in f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A) = \emptyset$. 这一矛盾说明 f 是一一映射. $\square$

解答 3.1.2. 我们构造映射 $h: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, 满足 $h(A) = X - g(Y - f(A))$. 从而映射 h 的不动点即所求的 X_1 . 事实上, 若 $X_1 \in \mathcal{P}(X)$ 是 h 的不动点, 取 $Y_1 = f(X_1) \subseteq Y$, 从而 $g(Y - Y_1) = X - X_1$, 此时取 $X_2 = X - X_1, Y_2 = Y - Y_1$ 即所求. 于是只需证 h 存在不动点.

我们先证映射 h 是单调的, 即 $A \subseteq B \Rightarrow h(A) \subseteq h(B)$. 事实上

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow Y - f(A) \supseteq Y - f(B)$$

$$\Rightarrow g(Y - f(A)) \supseteq g(Y - f(B)) \Rightarrow h(A) \subseteq h(B)$$

考虑集合 $S = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq h(A)\}$. 记 $T = \bigcup_{A \in S} A$, 我们以下证明 $T = h(T)$.

对任意的 $A \in S$, 由 $A \subseteq T$ 知 $A \subseteq h(A) \subseteq h(T)$. 从而有 $T \subseteq h(T)$. 于是得到 $h(T) \subseteq h(h(T))$, 这就是说 $h(T) \in S$, 从而 $h(T) \subseteq T$, 即 $h(T) = T$. $\square$

评注 Banach 引理是证明 Bernstein 定理所需的重要结论, 也被称作“映射分解定理”。

解答 3.1.3. 可以验证 S 是 A 上的一个等价关系. 显见

$$k := |A/S| \leq \min\{|A|, |B|\}$$

从而设

$$A/S = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

记 $a_i := |A_i|$, $i = 1, 2, \dots, k$, 则有

$$|A| = \sum_{i=1}^k a_i \quad |S| = \sum_{i=1}^k a_i^2$$

由 Cauchy 不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^k 1^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^2 = |A|^2$$

即

$$|S| = \sum_{i=1}^k a_i^2 \geq \frac{|A|^2}{k} \geq \max\{|A|, \frac{|A|^2}{|B|}\}.$$

□

解答 3.2.1. 先证 h 有界. 由于 f, g 有界, 则存在 m_1, M_1, m_2, M_2 , 使得

$$m_1 \leq f(x) \leq M_1$$

$$m_2 \leq g(x) \leq M_2$$

由于 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, 则 $h(x) = f(x)$ 或 $h(x) = g(x)$. 于是

$$\begin{cases} h(x) \geq m_1 \vee h(x) \geq m_2 \\ h(x) \leq M_1 \vee h(x) \leq M_2 \end{cases}$$

所以得到

$$\min\{m_1, m_2\} \leq h(x) \leq \max\{M_1, M_2\}$$

即 h 有界.

再证 $\inf h = \min\{\inf f, \inf g\}$, 用下确界的定义证明.

(i) $\forall x \in A, h(x) \geq \min\{\inf f, \inf g\}$. 事实上, 由于

$$\forall x \in A, f(x) \geq \inf f$$

$$\forall x \in A, g(x) \geq \inf g$$

我们可得 $h(x) \geq \inf f \vee h(x) \geq \inf g$, 即

$$\forall x \in A, h(x) \geq \min\{\inf f, \inf g\}$$

(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in A, s.t. h(x_0) < \min\{\inf f, \inf g\} + \epsilon$. 不失一般性, 设 $\inf f \leq \inf g$. 则

$$\exists x_0 \in A, s.t. f(x_0) < \inf f + \epsilon$$

于是 $h(x_0) \leq f(x_0) < \inf f + \epsilon = \min\{\inf f, \inf g\} + \epsilon$.

由 (i)(ii) 可知, $\min\{\inf f, \inf g\}$ 是 h 的下确界. □

解答 3.2.2. 对于左边的不等式, 对任意的 $x \in A$ 我们有

$$f(x) \geq \inf f \quad g(x) \geq \inf g$$

从而 $\inf f + \inf g$ 是 $(f + g)(x)$ 的一个下界. 于是有

$$\inf f + \inf g \leq \inf(f + g)$$

对于右边的不等式, 先证明

$$\sup g = -\inf(-g)$$

我们用定义证明 $-\inf(-g)$ 是 g 的上确界.

一方面, 对任意的 $x \in A$, 我们有 $-g(x) \geq \inf(-g)$, 从而 $g(x) \leq -\inf(-g)$.

另一方面, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $x_0 \in A$ 使得 $-g(x_0) < \inf(-g) + \epsilon$. 从而此时 $g(x_0) > -\inf(-g) - \epsilon$.

综合两方面知 $-\inf(-g)$ 是 g 的上确界, 即 $\sup g = -\inf(-g)$.

回到原题, 由左边的不等式所给出的结论可得

$$\inf(f + g) + \inf(-g) \leq \inf f$$

即

$$\inf(f + g) \leq \inf f - \inf(-g) = \inf f + \sup g$$

□

解答 3.2.3. 法一: 记 $g(x) := f(x) - x$. 由于 f 是增函数, 对于 $x_1 < x_2$, 我们有

$$g(x_1) + x_1 = f(x_1) \leq f(x_2) = g(x_2) + x_2$$

记 $S := \{x \in [a, b] : g(x) > 0\}$. 我们希望证明 $\xi = \sup S$ 满足要求. 显见 $\xi \in [a, b]$, 从而我们只需证明 $g(\xi) = 0$, 它蕴涵了 $\xi \in (a, b)$.

用反证法. 一方面, 假设 $g(\xi) = \epsilon > 0$, 对 $x \in (\xi, \xi + \epsilon) \cap [a, b]$, 我们有

$$g(x) \geq g(\xi) - (x - \xi) > 0$$

由于此时 $\xi \neq b$, 从而 $(\xi, \xi + \epsilon) \cap [a, b] \neq \emptyset$, 这与 ξ 是 S 的一个上界矛盾!

另一方面, 假设 $g(\xi) = -\epsilon < 0$, 对 $x \in (\xi - \epsilon, \xi) \cap [a, b]$, 我们有

$$g(x) \leq g(\xi) + (\xi - x) < 0$$

由于此时 $\xi \neq a$, 从而 $(\xi - \epsilon, \xi) \cap [a, b] \neq \emptyset$, 这与 ξ 是 S 的上确界矛盾!

□

法二: 记 $S = \{x \in [a, b] : x \leq f(x)\}$, 考虑 $\xi = \sup S$. 下证 $\xi = f(\xi)$.

事实上, 对任意的 $x \in S$, 由 $x \leq \xi$ 及 f 是增函数知 $x \leq f(x) \leq f(\xi)$. 从而 $f(\xi)$ 是 S 的一个上界, 即 $\xi \leq f(\xi)$. 于是得到 $f(\xi) \leq f(f(\xi))$, 这就是说 $f(\xi) \in S$, 从而 $f(\xi) \leq \xi$, 即 $f(\xi) = \xi$. □

点评 法一的想法与零点存在定理的证明是类似的, 但本题中没有连续性作为条件, 而需要借助单调性给出的约束. 法二可以与题目3.1.2进行对比, 事实上如果将“包含于”视为某个幂集上的偏序关系, 则两个解答是类似的.

解答 3.2.4. (1) 命题 (i) 是正确的. 我们用定义证明 $\inf S$ 是 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 的下确界:

一方面, $\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $\exists i \in I$, 使得 $x \in A_i$, 从而有 $x \geq \inf A_i \geq S$.

另一方面, $\forall \epsilon > 0$, $\exists i \in I$, 使得 $\inf A_i < \inf S + \epsilon$. 故 $\exists x \in A_i$, 使得 $x < \inf A_i + (\inf S + \epsilon - \inf A_i) = \inf S + \epsilon$. 这就是说, $\exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, 使得 $x < \inf S + \epsilon$.

综合两方面可知, $\inf \bigcup_{i \in I} A_i = \inf S$.

命题 (ii) 是错误的. 反例如下:

取 $I = \{1, 2\}$. $A_i := \{i, 3\}$ ($i \in I$). 则有

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{3\} \quad S = \{1, 2\}$$

从而 $\inf \bigcap_{i \in I} A_i = 3 \neq \sup S = 2$.

(2) 当 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 无下界时:

假设 M 是 S 的一个下界, 则 $\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $\exists i \in I$, 使得 $x \in A_i$. 从而 $x \geq \inf A_i \geq M$. 即 M 是 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 的一个下界. 矛盾! 故 S 无下界.

当 S 无下界时:

假设 M 是 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 的一个下界, 则 $\forall i \in I$, 取 $\epsilon = 1$, $\exists x \in A_i$, 使得 $x < \inf A_i + 1$, 从而 $\inf A_i > x - 1 \geq M - 1$. 即 $M - 1$ 是 S 的一个下界. 矛盾! 故 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 无下界.

(3) 显见 $\forall x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, $x \geq \inf A_i$ ($\forall i \in I$), 从而 x 是 S 的一个上界, 即 $x \geq \sup S$. 于是 $\sup S$ 是 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 的一个下界, 即 $\inf \bigcap_{i \in I} A_i \geq \sup S$.

下面假设 $\epsilon := \inf \bigcap_{i \in I} A_i - \sup S > 0$:

一方面, 由于 $\forall x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, $x \geq \inf \bigcap_{i \in I} A_i$, 而 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 非空, 从而可以取 $x_0 \in A$ 满足 $x_0 \geq \inf \bigcap_{i \in I} A_i$. 另一方面, $\forall i \in I$, $\exists x_i \in A_i$, 使得 $x_i < \inf A_i + \frac{1}{3}\epsilon \leq \sup S + \frac{1}{3}\epsilon$.

由于 A_i 是连通集, $[x_i, x_0] \subseteq A_i$, 从而 $\sup S + \frac{2}{3}\epsilon \in A_i$. 从而 $\sup S + \frac{2}{3}\epsilon \in \bigcap_{i \in I} A_i$, 这与 $\inf \bigcap_{i \in I} A_i = \sup S + \epsilon$ 是 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 的一个下界矛盾!

故 $\inf \bigcap_{i \in I} A_i = \sup S$. □

解答 3.2.5. (1) 当 S_A 有上界时:

一方面, 记 $S_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. 从而对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 我们有

$$\sum_{i=1}^n a_i = \text{sum}(S_n) \leq \text{sum}(A)$$

故由极限的保号性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \leq \text{sum}(A)$$

另一方面, 对任意的 $S \subseteq A$, 记 $S = \{a_{s_1}, a_{s_2}, \dots, a_{s_k}\}$, 其中 $s_1 < s_2 < \dots < s_k$. 从而

$$\text{sum}(S) = \sum_{i=1}^k a_{s_i} \leq \sum_{i=1}^{s_k} a_i \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$ 是 S_A 的一个上界, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \geq \text{sum}(A)$$

综合两方面知, $\text{sum}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$.

当 S_A 无上界时:

对任意的 $M > 0$, 存在 $S \subseteq A$, 使得 $\text{sum}(S) > M$. 记 $S = \{a_{s_1}, a_{s_2}, \dots, a_{s_k}\}$, 其中 $s_1 < s_2 < \dots < s_k$. 从而对任意 $n > s_k$

$$\sum_{i=1}^n a_i > \sum_{i=1}^{s_k} a_i \geq \sum_{i=1}^k a_{s_i} = \text{sum}(S)$$

这就是说 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = +\infty = \text{sum}(A)$.

(2) 对任意的 $M > 0$, 我们取

$$S := \left\{ \frac{1}{2} + \frac{i-1}{2n} : i = 1, 2, \dots, n, n = [2M] + 2 \right\}$$

从而

$$\text{sum}(S) \geq n \cdot \frac{1}{2} > M$$

这就是说 S_A 无上界, 从而 $\text{sum}(A) = +\infty$.

(3) 考虑 $T_1 = A \cap (1, +\infty)$, $T_n = A \cap (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$, $n = 2, 3, \dots$. 从而有

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} T_n$$

对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 假设 T_n 不是有限集, 使用类似 (2) 的构造方式, 容易证明 S_{T_n} 无上界, 从而 S_A 无上界, 这与 $\text{sum}(A)$ 是有限数矛盾!

故 T_n 是有限集, 即 A 是可数个有限集的并. 从而 A 至多可数. $\square$

点评 问题 (3) 指出, 在处理不可数个数的和时, 我们不能沿用处理可数个数的和时所使用的无穷级数方法, 这为积分理论, 尤其是勒贝格积分理论的产生提供了动机. 同时, 在概率论中, 这一结果指出了对于连续型随机变量, 其某一点处的概率必须为 0, 从而引发了“概率密度”这一概念的产生.

解答 3.3.1. (1) 因 $S \circ R$ 是从 X 到 Z 的二元关系, 故 $T \circ (S \circ R)$ 是从 X 到 W 的二元关系. 因 $T \circ S$ 是从 Y 到 W 的二元关系, 故 $(T \circ S) \circ R$ 是从 X 到 W 的二元关系. 对任意的 $(x, w) \in X \times W$, 有

$$\begin{aligned} (x, w) &\in T \circ (S \circ R) \\ \iff \exists z \in Z, (x, z) &\in S \circ R \wedge (z, w) \in T \\ \iff \exists z \in Z, \exists y \in Y, (x, y) &\in R \wedge (y, z) \in S \wedge (z, w) \in T \\ \iff \exists y \in Y, \exists z \in Z, (x, y) &\in R \wedge (y, z) \in S \wedge (z, w) \in T \\ \iff \exists y \in Y, (x, y) &\in R \wedge (y, w) \in T \circ S \\ \iff (x, w) &\in (T \circ S) \circ R. \end{aligned}$$

所以 $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$. $\square$

(2) 对任意的 $(x, y) \in X \times Y$, 有

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \iff (y, x) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R.$$

所以 $(R^{-1})^{-1} = R$. $\square$

(3) 对任意的 $(z, x) \in Z \times X$, 有

$$\begin{aligned}
 (z, x) \in (S \circ R)^{-1} &\iff (x, z) \in S \circ R \\
 &\iff \exists y \in Y, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S \\
 &\iff \exists y \in Y, (y, x) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in S^{-1} \\
 &\iff (z, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}
 \end{aligned}$$

所以 $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. □

评注 在数学中, 映射的严格定义是由关系给出的, 请读者自行了解映射的定义. 以上结论对于映射同样成立, 读者可以自行验证.

解答 3.3.2. (1) 我们取定 $m \in \mathbb{N}^+$, 并验证等价关系的三个条件:

(i) 对任意的 $a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a$. 这是因为 $a - a = m \cdot 0$.

(ii) 对任意的 $a, b \in \mathbb{Z}$, 如果 $a \equiv b$, 那么存在 $c \in \mathbb{Z}$ 使得 $a - b = mc$, 从而 $b - a = m(-c)$, 从而 $b \equiv a$.

(iii) 对任意的 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, 如果 $a \equiv b$ 且 $b \equiv c$, 那么存在 $c, d \in \mathbb{Z}$ 使得 $a - b = mc$ 且 $b - c = md$, 从而 $a - c = m(c + d)$, 从而 $a \equiv c$. □

(2) 对于非空集合 X 与其上的等价关系 R , 我们验证划分的三个条件:

(i) 对于任意的 $A \in X/R$, 存在 $x \in X$ 使得 $A = [x]_R$, 由 xRx 知 $x \in A$, 从而 $A \neq \emptyset$.

(ii) 考虑逆否命题. 设 $A, B \in X/R$ 满足 $A \cap B \neq \emptyset$, 则不妨 $x \in A \cap B$. 于是 $y \in A \iff yRx \iff y \in B$, 从而 $A = B$. 进而原命题得证.

(iii) 显见 $\cup_{A \in X/R} A \subseteq X$, 下证 $\cup_{A \in X/R} A \supseteq X$. 事实上, $\forall x \in X$, $x \in [x]_R$ 且 $[x]_R \in X/R$, 从而 $x \in \cup_{A \in X/R} A$. 进而 $\cup_{A \in X/R} A = X$. □

评注 事实上, 命题 2 的“反面”也成立, 即我们可以用集合的划分在其上定义一个等价关系, 这为等价关系提供了实例. 等价关系是数学中的重要概念, 由等价类构成的商集刻画了代数学中的商群、商环, 拓扑学中的商空间等数学对象.

解答 3.3.3. 我们验证等价关系的三个条件:

(i) 对任意的 $A \in U$, $a \sim a$. 这是因为 A 上的恒等映射是 A 到 A 的双射.

(ii) 对任意的 $A, B \in U$, 如果 $A \sim B$, 那么存在 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 从而 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是双射, 从而 $B \sim A$.

(iii) 对任意的 $A, B, C \in U$, 如果 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 那么存在 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是双射, 从而 $g \circ f: A \rightarrow C$ 是双射, 从而 $A \sim C$.

□

解答 3.3.4. (1) 显见 $R' \subseteq R$, 只需证 $R \subseteq R'$.

事实上, 对任意 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in R$, $\exists A_0 \in \mathcal{A}, B_0 \in \mathcal{B}$, 使得存在 $f: A_0 \rightarrow B_0$ 是单射. 于是 $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, $A \sim A_0, B_0 \sim B$, 即存在 $g: A \rightarrow A_0, h: B_0 \rightarrow B$ 是双射. 我们证明 $h \circ f \circ g: A \rightarrow B$ 是单射. 事实上, 由于 f, g, h 都是单射

$$h \circ f \circ g(x_1) = h \circ f \circ g(x_2) \Rightarrow f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$$

$$\Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

这就是说, $h \circ f \circ g: A \rightarrow B$ 是单射. 从而 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in R'$, 故 $R \subseteq R'$. □

(2) 我们验证偏序关系的三个条件:

(i) 对任意的 $\mathcal{A} \in U/\sim$, $\mathcal{A}RA$. 这是因为 $A \sim B$ 蕴涵着存在一个 A 到 B 的单射.

(ii) 对任意的 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in U/\sim$, 若 $\mathcal{A}RB$ 且 $\mathcal{B}RA$, 选取 $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, 则存在 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ 为单射, 由 Bernstein 定理知存在一个从 A 到 B 的双射, 于是 $A \sim B$. 故 $\mathcal{A} = [A]_{\sim} = [B]_{\sim} = \mathcal{B}$.

(iii) 对任意的 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in U/\sim$, 若 $\mathcal{A}RB$ 且 $\mathcal{B}RC$, 选取 $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}$, 则存在 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 为单射, 与 (1) 中类似地可以证明 $g \circ f: A \rightarrow C$ 为单射, 从而 $\mathcal{A}RC$. □

第四章 数列极限

4.1 数列极限的定义与性质

题目 4.1.1 (数学 II, P7). 对于 $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, 定义

$$|a - b| := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

$$a \cdot b := a_1 b_1 + a_2 b_2$$

设 $u_n, v_n, u, v \in \mathbb{R}^2$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - u| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n - v| = 0$. 证明: $u \cdot v = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot v_n$.

题目 4.1.2. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{m+n} \leq x_m x_n, x_n > 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ 存在.

题目 4.1.3 (Stolz 定理). 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足以下两个条件中的任意一个:

(1) $\{y_n\}$ 严格单调增加且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$;

(2) $\{y_n\}$ 严格单调且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

则当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L$ (L 可以是有限数, $+\infty$, $-\infty$) 时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L$$

题目 4.1.4. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 其所有无穷子列均收敛且收敛于同一极限.

题目 4.1.5 (Cesàro 求和). 已知: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n} = a$$

题目 4.1.6. 已知: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1}{n} = ab$$

题目 4.1.7. 记 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 收敛.

题目 4.1.8. 判断以下数列 $\{x_n\} (n = 1, 2, \cdots)$ 的收敛性:

$$(1) x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$$

$$(2) x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n-1)}$$

$$(3) x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

4.2 迭代序列的处理方法

对于形如 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的迭代序列, 我们以下建立一些结论. 这些结论也是处理此种问题的重要方法.

我们给定 $I = [a, b]$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(I) \subseteq I$. 定义序列

$$x_n = \begin{cases} c, & n = 1 \\ f(x_{n-1}), & n \geq 2 \end{cases}$$

题目 4.2.1. 当 f 的单调性被给出时:

- (1) 当 f 单调增加时, 序列 $\{x_n\}$ 单调, 从而它收敛;
- (2) 当 f 单调减少时, 序列 $\{x_n\}$ 有两个单调子列, 且它们单调性相反; 此时序列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它的两个单调子列收敛于相同的值.

题目 4.2.2 (压缩映射原理). 我们称 f 是 **Lipschitz 连续** 的, 如果 $\exists L \in \mathbb{R}$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in I;$$

特别地, 上式中当 $L \in (0, 1)$ 时, 我们称 f 是 I 上的一个**压缩映射**.

我们称 $x_0 \in I$ 是 f 的**不动点**, 如果 $f(x_0) = x_0$.

当 f 是 I 上的一个压缩映射时:

- (1) 若 f 在 I 上有不动点, 则不动点唯一;

(2) 对于任意的 $c \in I$, 序列 $\{x_n\}$ 收敛, 且极限是 f 在 I 上的不动点.

题目 4.2.3. 设数列 $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots,$
 $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\dots+\sqrt{3}}}}$ (n 重根号), $\dots$. 证明该数列收敛并求其极限.

题目 4.2.4. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

题目 4.2.5. 设 $x_1 = a, x_2 = b \neq a, x_{n+2} = tx_n + (1-t)x_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^+, t \in \mathbb{R}$). 对于 t 的不同取值, 讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性.

4.3 Bolzano-Weierstrass 定理

题目 4.3.1. 我们所熟知的 Bolzano-Weierstrass 定理指出, 有界 (实) 数列必有收敛子列. 在此定理的基础上, 请证明以下结论:

- (1) 若有界数列 $\{x_n\}$ 不收敛, 则必存在两个子列收敛于不同的极限.
- (2) 若数列 $\{x_n\}$ 无界, 则必存在一个子列是无穷大量.
- (3) 若数列 $\{x_n\}$ 无界, 但非无穷大量, 则必存在两个子列, 其中一个为无穷大量而另一个收敛.

题目 4.3.2 ($\mathbb{R}^n$ 中的 Bolzano-Weierstrass 定理). $\mathbb{R}^n$ 上的有界数列必有收敛子列. (另一种表述: $\mathbb{R}^n$ 中任一有界无限点集至少有一个极限点.)

4.4 * 闭区间套定理和有限覆盖定理

题目 4.4.1 (闭区间套定理). 设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 满足以下条件:

- 嵌套性: 对任意正整数 n , 有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$;
- 长度收敛性: $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$,

则存在唯一的 ξ , 使得总有 $a_n \leq \xi \leq b_n$.

题目 4.4.2 (有限覆盖定理). 设有任意个开区间, 它们构成了一个集合 H . 如果对于一个数集 S , S 中的任意一个元素都属于 H 中的至少一个区间, 那么称 H 是 S 的一个开覆盖.

设 H 是闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 则必可从 H 中选择有限个开区间形成 $[a, b]$ 的开覆盖.

4.5 解答

解答 4.1.1. 记 $u_n = (u_n^{(1)}, u_n^{(2)})$, $v_n = (v_n^{(1)}, v_n^{(2)})$, $n = 1, 2, \dots$. 又记 $u = (u^{(1)}, u^{(2)})$, $v = (v^{(1)}, v^{(2)})$.

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - u| = 0$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时有

$$|u_n - u| = \sqrt{(u_n^{(1)} - u^{(1)})^2 + (u_n^{(2)} - u^{(2)})^2} < \epsilon$$

于是有

$$|u_n^{(1)} - u^{(1)}| \leq \sqrt{(u_n^{(1)} - u^{(1)})^2 + (u_n^{(2)} - u^{(2)})^2} < \epsilon$$

这就是说 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(1)} = u^{(1)}$. 同理有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(2)} = u^{(2)}$. 类似地我们得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^{(1)} = v^{(1)}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^{(2)} = v^{(2)}$. 由极限的运算法则知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot v_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(1)} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(2)} + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^{(1)} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^{(2)} \\ &= u^{(1)} \cdot v^{(1)} + u^{(2)} \cdot v^{(2)} = u \cdot v \end{aligned}$$

□

解答 4.1.2. 设 $b_n = \sqrt[n]{x_n}$, 需证 $\{b_n\}$ 收敛.

1. 由 $x_n > 0$, 显然 $b_n > 0$, 故 $\{b_n\}$ 有下界 0.
2. 不妨设 $b_n \geq 1$, 反之同理可证.

对任意 $m > n$, 设 $m = qn + r$ ($q \in \mathbb{N}^+$, $0 \leq r < n$). 反复应用条件得:

$$x_m = x_{qn+r} \leq x_{qn} \cdot x_r \leq x_n^q \cdot x_r$$

故有:

$$b_m = \sqrt[m]{x_m} \leq \sqrt[m]{x_n^q \cdot x_r} = b_n^{\frac{nq}{m}} \cdot x_r^{\frac{1}{m}}$$

因 $\frac{nq}{m} = 1 - \frac{r}{m} \leq 1$, 故 $b_n^{\frac{nq}{m}} \leq b_n$; 又 $x_r^{\frac{1}{m}} \rightarrow 1$ ($m \rightarrow \infty$), 从而 $b_m \leq b_n$.

3. 由单调有界定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ 存在. □

解答 4.1.3. 我们仅对 L 为有限数的情形进行证明, 无穷情形类似可证. 以下分别对两种条件进行证明.

情形 1: $\{y_n\}$ 严格单调增加且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L$ (有限) .

由极限定义, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 , 使得当 $n > N_1$ 时,

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - L \right| < \varepsilon.$$

由于 $\{y_n\}$ 严格单调增加, 故 $y_n - y_{n-1} > 0$, 于是

$$(L - \varepsilon)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (L + \varepsilon)(y_n - y_{n-1}).$$

对 $n = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, m$ 累加上述不等式, 得

$$\sum_{n=N_1+1}^m (L - \varepsilon)(y_n - y_{n-1}) < \sum_{n=N_1+1}^m (x_n - x_{n-1}) < \sum_{n=N_1+1}^m (L + \varepsilon)(y_n - y_{n-1}).$$

利用裂项相消, 有

$$(L - \varepsilon)(y_m - y_{N_1}) < x_m - x_{N_1} < (L + \varepsilon)(y_m - y_{N_1}).$$

记 $\xi_m = (x_m - x_{N_1}) - L(y_m - y_{N_1})$, 则 $|\xi_m| < \varepsilon(y_m - y_{N_1})$. 于是

$$x_m = x_{N_1} + L(y_m - y_{N_1}) + \xi_m.$$

从而

$$\frac{x_m}{y_m} = L + \frac{x_{N_1} - Ly_{N_1}}{y_m} + \frac{\xi_m}{y_m}.$$

由于 $y_m \rightarrow +\infty$, 存在 N_2 , 使得当 $m > N_2$ 时, $y_m > \frac{|x_{N_1} - Ly_{N_1}|}{\varepsilon}$ 且 $y_m > y_{N_1}$. 此时

$$\left| \frac{x_{N_1} - Ly_{N_1}}{y_m} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\xi_m}{y_m} \right| < \varepsilon \left(1 - \frac{y_{N_1}}{y_m} \right) < \varepsilon.$$

因此当 $m > \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$\left| \frac{x_m}{y_m} - L \right| \leq \left| \frac{x_{N_1} - Ly_{N_1}}{y_m} \right| + \left| \frac{\xi_m}{y_m} \right| < 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L$. □

情形 2: $\{y_n\}$ 严格单调且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L$ (有限).

首先, 作变换 $x'_n = x_n - Ly_n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n - x'_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - L \right) = 0,$$

且 $\frac{x_n}{y_n} - L = \frac{x'_n}{y_n}$. 故只需证明当差分商的极限为 0 时, 有 $\frac{x'_n}{y_n} \rightarrow 0$. 以下仍记 x'_n 为 x_n , 即假设 $L = 0$.

不失一般性, 设 $\{y_n\}$ 严格单调递减趋于 0 (若递增, 可考虑 $\{-y_n\}$). 令 $\delta_n = y_{n-1} - y_n > 0$, 则 $y_n - y_{n-1} = -\delta_n$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 0$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right| < \varepsilon.$$

于是

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon |y_n - y_{n-1}| = \varepsilon \delta_n = \varepsilon (y_{n-1} - y_n).$$

对任意 $m > n > N$, 有

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{k=n+1}^m |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \sum_{k=n+1}^m (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon (y_n - y_m).$$

令 $m \rightarrow \infty$, 由 $x_m \rightarrow 0$ 和 $y_m \rightarrow 0$, 得

$$|x_n| = |x_n - 0| \leq \varepsilon (y_n - 0) = \varepsilon y_n.$$

因此当 $n > N$ 时, $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, 即原极限为 L . $\square$

解答 4.1.4. 必要性: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ($a \in \mathbb{R}$), 则有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

任取 $\{a_n\}$ 的无穷子列 $\{a_{n_k}\}$, 有:

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

故 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

充分性: 由于 $\{a_n\}$ 是其自身的子列, 由题设条件 (所有无穷子列均收敛), 可知 $\{a_n\}$ 收敛. $\square$

解答 4.1.5. 考虑 $\{y_n\}$ 满足 $y_n = x_n - a$, 从而 $\{y_n\}$ 是无穷小量. 我们只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n}{n} = 0$$

事实上, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $n > N$ 时有 $|y_n| < \frac{\epsilon}{2}$. 我们记 $M = |y_1 + y_2 + \cdots + y_N|$. 取 $N' = \max\{N, [\frac{2M}{\epsilon}] + 1\}$, 从而当 $n > N'$ 时

$$\begin{aligned} \left| \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n}{n} \right| &\leq \left| \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_N}{n} \right| + \left| \frac{y_{N+1} + y_{N+2} + \cdots + y_n}{n} \right| \\ &< \frac{M}{n} + \frac{n-N}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a + \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n}{n} = a$$

$\square$

解答 4.1.6. 令 $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$, 故有:

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{(a + \alpha_1)(b + \beta_n) + (a + \alpha_2)(b + \beta_{n-1}) + \cdots + (a + \alpha_n)(b + \beta_1)}{n} \\ &= ab + a \cdot \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n} + b \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \\ &\quad + \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n} \end{aligned}$$

其中, 第二、三项的极限为 0 (Cesàro 求和). 下证第四项的极限亦为 0:

事实上, 因 $\alpha_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故 $\{\alpha_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得对任意正整数 n , 有 $|\alpha_n| \leq M$. 因此:

$$0 < \left| \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n} \right| \leq M \cdot \frac{|\beta_n| + |\beta_{n-1}| + \cdots + |\beta_1|}{n}$$

由于 $\beta_n \rightarrow 0$, 可知 $\frac{|\beta_1|+|\beta_2|+\cdots+|\beta_n|}{n} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 结合夹逼准则, 第四项的极限为 0. $\square$

解答 4.1.7. 可知

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

由此得到

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$$

于是有

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} < 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0 \end{aligned}$$

这说明数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界, 从而收敛. $\square$

解答 4.1.8. (1) 设 $m > n$, 则

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^m} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln \epsilon}{\ln 2} \right] + 1$, 则当 $m > n > N$ 时, 有 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, 从而有 $|x_m - x_n| < \epsilon$. 故 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 对于任意给定的正数 ϵ , 取

$N = [\log_3(\pi/e)] + 1$ (其中 $[x]$ 表示取整), 则当 $n > m \geq N$ 时, 有

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\cos k!}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \left| \frac{\cos k!}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &< \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{3^m}{m} < \frac{3^N}{N} < e \end{aligned}$$

所以, 根据柯西收敛准则, 数列 $\{a_n\}$ 是收敛的.

(3) 放缩裂项易得 $LHS \leq 2$, 由单调有界原理可知 $\{a_n\}$ 收敛.

解答 4.2.1. (1) 我们对 x_1 与 x_2 的大小关系作分类讨论.

(i) 当 $x_1 \leq x_2$ 时, 我们用数学归纳法证明 $x_n \leq x_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^+$).

当 $n = 1$ 时, 显然成立; 若 $x_k \leq x_{k+1}$, 由于 f 单调增加, 我们有

$$x_{k+1} = f(x_k) \leq f(x_{k+1}) = x_{k+2}$$

从而此时 $\{x_n\}$ 单调增加, 进而它收敛.

(ii) 当 $x_1 > x_2$ 时, 同理得 $\{x_n\}$ 单调减少并收敛. $\square$

(2) 此时注意到 $f \circ f$ 单调增加, 从而由 (1) 的结论知序列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$ 单调. 由于 $x_1 \leq x_3$ 时 $x_2 \geq x_4$, $x_1 \geq x_3$ 时 $x_2 \leq x_4$, 它们单调性相反.

对于命题的后半部分, 我们记 $x_{2n-1} \rightarrow A$, $x_{2n} \rightarrow B$ ($n \rightarrow \infty$).

如果序列 $\{x_n\}$ 收敛, 则

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = B$$

从而这两个单调子列收敛于相同的值.

如果 $A = B$, 对于任意取定的 $\epsilon > 0$, 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$|x_{2n-1} - A| < \epsilon \quad (\forall n > N_1) \quad |x_{2n} - B| < \epsilon \quad (\forall n > N_2)$$

从而对任意的 $n > N = \max\{2N_1 - 1, 2N_2\}$, 我们有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

这就是说序列 $\{x_n\}$ 收敛. $\square$

点评 对于 (1) 小问, 题目 3.2.3 给出了 f 在 I 中存在不动点. 请读者自行证明 $\{x_n\}$ 的极限是 f 在 I 中的一个不动点.

解答 4.2.2. (1) 若不动点存在, 设 x_0, y_0 是 f 在 I 上的不动点, 从而

$$|f(x_0) - f(y_0)| = |x_0 - y_0| \leq L|x_0 - y_0|$$

由 $L \in (0, 1)$ 知 $|x_0 - y_0| = 0$, 即 $x_0 = y_0$, 这就是说 f 在 I 上的不动点唯一. $\square$

(2) 当 $f(c) = c$ 时, $\{x_n\}$ 是常数列且收敛于不动点 c . 否则, 依题意得 $|x_3 - x_2| = |f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$. 进而对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 有

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^{n-1}|x_2 - x_1|$$

于是对任意的 $p \in \mathbb{N}^+$, 我们有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} |x_{n+i+1} - x_{n+i}| \leq \left(\sum_{i=0}^{p-1} L^{n+i-1}\right)|x_2 - x_1| \\ &\leq \left(\sum_{i=n-1}^{\infty} L^i\right)|x_2 - x_1| = \frac{L^{n-1}}{1-L}|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

于是对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在充分大的 $N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $\forall n > N, p \in \mathbb{N}^+$, 有

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$$

由 Cauchy 收敛原理知序列 $\{x_n\}$ 收敛.

记 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 显见 $\xi \in [a, b]$. 我们先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$. 事实上, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 使得对任意的 $n > N$ 有 $|x_n - \xi| < \frac{\epsilon}{L}$, 即

$$|f(x_n) - f(\xi)| \leq L|x_n - \xi| < \epsilon$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$. 于是

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

从而序列 $\{x_n\}$ 收敛于 f 在 I 上的不动点. $\square$

点评 压缩映射原理建立在一般的非空完备度量空间上, 具有重要的理论价值, 本题给出的是它的一个特例.

解答 4.2.3. 依题意得该数列的递推式为 $x_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$). 归纳易得 $x_n \leq 3$, 从而

$$x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n} \leq \sqrt{3 + 3} < 3$$

于是数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界, 故它收敛.

设 $x_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$). 对等式 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ 两边取极限得 $A = \sqrt{3+A}$. 解之得 $A = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

解答 4.2.4. 法一: 对相邻两项作差得到

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = -\frac{1}{x_{n+1}x_n}(x_{n+1} - x_n)$$

我们希望找到 $N \in \mathbb{N}^+$, 使得 $x_n \geq a > 1$ 对任意 $n > N$ 成立.

事实上, $x_n > 1$ ($n > 1$) $\Rightarrow x_n < 2$ ($n > 2$) $\Rightarrow x_n > \frac{3}{2}$ ($n > 3$). 从而对任意的 $n \geq 5, p \in \mathbb{N}^+$, 我们有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq (1 + \frac{4}{9} + \cdots + (\frac{4}{9})^{p-1}) \cdot (\frac{4}{9})^{n-5} |x_6 - x_5| \\ &\leq \frac{9}{5} \cdot (\frac{4}{9})^{n-5} |x_6 - x_5| \end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 与上题类似地可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

法二: 与法一类似地得到 $x_n \in [\frac{3}{2}, 2]$ ($n \geq 4$). 由于 $1 + \frac{1}{x}$ 在 $[\frac{3}{2}, 2]$ 上单调减少, 我们考虑 $x_{n+2} = 2 - \frac{1}{x_{n+1}}$, 它对应的函数 $2 - \frac{1}{x+1}$ 在 $[\frac{3}{2}, 2]$ 上单调增加.

从而数列 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{2n+3}\}$ 与 $\{x_{2n+4}\}$ 单调增加且有上界, 它们收敛于函数 $2 - \frac{1}{x+1}$ 在 $[\frac{3}{2}, 2]$ 上的不动点. 由于方程 $2 - \frac{1}{x+1} = x$ 在 $[\frac{3}{2}, 2]$ 上有唯一解 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 两子列都收敛于 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 从而数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

解答 4.2.5. 由递推式 $x_{n+2} = tx_n + (1-t)x_{n+1}$ 得到

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -t(x_{n+1} - x_n)$$

与压缩映射原理的证明类似地, 我们知道当 $|t| < 1$ 时数列 $\{x_n\}$ 收敛.

当 $|t| \geq 1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 发散. 这是因为此时对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 我们有

$$|x_{n+1} - x_n| = |(-t)^{n-1}(x_2 - x_1)| \geq |b - a| > 0$$

这与数列 $\{x_n\}$ 收敛所要求的 $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 矛盾!

解答 4.3.1. (1) 设 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列收敛于 A . 由 $\{x_n\}$ 不收敛知它不收敛于 A , 于是存在 $\epsilon > 0$, 使得对任意的 $N \in \mathbb{N}^+$, 存在 $n > N$ 使得 $|x_n - A| \geq \epsilon$. 从而构造以下数列:

- 取 $N = 1$, 存在 $n_1 > N$ 使得 $|x_{n_1} - A| \geq \epsilon$.
- 在取定 n_k 后, 存在 $n_{k+1} > n_k$ 使得 $|x_{n_{k+1}} - A| \geq \epsilon$.

于是我们得到了 $\{x_n\}$ 的一个有界子列, 它的每一项与 A 的距离不小于 ϵ . 由 Bolzano-Weierstrass 定理知它存在收敛子列, 这个收敛子列也是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列, 且它一定不收敛于 A . $\square$

(2) 由数列 $\{x_n\}$ 无界可以进一步推知, 对任意的 $N \in \mathbb{N}^+$ 和 $M > 0$, 存在 $n > N$ 使得 $|x_n| > M$. 若不然, 即数列 $\{x_n\}$ 从某项起有界, 则在这之前的有限项及这之后的子列的一个上界中绝对值最大的将成为整个数列的上界.

从而我们用与 1 中类似地方法构造以下数列:

- 取 $N = 1, G = 1$, 存在 $n_1 > N$ 使得 $|x_{n_1}| > 1$.
- 在取定 n_k 后, 取 $N = n_k, G = k + 1$, 存在 $n_{k+1} > n_k$ 使得 $|x_{n_{k+1}}| > k + 1$.

以此法我们得到了数列 $\{x_n\}$ 的一个子列, 它是一个无穷大量. $\square$

(3) 由 2 知数列 $\{x_n\}$ 必有一个子列是无穷大量. 由于数列 $\{x_n\}$ 不是无穷大量, 于是存在 $G > 0$, 使得对任意的 $N \in \mathbb{N}^+$, 存在 $n > N$ 使得 $|x_n| \leq G$. 从而构造以下数列:

- 取 $N = 1$, 存在 $n_1 > N$ 使得 $|x_{n_1}| \leq G$.
- 在取定 n_k 后, 存在 $n_{k+1} > n_k$ 使得 $|x_{n_{k+1}}| \leq G$.

以此法我们得到了数列 $\{x_n\}$ 的一个有界子列, Bolzano-Weierstrass 定理指出它有收敛子列. $\square$

解答 4.3.2. 下面将 Bolzano-Weierstrass 定理从 $\mathbb{R}$ 推广至 $\mathbb{R}^n$.

从 $\mathbb{R}^n$ 中任一有界无限点集 E 取出互异点列 x_k , 显然, $\{x_k\}$ 与 $\{x_k\}$ 的第 i ($i = 1, 2, \dots$) 个坐标所形成的数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 均有界.

那么, 根据在 $\mathbb{R}$ 上定义的 Bolzano-Weierstrass 定理, 我们可以从 $\{\xi_1^{(k)}\}$ 选出子列 $\{x_k^{(1)}\}$, 使得该子列的第一项坐标形成的数列为收敛列.

以此类推, 我们可以得到 $\{x_k^{(2)}\}$, 使得该子列的第二项坐标形成的数列为收敛列.

... ..

到第 n 步, 得到 $\{x_k^{(n)}\}$, 使得其一切坐标形成的数列均为收敛列, 从而知 $\{x_k^{(n)}\}$ 是一个收敛点列.

设其极限为 x . 因为 $\{x_k^{(k)}\}$ 是互异点列, 故 x 为 E 的极限点. $\square$

解答 4.4.1. 数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 数列 $\{b_n\}$ 单调递减有下界. 由单调有界定理, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 均存在. 下证满足条件的 ξ 唯一:

设 ξ' 也满足

$$a_n \leq \xi' \leq b_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由条件, 有:

$$|\xi - \xi'| \leq b_n - a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

得:

$$|\xi - \xi'| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

故有 $\xi = \xi'$. $\square$

解答 4.4.2. 用反证法. 将 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

其中至少有一个区间不能被 H 的有限子族覆盖 (否则两个都能有限覆盖的话, 整个 $[a, b]$ 就能有限覆盖, 与反证假设矛盾). 选取一个这样的区间, 记为 $[a_1, b_1]$.

再对 $[a_1, b_1]$ 二等分, 同理至少有一个子区间不能被有限覆盖, 选取它作为 $[a_2, b_2]$. 继续这个过程, 得到一系列闭区间 $[a, b] \subseteq [a_1, b_1] \subseteq [a_2, b_2] \subseteq \dots$ 满足:

1. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$
2. 每个 $[a_n, b_n]$ 都不能被 H 的有限子族覆盖.

由闭区间套定理, 存在唯一的 $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset [a, b]$.

因为 H 是 $[a, b]$ 的开覆盖, 所以存在开集 $H_0 \in H$ 使得 $c \in H_0$. H_0 是开集, 所以存在 $\epsilon > 0$ 使得开区间 $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset H_0$.

当 n 足够大时, $b_n - a_n \leq \epsilon/2$, 并且 $c \in [a_n, b_n]$, 容易推出

$$[a_n, b_n] \subset (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset H_0$$

因为 H_0 本身是 H 中的一个开集, 所以单独的 H_0 就是 H 的一个有限子族, 它覆盖了 $[a_n, b_n]$.

这与 $[a_n, b_n]$ 的选取性质 (不能被 H 的有限子族覆盖) 矛盾. 因此, 反证假设不成立, 即 $[a, b]$ 一定能被 H 的某个有限子族覆盖. $\square$

第五章 函数极限

5.1 函数极限的定义与性质

题目 5.1.1. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在任一闭区间上有界, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$$

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.

定义 5.1.1. (振幅) 设函数 f 在 x_0 的某个邻域内有定义, 令

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in U(x_0, \delta)\}$$

我们称 $\omega_f(x_0)$ 为 f 在 x_0 处的振幅.

定义 5.1.2. (上半连续) 设函数 f 在 x_0 的某个邻域内有定义, 我们称 f 在 x_0 处上半连续, 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x \in U(x_0, \delta)$, 有 $f(x) < f(x_0) + \epsilon$.

题目 5.1.2. 为了讨论方便, 我们以下假定 f 有界.

- (1) 证明 f 在 x_0 处的振幅是良定的, 即其定义式中的极限存在.
- (2) (数学 II, P1) 证明 f 在 x_0 处连续, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 当且仅当 $\omega_f(x_0) = 0$.
- (3) 举出反例说明 ω_f 不一定连续, 并证明 ω_f 是上半连续的.

5.2 *Lipschitz 连续

定义 5.2.1 (Lipschitz 连续). 设函数 f 在区间 I 上有定义, 若存在 $L \in \mathbb{R}$, 使得:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in I$$

则称 f 在区间 I 上 Lipschitz 连续.

定义 5.2.2 (一致连续). 设函数 f 在区间 I 上有定义, 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得在区间 I 上的任意两点 x' 和 x'' , 当满足 $|x' - x''| < \delta$ 时, $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ 恒成立, 则称函数 f 在区间 I 上一致连续.

题目 5.2.1. 设函数 f 在区间 I 上有定义, 若 f 在区间 I 上 Lipschitz 连续, 则 f 在区间 I 上一致连续.

题目 5.2.2 (数学 I, P15). 设非空集合 $A \subseteq \mathbb{R}$, 定义映射 $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$d(x) = \inf\{|x - y|; y \in A\}$$

求证 d 是 Lipschitz 连续的.

题目 5.2.3. (1) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数, 且存在常数 $L > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明函数 $g(x) = |f(x)|$ 也是 Lipschitz 连续的, 并确定其 Lipschitz 常数 L .

(2) 设 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 都是 Lipschitz 连续函数, 且分别满足:

$$|f(x) - f(y)| \leq L_1|x - y|, \quad |g(x) - g(y)| \leq L_2|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

假设 f 和 g 都是有界函数, 即存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 证明: 乘积函数 $h(x) = f(x)g(x)$ 也是 Lipschitz 连续的.

5.3 解答

解答 5.1.1. 用反证法. 假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ 不成立, 即存在 $M_0 > 0$, 使得对任意的 $X > 0$, 存在 $x > X$ 满足 $|f(x)| < M$. 从而我们取 $X_1 = 1$ 得到 x_1 , 归纳地取 $X_{n+1} = x_n$, 得到一个正无穷大量 $\{x_n\}$ 满足 $|f(x_n)| < M_0$.

从而由于 f 在 $[-M_0, M_0]$ 上有界, 我们知道 $\{f(f(x_n))\}$ 是一个有界数列, 这与 Heine 归结原理所要求的 $f(f(x_n)) \rightarrow +\infty$ ($x_n \rightarrow +\infty$) 矛盾!

□

解答 5.1.2. (1) 给定 f 和 x_0 , 我们对使得 f 在 $U(x_0, \delta)$ 内有定义的 δ 定义

$$g(\delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in U(x_0, \delta)\}$$

从而只需证明 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} g(\delta)$ 存在.

我们先证明 g 是增函数. 事实上, 对任意的 $\delta_1 < \delta_2$, 显见

$$\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in U(x_0, \delta_1)\} \subseteq \{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in U(x_0, \delta_2)\}$$

从而 $g(\delta_1) \leq g(\delta_2)$.

我们再证明 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} g(\delta) = \inf g$. 事实上, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 δ_0 使得 $g(\delta_0) < \inf g + \epsilon$, 从而对任意的 $\delta \in (0, \delta_0)$ 有 $0 \leq g(\delta) - \inf g < \epsilon$. 这就是说 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} g(\delta) = \inf g$.

(2) 必要性. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得对任意 $x', x'' \in U(x_0, \delta_0)$, 有

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

于是当 $\delta < \delta_0$ 时, 对任意 $x', x'' \in U(x_0, \delta)$ 有

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x'') - f(x_0)| < \epsilon$$

故 ϵ 是 $\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in U(x_0, \delta)\}$ 的一个上界, 这就是说 $g(\delta) < \epsilon$, 于是由极限定义知 $\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} g(\delta) = 0$.

充分性. 我们固定 $x'' = x_0$, 于是对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $\delta < \delta_0$ 时有

$$|f(x') - f(x_0)| \leq g(\delta) < \epsilon$$

这就是说 f 在 x_0 处连续.

(3) 反例: 取 $f = \text{sgn}$, 即

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

此时有

$$\omega_f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

也就是说 f 的跳跃间断点对应着 ω_f 的可去间断点.

下面我们证明 ω_f 是上半连续的. 事实上, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in U(x_0, 2\delta)\} < \omega_f(x_0) + \epsilon$$

从而对任意的 $x \in U(x_0, \delta)$, 我们有 $U(x, \delta) \subseteq U(x_0, 2\delta)$, 故

$$\sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in U(x, \delta)\} < \omega_f(x_0) + \epsilon$$

这就是说 $\omega_f(x) < \omega_f(x_0) + \epsilon$. □

评注 振幅这一概念对于函数的连续性作出了深刻的刻画, 有助于人们进一步研究函数的连续点集的性质. 事实上, 本题中 (3) 的逆命题也是成立的, 即任一定义在开集上的非负上半连续函数都是某个函数的振幅.

解答 5.2.1. 设 f 是 Lipschitz 连续的, 则存在常数 $L \geq 0$, 使得对任意 $x, y \in I$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

考虑两种情况:

1. 若 $L = 0$:

则对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $|f(x) - f(y)| = 0$, 即 f 为常数函数. 显然常数函数一致连续.

2. 若 $L > 0$:

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$. 则当 $|x - y| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

故 f 一致连续.

综上, f 在两种情况下均一致连续. $\square$

解答 5.2.2. 我们先给出这样一个引理: 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, 集合 A 是 I 的非空子集. 如果

$$f(x) \geq y \quad (\forall x \in A)$$

那么

$$\inf_{x \in A} f(x) \geq y.$$

引理的证明: 用反证法. 假设 $\inf_{x \in A} f(x) < y$, 则由下确界的定义:

$$\exists x_0 \in A, f(x_0) < y$$

这与 $f(x) \geq y \quad (\forall x \in A)$ 矛盾! 于是引理得证.

回到原题. $\forall x, z \in \mathbb{R}, y \in A$:

$$\inf_{y \in A} |x - y| \leq |x - y| \leq |z - y| + |x - z|$$

由引理:

$$\inf_{y \in A} |x - y| \leq \inf_{y \in A} |z - y| + |x - z|$$

即

$$d(x) - d(z) \leq |x - z|$$

同理可得 $d(z) - d(x) \leq |z - x| = |x - z|$, 于是 $\exists L = 1$, $|d(x) - d(y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. 这就是说, d Lipschitz 连续. $\square$

解答 5.2.3. (1) 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 由三角不等式和已知条件得:

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

因此 $g(x) = |f(x)|$ 是 Lipschitz 连续的, 且 Lipschitz 常数不超过 L (实际上可取为 L) .

(2) 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq M \cdot L_2|x - y| + M \cdot L_1|x - y| \\ &= M(L_1 + L_2)|x - y|. \end{aligned}$$

因此 h 是 Lipschitz 连续的, Lipschitz 常数为 $M(L_1 + L_2)$. □

(注: 若无有界性条件, 乘积函数不一定保持 Lipschitz 连续性.)

参考文献

- [1] 陈虎民. 少年班数学讲义. 2023.
- [2] 陆亚明. 数学分析入门（上册）. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [3] 陈纪修等. 数学分析（上册）. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [4] 周民强. 实变函数论. 北京: 北京大学出版社, 2016.
- [5] 余志坤. 全国大学生数学竞赛解析教程（数学专业类）（上册）. 北京: 科学出版社, 2024.
- [6] 林源渠等. 数学分析解题指南. 北京: 北京大学出版社, 2003.