



chm 笔记

“紫罗兰” 整理

作者：紫罗兰

组织：少年班 240X

时间：April 30, 2026

版本：0.0.2



基于“紫罗兰”课堂笔记整理。让我们高呼：紫罗兰 sama 万岁!!!
(紫罗兰 sama 并不想透露姓名或者网名，故而使用此方法发布)

目录

第一章 数列极限	1
1.1 常用结论与证明	1
1.2 Stolz 定理及其推论	3
第二章 函数极限	5
2.1 幂根极限与复合函数极限	5
2.2 两个重要极限	5
2.3 等价无穷小	6
2.4 单侧极限与单调函数的极限	7
第三章 函数的连续性与间断点	9
3.1 连续性的定义	9
3.2 连续性的等价描述与命题	9
3.3 连续性的判别准则 (Heine 海涅定理)	10
3.4 连续函数的性质	10
3.5 连续函数的运算	11
3.6 间断点的分类	11
3.7 单调函数间断点的可数性	13
第四章 实数系基本定理与闭区间连续函数的性质	14
4.1 实数连续性与子列定理	14
4.2 闭区间连续函数的性质	14
4.3 综合例题	15
第五章 连续函数的反函数	17
5.1 预备命题	17
5.2 开区间上的反函数	17
5.3 闭区间与半开半闭区间的反函数	18
第六章 导数的定义与求导法则	20
6.1 导数的定义	20
6.2 导数的性质与左/右导数	21
6.3 求导法则	21
6.4 反函数求导法则	22
6.5 链式法则记号与例题	22
第七章 微分中值定理	24
7.1 导数的应用与基本例题	24
7.2 Fermat 引理与 Rolle 定理	24
7.3 Lagrange 中值定理与 Cauchy 中值定理	25
7.4 定理的应用与补充例题	25
第八章 高阶导数与泰勒公式	27
8.1 高阶导数的定义	27

8.2 高阶导数的求导法则	28
8.3 Heine 定理的应用	29
8.4 Taylor 展开式	29
8.5 构造函数法 (中值定理应用)	30
第九章 函数的单调性与极值	31
9.1 函数的单调性	31
9.2 函数的极值	31
第十章 凸函数与琴生不等式	33
10.1 凸函数的定义与基本性质	33
10.2 Jensen (琴生) 不等式	34
10.3 凸函数的极值性质	34
10.4 综合例题	34

第一章 数列极限

内容提要

- 数列极限的常用结论 (1-10)
- 夹逼定理与二项式展开法
- 递推式法求极限
- Stolz 定理及其推论
- Cauchy 命题

1.1 常用结论与证明

定理 1.1 (结论 1)

若 $|a| > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^n} = 0$ 。

定理 1.2 (结论 2)

若 $|a| > 1$ ($a > 1$), 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ 。

证明 证法一 (二项式展开法): 令 $a = 1 + h$ ($h > 0$), 则由二项式展开有:

$$a^n = (1 + h)^n > \frac{1}{2}n(n-1)h^2$$
$$\therefore 0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2} \rightarrow 0$$

由夹逼定理得, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ 。

证法二 (递推式法): 令 $x_n = \frac{n}{a^n}$, 则 $x_{n+1} = \frac{n+1}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{a} x_n$ 。由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$, 得 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} < 1$ 。即 $n > N$ 时 $x_{n+1} < x_n$ 。又 $x_n \geq 0$, 故数列 $\{x_n\}$ 单调有界, 必存在极限。记 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$, 则对递推式两边取极限有 $A = \frac{1}{a}A \implies A = 0$ 。得证。

定理 1.3 (结论 3)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ 。

证明 证法一: 记 $n^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n$, 显然 $h_n \geq 0$ 。

$$\therefore n = (1 + h_n)^n \geq \frac{1}{2}n(n-1)h_n^2$$

于是 $0 \leq h_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$)。由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n^2 = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$ 。故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1$ 。

证法二 (均值不等式夹逼):

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} = \underbrace{(1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n})}_{n-2 \text{ 个}}^{\frac{1}{n}} < \frac{(n-2) + 2\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$$

由夹逼定理得证。

定理 1.4 (结论 4)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ ($a > 0$)。

证明 证法一:

1. 若 $a = 1$, 显然成立。
2. 若 $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}}}$ 。由于 $\frac{1}{a} > 1$, 由 ③ 可知极限为 1。
3. 若 $a > 1$, 记 $a^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n$, 则 $h_n > 0$ 。即证 $h_n \rightarrow 0$:

$$\because a = (1 + h_n)^n \geq nh_n$$

即 $0 < h_n \leq \frac{a}{n}$ 。由夹逼定理得 $h_n \rightarrow 0$ 。

证法二 (均值不等式):

$$1 \leq a^{\frac{1}{n}} = \underbrace{\left(1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot a\right)^{\frac{1}{n}}}_{n-1 \text{ 个}} \leq \frac{(n-1) + a}{n} \rightarrow 1$$

定理 1.5 (结论 5)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \text{ 其中 } a > 1, k \in \mathbb{N}^*.$$

证明

$$\frac{n^k}{a^n} = \left[\frac{n}{(\sqrt[n]{a})^n} \right]^k$$

因为 $a > 1 \implies \sqrt[n]{a} > 1$, 由结论 1.2 得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{a})^n} = 0$, 则原式极限为 0, 得证。

定理 1.6 (结论 7)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \text{ 其中 } \alpha > 0, a > 1.$$

证明 $\exists k > \alpha$ ($k \in \mathbb{N}^*$), 由上述第 5 条结论即可推证。

定理 1.7 (结论 8)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \quad (\forall c \in \mathbb{R}).$$

证明 存在 $m \in \mathbb{N}^*$, 使得 $m > |c|$ 。则:

$$\left| \frac{c^n}{n!} \right| = \frac{|c|}{1} \cdot \frac{|c|}{2} \cdots \frac{|c|}{m} \cdots \frac{|c|}{n}$$

记 $\frac{|c|^m}{m!} = M$, 则有 $0 \leq \left| \frac{c^n}{n!} \right| \leq M \cdot \left(\frac{|c|}{m} \right)^{n-m} \rightarrow 0$ (因 $\frac{|c|}{m} < 1$)。由夹逼定理得证。

定理 1.8 (Cauchy 命题, 结论 9)

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 。

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|}{n} + \frac{|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \end{aligned}$$

又 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|}{n} = 0$, 故存在 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 前一部分 $< \varepsilon$ 。后一部分由于各项均小于 ε , 整体小于 $\frac{n-N}{n} \varepsilon < \varepsilon$ 。综上可证原式。

定理 1.9 (结论 10)

若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = AB.$$

♡

证明 证法一: 令 $a_n = A + \alpha_n, b_n = B + \beta_n$, 其中 α_n, β_n 为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量。则:

$$\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = AB + A \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n} + B \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1 \beta_n + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n}$$

由 Cauchy 命题得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n} = 0$ 。故只需证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n} = 0$ 。

$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, 故 $\exists M > 0$, 使得 $|\alpha_n| \leq M \quad (\forall n)$ 。从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\alpha_1 \beta_n + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n} \right| \leq \frac{|\alpha_1| |\beta_n| + \cdots + |\alpha_n| |\beta_1|}{n} \\ &\leq M \cdot \frac{|\beta_1| + \cdots + |\beta_n|}{n} \end{aligned}$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n| = 0$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\beta_1| + \cdots + |\beta_n|}{n} = 0$ 。夹逼定理得证。

证法二: 取 $M > 0$, 满足 $b_n < M$ 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n| + a_n}{n} = 0, \quad \text{故} \quad \frac{|a_1| + a_1 - A}{n} = 0, \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - A|}{n} = 0, \quad A = 0.$$

注 无穷小量: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 为 $n \rightarrow +\infty$ 时的无穷小量, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量。

1.2 Stolz 定理及其推论

定理 1.10 (chm: Stolz 定理)

1. 若 $\{y_n\}$ 严格递增, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ (a 可为有限数或 ∞), 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$ 。
2. 若 $\{y_n\}$ 严格递减, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$; 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$ 。

♡

证明 [定理 (1) 的证明] 设 $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a + \alpha_n$, 其中 α_n 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ 。则 $x_n - x_{n-1} = (a + \alpha_n)(y_n - y_{n-1})$ 。累加得:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=2}^n (a + \alpha_k)(y_k - y_{k-1}) = x_1 + a(y_n - y_1) + \sum_{k=2}^n \alpha_k (y_k - y_{k-1})$$

于是

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| = \left| \frac{x_1 - ay_1}{y_n} + \frac{1}{y_n} \sum_{k=2}^n \alpha_k (y_k - y_{k-1}) \right| \leq \left| \frac{x_1 - ay_1}{y_n} \right| + \frac{1}{y_n} \sum_{k=2}^n |\alpha_k| (y_k - y_{k-1})$$

利用 $y_n \rightarrow +\infty$ 且极限分为前 N 项和后部无穷小项, 类似于 Cauchy 命题的证明, 从而证得极限存在并取值为 a 。

例题 1.1 已知 $x_1 > 0, a > 0, x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right)$ 。证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求值。

解 记 $n \geq 2$ 时, 由均值不等式:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(x_n + x_n + x_n + \frac{a}{x_n^3} \right) \geq \sqrt[4]{x_n \cdot x_n \cdot x_n \cdot \frac{a}{x_n^3}} = \sqrt[4]{a}$$

即 $\{x_n\}$ 有下界。

又考察单调性:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{a}{x_n^3} \right) \leq \frac{1}{3} \left(2 + \frac{a}{a} \right) = 1$$

故 $\{x_n\}$ 单调递减且有界。记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则

$$A = \frac{1}{4} \left(3A + \frac{a}{A^3} \right) \quad (A > 0)$$

解方程得 $A = \sqrt[4]{a}$ 。

推论 1.1 (Stolz 定理的推论)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ 都存在。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$ 。
2. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $x_n > 0$ 且 $\{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\}$ 收敛。若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$ 。

证明 [推论 (2) 的证明思路] 利用调和平均 $\leq$ 几何平均 $\leq$ 算术平均, 即:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

两端极限均为 a , 由夹逼定理得证。

3. 若 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在。则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 。

证明 [推论 (3) 的证明] 令 $a_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$, 则 $x_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ 。

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim a_n = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

例题 1.2 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^2}{2^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot \left(\frac{2^3}{2^3 - 1} \right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\frac{2^n}{2^n - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

解 取对数处理, 令乘积为 x_n 。

$$\ln x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2^2}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{2^3}{2^3 - 1} + \cdots + \frac{1}{2^1} \ln \frac{2^n}{2^n - 1}$$

提出公因子整理:

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\ln \frac{2^2}{2^2 - 1} + 2 \ln \frac{2^3}{2^3 - 1} + \cdots + 2^{n-2} \ln \frac{2^n}{2^n - 1} \right)$$

由 Stolz 定理得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \cdot \ln \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} - 1}}{2^{n-1} - 2^{n-2}} = \ln \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

第二章 函数极限

内容提要

- 幂根极限与复合函数极限
- 两个重要极限: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ 与 $(1 + \frac{1}{x})^x \rightarrow e$
- 等价无穷小与等价代换法则
- 常用等价关系与计算例题
- 单侧极限与单调函数的极限性质
- 常用极限公式补充

2.1 幂根极限与复合函数极限

命题 2.1

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$.

证明 [证明要点]

1. 当 $A = 0$ 时: 利用定义, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 ε^n 作为 $f(x)$ 的误差限。
2. 当 $A \neq 0$ 时: 利用恒等式 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \cdots + b^{n-1})$ 对分子进行有理化处理, 进而证明

$$|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{A}| \leq C|f(x) - A| < \varepsilon.$$

命题 2.2 (复合函数求极限法则)

设 $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. 若在 t_0 的某个去心邻域内满足 $g(t) \neq x_0$, 则:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

2.2 两个重要极限

定理 2.1 (重要极限 I)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

证明 [几何证明]

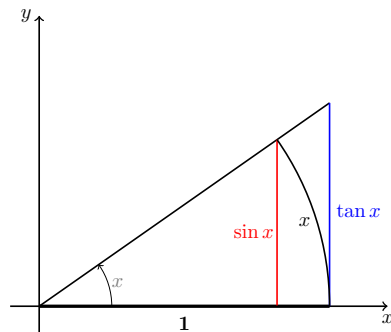
在单位圆中, 考虑第一象限角度 $x \in (0, \pi/2)$ 。比较面积: $\triangle AOD$ 的面积 $<$ 扇形 AOD 的面积 $<$ $\triangle AOB$ 的面积。

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

得: $\sin x < x < \tan x \implies \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ 。

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 及夹逼定理知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

(注: 由于 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 故 $x \rightarrow 0^-$ 时结论同样成立。)



定理 2.2 (重要极限 II)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

证明 先利用数列极限定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 再通过夹逼性 $[x] \leq x < [x] + 1$ 推广到函数情形。

推论 2.1

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \ln e = 1.$$

2.3 等价无穷小

定义 2.1

若 $\lim \frac{f}{g} = 1$, 则称 f 与 g 是等价无穷小, 记作 $f \sim g$ 。

定理 2.3 (等价代换法则)

若 $f \sim f_1$, $g \sim g_1$, 且 $\lim \frac{f_1}{g_1}$ 存在, 则:

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f_1}{g_1}.$$

性质 [常用等价关系 ($x \rightarrow 0$)]

1. $\sin x \sim x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$
2. $\ln(1+x) \sim x$
3. $e^x - 1 \sim x$
4. $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
5. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

2.3.1 计算例题

例题 2.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

解

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^3 \cos x}$$

代换: $\sin x \sim x$, $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, $\cos x \rightarrow 1$ 。

$$\text{结果} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

例题 2.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$

解 利用有理化或 $x = (1+x) - 1 = (\sqrt[n]{1+x} - 1)(\sqrt[n]{1+x}^{n-1} + \cdots + 1)$ 。当 $x \rightarrow 0$ 时, 括号内 n 项均趋于 1。

$$\text{结果} = \frac{1}{n}.$$

例题 2.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\tan^2 x}$

解

$$\ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2, \quad \tan^2 x \sim x^2.$$

$$\text{结果} = \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

2.4 单侧极限与单调函数的极限

2.4.1 单侧极限的定义

定义 2.2 (左极限)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。若 x_0 是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点。对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)$ 时, 恒有 $|f(x) - a| < \varepsilon$ 。称 a 为 f 在 x_0 点的左极限, 记作 $f(x_0^-)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ 。

定义 2.3 (右极限)

类似地, 若 x_0 是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点, 定义右极限 $f(x_0^+)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ 。

定义 2.4 (无穷大单侧极限)

设 $f(x)$ 在 $(a, a + \eta)$ 有定义。若 $\forall E > 0, \exists \delta > 0$, 当 $a < x < a + \delta$ 时, 有 $f(x) > E$, 则称

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty.$$

该数集无界, $\sup B = +\infty$ 。

命题 2.3

设 x_0 既是左聚点又是右聚点。则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 的充要条件是:

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = a.$$

注 极限存在当且仅当左右极限相等。

2.4.2 单调函数的单侧极限

定理 2.4 (单调函数的单侧极限)

设 $f(x)$ 在开区间 $(a - \eta, a)$ 上递增 (减)。则单侧极限总存在。即

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup_{x \in (a - \eta, a)} f(x) \quad / \quad \inf_{x \in (a - \eta, a)} f(x).$$

证明 [以 $f(x)$ 在 $(a - \eta, a)$ 上递增为例]

1. 若 $\sup_{x \in (a - \eta, a)} f(x) = +\infty$, 则 $\forall E > 0, \exists x_E \in (a - \eta, a)$, 满足 $f(x_E) > E$ 。取 $\delta = a - x_E$, 则对于 $a > x > a - \delta = x_E$, 就有 $f(x) > f(x_E) > E$ 。即 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty = \sup f(x)$ 。
2. 若 $\sup_{x \in (a - \eta, a)} f(x) = A < +\infty$ 。则 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in (a - \eta, a)$, 满足 $A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq A$ 。设 $\delta = a - x_\varepsilon$ 。则对于 $x \in (a - \delta, a)$: 有 $a > x > a - \delta = x_\varepsilon$ 。由单调性:

$$A \geq f(x) \geq f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A = \sup_{x \in (a - \eta, a)} f(x).$$

命题 2.4

设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in (a, b)$ 且 $f \uparrow$ 。

1. 设 $x_0 \in (a, b)$, 则 $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ 。
2. $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 \implies f(x_1^+) \leq f(x_2^-)$ 。

证明

1. $\because f \uparrow: f(x) \leq f(x_0) \forall x \in (a, x_0) \implies f(x_0^-) = \sup f \leq f(x_0)$ 。

2. 记 $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$, 则

$$f(x_1^+) = \inf_{x \in (x_1, x_3)} f \leq f(x_3), \quad f(x_2^-) = \sup_{x \in (x_3, x_2)} f \geq f(x_3).$$

因此 $f(x_1^+) \leq f(x_2^-)$ 。

2.4.3 常用极限公式补充

以下常用极限公式在后续导数章节中频繁使用:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; 令 $y = -x$, 则

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_b(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln b} = \frac{1}{\ln b} \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} (b > 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln b} - 1}{x} = \ln b$ 。

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^{n \ln a}} = 0 \quad (a > 1, k \in \mathbb{N}^*)$ 。即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$ 时,

$$0 < \frac{x^k}{a^x} < \varepsilon \iff \frac{x^k}{a^x} < \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^k}{a^{\lfloor x \rfloor}} < \varepsilon$$

取 $x_0 = N, k > a$, 有 $0 < \frac{x^k}{a^x} \leq \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^k}{a^{\lfloor x \rfloor}} \leq \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^k}{a^{\lfloor x \rfloor}} < \varepsilon$ 。即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$ 。

第三章 函数的连续性与间断点

内容提要

- 连续性的 ε - δ 定义与等价描述
- Heine 定理 (海涅定理)
- 连续函数的局部性质: 有界性、保号性
- 连续函数的四则运算与复合
- 间断点的分类: 第一类与第二类
- 单调函数间断点的可数性定理

3.1 连续性的定义

定义 3.1 (函数在一点连续)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in A$ 。若对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 恒有:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 点连续。

定义 3.2 (连续函数)

若 f 在集合 A 中的每一点处都连续, 则称 f 为 A 上的连续函数。记为: $f \in C(A)$ 。

3.1.1 例题

例题 3.1 证明常函数 $f(x) \equiv C$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

证明 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则 $|f(x) - f(x_0)| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ 。

例题 3.2 证明线性函数 $f(x) = kx + b$ ($k \neq 0$) 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$ 。当 $|x - x_0| < \delta$ 时:

$$|f(x) - f(x_0)| = |(kx + b) - (kx_0 + b)| = |k||x - x_0| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon.$$

例题 3.3 证明符号函数 (Heaviside) 在 $x = 0$ 处不连续:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

证明 [反证法] 假设 $H(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, $|H(x) - H(0)| < \frac{1}{2}$ 。但取 $x = \delta/2$ 时, $|H(\delta/2) - H(0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$, 矛盾。

3.2 连续性的等价描述与命题

命题 3.1

设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$ 。 f 在 x_0 连续的充要条件是: 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

命题 3.2

1. 若 x_0 为 A 的孤立点, 则 f 在 x_0 点必然连续。

2. 若 x_0 为 A 的聚点, 则 f 在 x_0 点连续的充要条件是:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

注

- 孤立点总是连续的 (因为找不到足够近的其他点来破坏定义)。
- 通常我们讨论函数极限时, 往往要求 $x \rightarrow x_0$ 且 $x \neq x_0$; 但对于连续性, 必须要求函数在该点有定义。

3.3 连续性的判别准则 (Heine 海涅定理)

定理 3.1 (Heine 定理)

下列叙述等价:

1. f 在 x_0 处连续。
2. 对于任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\} \subset A$, 恒有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ 。

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 由连续性知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 $|x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 。又因 $x_n \rightarrow x_0$, 故 $\exists N$, 当 $n > N$ 时有 $|x_n - x_0| < \delta$ 。此时 $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, 证毕。

(ii) $\Rightarrow$ (i) (反证法): 若 f 在 x_0 不连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \delta_n = \frac{1}{n}$, 总能找到 $x_n \in A$, 虽然 $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ 。这构造了一个数列 $x_n \rightarrow x_0$, 但 $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$, 与条件 (ii) 矛盾。

3.4 连续函数的性质

3.4.1 限制性与局部性质

命题 3.3 (限制性)

若 f 在 x_0 连续, 且 $B \subset A, x_0 \in B$, 则限制函数 $f|_B$ 在 x_0 也连续。

命题 3.4 (局部性)

f 在 x_0 点的连续性只取决于 f 在 x_0 某个小邻域内的性质。

3.4.2 局部有界性

命题 3.5

若 f 在 x_0 连续, 则 f 在 x_0 的某个邻域内是有界的。

证明 取 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in A \cap U(x_0, \delta)$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq 1$ 。从而 $|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1$, 即在该邻域上有界。

注 连续并不代表全局有界 (例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上连续但无界)。

3.4.3 局部保号性

命题 3.6

设 f 在 x_0 连续且 $f(x_0) > a$ (或 $< a$)，则存在 $\delta > 0$ ，使得对于 $\forall x \in A \cap U(x_0, \delta)$ ，恒有 $f(x) > a$ (或 $< a$)。

证明 设 $\varepsilon = f(x_0) - a > 0$ 。由连续性，存在 $\delta > 0$ ，使得 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 。即 $f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - (f(x_0) - a) = a$ 。

3.5 连续函数的运算

命题 3.7 (四则运算)

设 f, g 在 x_0 连续，则：

1. $\alpha f + \beta g$ 在 x_0 连续 ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)。
2. $f \cdot g$ 在 x_0 连续。
3. 若 $g(x_0) \neq 0$ ，则 f/g 在 x_0 连续。

证明 [和之证明] $\forall \varepsilon > 0$ ，由于 f, g 连续，分别存在 δ_1, δ_2 满足条件。取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ，则：

$$|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)| \leq |\alpha| |f(x) - f(x_0)| + |\beta| |g(x) - g(x_0)|$$

通过选取足够小的 δ ，可以使右端项 $< \varepsilon$ 。

命题 3.8 (复合函数连续性)

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow \mathbb{R}$ 。若 f 在 x_0 连续，且 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 连续，则复合函数 $g \circ f$ 在 x_0 连续。

证明 $\forall \varepsilon > 0$ ，由 g 在 y_0 连续， $\exists \eta > 0$ ，使得当 $|y - y_0| < \eta$ 时， $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ 。对于此 η ，由于 f 在 x_0 连续， $\exists \delta > 0$ ，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时， $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ 。代入得：当 $|x - x_0| < \delta$ 时， $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ 。得证。

3.6 间断点的分类

3.6.1 聚点、单侧极限与连续性

定义 3.3 (左极限 (续))

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。若 x_0 是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点。对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，当 $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)$ 时，恒有 $|f(x) - a| < \varepsilon$ 。称 a 为 f 在 x_0 点的左极限，记作 $f(x_0^-)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ 。

定义 3.4 (右极限 (续))

类似地，若 x_0 是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点，定义右极限 $f(x_0^+)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ 。

命题 3.9

设 x_0 既是左聚点又是右聚点。则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 的充要条件是：

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = a.$$

注 [与连续性的关系]

- f 在 x_0 点连续 $\iff f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$ 。

- 若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ 但不等于 $f(x_0)$, 则 x_0 是可去间断点。

3.6.2 无穷极限与趋于无穷时的极限

定义 3.5 (无穷大极限)

若对于 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > M$, 则称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ 。

例题 3.4 对于 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 在 $x \rightarrow 0$ 时极限为 $+\infty$ 。

例题 3.5 对于 $f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ 。

定义 3.6 (趋于无穷时的极限)

定义 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ 为: $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, $|f(x) - L| < \varepsilon$ 。

3.6.3 间断点类型

如果函数 f 在 x_0 处不连续, 则 x_0 称为**间断点**。间断点分为两大类:

定义 3.7 (第一类间断点)

特征: 左极限 $f(x_0^-)$ 和右极限 $f(x_0^+)$ 都存在 (为有限值)。

1. 可去间断点 (**Removable**): $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, 但该值不等于 $f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义。

例题 3.6 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处 (可去间断点)。

2. 跳跃间断点 (**Jump**): $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$ 。

例题 3.7 符号函数 $H(x)$ 在 $x = 0$ 处: $H(0^-) = 0, H(0^+) = 1$ (跳跃间断点)。

定义 3.8 (第二类间断点)

特征: 左极限或右极限中至少有一个不存在 (包括趋于无穷大或振荡)。

1. 无穷间断点 (**Infinite**): 至少一个单侧极限为 ∞ 。

例题 3.8 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处 (无穷间断点)。

2. 振荡间断点 (**Oscillatory**): 极限因无限振荡而不存在。

例题 3.9 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时 (振荡间断点)。

3.6.4 补充例题分析

例题 3.10 用 ε - δ 证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ 。

证明 对 $\forall M > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{M}$ 。当 $0 < x < \delta$ 时, $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M$ 。

注[关于定义域内点的说明] 只有 x_0 是定义域 A 的聚点时, 讨论极限才有意义。如果 x_0 是孤立点, 函数在那是自动连续的, 不讨论间断。

3.7 单调函数间断点的可数性

定理 3.2

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 单调. 记 $D = \{x \in I \mid f \text{ 在 } x \text{ 点不连续}\}$.

1. 若 $x_0 \in D$, 则 x_0 为 f 的跳跃不连续点。
2. 若 $D \neq \emptyset$, 则 D 为可数集。

证明 [证法一] 下面不妨设 f 单调增 (否则考虑 $-f$)。

(i) 设 $x_0 \in I$. 由命题 2.4, f 在 x_0 点有左极限和右极限, 且 $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$. 若 $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$, 则 f 在 x_0 点连续. 所以若 $x_0 \in D$, 则必有 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. 因此 x_0 为 f 的跳跃不连续点。

(ii) 设 $x \in D$, 由 (i) 的证明, $f(x^-) < f(x^+)$. 令

$$S = \{(f(x^-), f(x^+)) \mid x \in D\}.$$

因为 $D \neq \emptyset$, $\therefore S \neq \emptyset$. 设 $x, y \in D, x < y$, 由命题 2.4, $f(x^+) \leq f(y^-)$. 因此 $(f(x^-), f(x^+)) \cap (f(y^-), f(y^+)) = \emptyset$.

令 $g: D \rightarrow S, g(x) = (f(x^-), f(x^+))$. 显然 g 为双射. S 为两两不相交的开区间之集族, 由命题 3.1 知 S 为可数集. 故 D 也是可数集。

证明 [证法二] 假设 x_0 是间断点, 考虑 $f(x)$ 定义于 $[a, b]$ 。

则由间断点定义, $\exists \varepsilon_0$, 对 $\forall x_0$ 的邻域, 都存在取值 $f(x)$, 满足 $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 不成立)。

考虑 x_0 的右侧邻域, $B = \{f(x) \mid x > x_0\}$. 因其有下界 $f(x_0)$, 故其存在下确界 $\inf\{f(x) \mid x > x_0\} = \beta$. ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$) 同理, $A = \{f(x) \mid x < x_0\}$, 其存在上确界 α ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$)。

下证 $\beta - \alpha > 0$. 若 $\beta - \alpha = 0$, 则 $\beta = \alpha = f(x_0)$. 由于 β 为 B 的下确界, 则 $\exists x_1 > x_0, \exists f(x_1) < f(x_0) + \varepsilon \forall \varepsilon > 0$. 但 $\forall x_0 < x < x_1$, 都有 $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) < f(x_0) + \varepsilon$. 与上述矛盾. 假设 $f(x) \in (\alpha, \beta)$, 若 $x > x_0$, 则 $f(x) \geq f(x_0)$. 如此一来, $f(x) \geq \beta$ (因为 β 为 B 的下确界). 矛盾. 同理, 若 $x < x_0$, 矛盾。

不同间断点 x_0, x_1 所做出的开区间 $(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1)$ 不相交。

$D = \{x \mid x \text{ 是 } f(x) \text{ 的间断点}\}$, 所有间断点以上述方式形成的开区间列互不相交. 在每个有理数开区间内以一个有理数标记该开区间 ($\mathbb{Q}$ 也互不相同). 于是得到单射 $f: D \rightarrow \mathbb{Q}$. $\therefore D$ 的势小于 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ 为可数集, 故 D 为可数集。

引理 3.1 (开区间集族的可数性)

设 $S = \{I\}$ 为两两不相交的开区间构成的集族, $S \neq \emptyset$. 则 S 为可数集。

证明 设 $I = (a, b)$, 其中 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. 用 $L(I)$ 表区间的长度, 即 $L(I) = b - a$ ($a, b \in \mathbb{R}$)。

Claim 1: 设 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow S$ 为单射. 若 $\exists M, \varepsilon > 0$, 使得 $I \subset (-M, M), \forall I \in S$, 且 $L(I) \geq \varepsilon$. 则 $n \leq 2M/\varepsilon$.

证明 $\because f(i) \cap f(j) = \emptyset, \forall i \neq j$.

$$\sum_{i=1}^n L(f(i)) = L(\cup_{i=1}^n f(i)) \leq L((-M, M)) \leq 2M.$$

$$\therefore n \cdot \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n L(f(i)) \leq 2M \implies n \leq \frac{2M}{\varepsilon}.$$

Claim 2: 若 $\exists M, \varepsilon > 0$, 使得 $\forall I \in S, I \subset (-M, M), L(I) \geq \varepsilon$, 则 S 为有限集。

Claim 3: 若 $L(I) < +\infty, \forall I \in S$, 则 S 为可数集。

证明 记 $S_n = \{I \in S \mid I \subset (-n, n), L(I) > 1/n\}$. 由 Claim 2, S_n 为有限集. 且 $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. 由 $n = 1, 2, \dots$, 则 S 为可数集。

记 $S_1 = \{I \in S \mid L(I) < 100\}, S_2 = \{I \in S \mid L(I) \geq 100\}$. 由 Claim 3, S_1 为可数集. 由于 S_2 中的开区间互不相交, S_2 中最多有两个元素. 从而 $S = S_1 \cup S_2$ 为可数集。

第四章 实数系基本定理与闭区间连续函数的性质

内容提要

- 单调子列定理与 Bolzano-Weierstrass 定理
- 介值定理与零点定理
- 闭区间套定理
- 综合例题
- 有界性定理与最值定理

4.1 实数连续性与子列定理

定理 4.1 (单调子列定理)

任何数列 $\{x_n\}$ 必包含一个单调子列。

证明 称 x_k 为数列的峰值点, 若对一切 $n > k$ 均有 $x_n < x_k$ 。分两种情况:

1. 数列有无穷多个峰值点。将这些峰值点按其下标从小到大排列, 设为 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$, 其中 $n_1 < n_2 < \dots$ 。由峰值点的定义, 对每个 i 有 $x_{n_{i+1}} < x_{n_i}$, 故 $\{x_{n_k}\}$ 为严格递减子列。
2. 数列只有有限个 (或没有) 峰值点。则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时 x_n 不是峰值点。取 $n_1 = N + 1$ 。因 x_{n_1} 非峰值点, 存在 $n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} \geq x_{n_1}$ 。又 x_{n_2} 非峰值点, 存在 $n_3 > n_2$ 使得 $x_{n_3} \geq x_{n_2}$ 。依此类推, 得到子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \dots$, 即为递增子列。

定理 4.2 (Bolzano-Weierstrass / 致密性定理)

有界数列必有收敛子列。

证明 设 $\{x_n\}$ 有界。由定理 4.1, 它包含一个单调子列 $\{x_{n_k}\}$ 。因原数列有界, 该单调子列亦有界。根据单调有界原理, $\{x_{n_k}\}$ 收敛。

4.2 闭区间连续函数的性质

引理 4.1 (闭区间套定理)

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ 属于所有闭区间, 即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}.$$

证明 由区间包含关系知 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界 (例如 b_1), $\{b_n\}$ 单调递减且有下界 (例如 a_1)。故两者均收敛, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \eta.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 得 $\xi = \eta$ 。对任意 n , 有 $a_n \leq \xi \leq b_n$, 故 $\xi \in [a_n, b_n]$ 。唯一性: 若另有 $\xi' \neq \xi$ 也属于所有区间, 则 $|\xi - \xi'| \leq b_n - a_n \rightarrow 0$, 矛盾。

4.2.1 有界性定理与最值定理

定理 4.3 (有界性定理)

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 f 在该区间上有界。



证明 [反证法] 假设 f 在 $[a, b]$ 上无界。则对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $x_n \in [a, b]$ 使得 $|f(x_n)| > n$ 。由此得到数列 $\{x_n\}$ 。因 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 由 BW 定理, 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0$ 。因 $x_0 \in [a, b]$ 且 f 连续, 应有 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ (有限值)。这与 $|f(x_{n_k})| > n_k \rightarrow \infty$ 矛盾。故 f 必有界。

定理 4.4 (最值定理)

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必能取得最大值和最小值。



证明 仅证最大值存在, 最小值同理 (考虑 $-f$)。记 $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ (由有界性定理知 $M < +\infty$)。若存在 $x_0 \in [a, b]$ 使 $f(x_0) = M$, 则证毕。否则, 对任意 $x \in [a, b]$ 均有 $f(x) < M$ 。构造辅助函数

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \quad x \in [a, b].$$

由于分母恒正且 f 连续, g 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 g 有上界, 设 $G = \sup g$, 则 $0 < G < +\infty$, 且

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq G \implies f(x) \leq M - \frac{1}{G}, \quad \forall x \in [a, b].$$

这表明 $M - \frac{1}{G}$ 是 f 的一个上界, 与 M 为上确界矛盾。故必存在 x_0 使得 $f(x_0) = M$ 。

4.2.2 介值定理

定理 4.5 (介值定理)

设 $f \in C[a, b]$, 且 m, M 分别为 f 在区间上的最小值和最大值。则对于任意满足 $m \leq \alpha \leq M$ 的实数 α , 至少存在一点 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = \alpha$ 。



推论 4.1 (零点定理)

若 $f \in C[a, b]$ 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 。



证明 [介值定理的证明] 若 $\alpha = m$ 或 $\alpha = M$, 由最值定理即得结论。下设 $m < \alpha < M$ 。由最值定理, 存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 使得 $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ 。不妨设 $x_1 < x_2$ (否则交换记号)。令 $a_1 = x_1, b_1 = x_2$, 则 $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ 且 $f(a_1) < \alpha < f(b_1)$ 。

用二分法构造闭区间套: 取中点 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ 。若 $f(c_1) = \alpha$, 则 $x_0 = c_1$, 证毕。若 $f(c_1) > \alpha$, 则令 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$; 若 $f(c_1) < \alpha$, 则令 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ 。无论哪种情况, 均有 $f(a_2) \leq \alpha \leq f(b_2)$ 且 $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$ 。

重复上述步骤, 得到区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

1. $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$;
2. $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$;
3. $f(a_n) \leq \alpha \leq f(b_n)$ (或反向不等号, 但不失一般性可设如此)。

由闭区间套定理 (引理 4.1), 存在唯一的 ξ 使得 $a_n \rightarrow \xi, b_n \rightarrow \xi$ 且 $\xi \in [a_n, b_n]$ 对所有 n 成立。利用 f 的连续性, $f(a_n) \rightarrow f(\xi), f(b_n) \rightarrow f(\xi)$ 。对不等式 $f(a_n) \leq \alpha \leq f(b_n)$ 取极限, 得 $f(\xi) \leq \alpha \leq f(\xi)$, 故 $f(\xi) = \alpha$ 。取 $x_0 = \xi$ 即可。

4.3 综合例题

例题 4.1 已知 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

解

观察前几项: $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots$ 呈现摆动收敛态势。分两步考察子列:

$a_{2k+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+a_{2k-1}}} = \frac{1+a_{2k-1}}{2+a_{2k-1}}$ 经数学归纳法可证: 奇数项子列 $\{a_{2k-1}\}$ 单调递减且有下界, 偶数项子列 $\{a_{2k}\}$ 单调递增且有上界。

分别取极限: 设 $a_{2k-1} \rightarrow x, a_{2k} \rightarrow y$ 。代入递推式: $x = \frac{1}{1+y}$ 且 $y = \frac{1}{1+x}$ 。联立解得 $x = y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (黄金分割数)。由于奇偶子列极限相等, 原数列收敛。

第五章 连续函数的反函数

内容提要

- 严格单调函数的反函数存在性
- 反函数的连续性定理
- 开区间、闭区间、半开半闭区间情形的统一处
- 理
- 扩展函数法的证明技巧

5.1 预备命题

命题 5.1 (闭邻域存在性)

设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ 。则对于任意 $x_0 \in (a, b)$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ 。

证明 若 a, b 均为有限数, 取 $\delta = \min\{\frac{x_0 - a}{2}, \frac{b - x_0}{2}\}$ 即可。若 $a = -\infty$ 或 $b = +\infty$, 只需取相应的半区间长度, 结论仍成立。

命题 5.2 (连续函数的拼接)

设 $f \in C[a, b], g \in C[b, c]$, 且满足衔接条件 $f(b) = g(b)$ 。定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ g(x), & x \in (b, c] \end{cases}$$

则 $h \in C[a, c]$ 。

证明 对任意 $x_0 \in (a, b)$, 由命题 5.1 存在邻域含于 $[a, b]$, 该邻域上 $h = f$, 故 h 在 x_0 连续。类似地可证在 (b, c) 内部连续。在拼接点 b 处, 由 $f(b) = g(b)$ 及 f, g 的单侧连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - b| < \delta$ 时, 无论是左侧还是右侧, $|h(x) - h(b)| < \varepsilon$ 。故 h 在 b 点连续。

5.2 开区间上的反函数

命题 5.3

设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in C(a, b)$ 且严格单调递增。记

$$c = \inf_{x \in (a, b)} f(x), \quad d = \sup_{x \in (a, b)} f(x).$$

则

- $-\infty \leq c < d \leq +\infty$, 且值域 $\text{Rg } f = (c, d)$;
- 反函数 $g = f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ 也是连续且严格单调递增的。

证明 (1) 值域为 (c, d) 。由严格增性, 对任意 $x_1 < x_2$ 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $c < d$ 。现证 $\text{Rg } f = (c, d)$ 。首先, 任取 $x_0 \in (a, b)$, 由命题 5.1, 存在 $\delta > 0$ 使 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$, 由单调性

$$c \leq f(x_0 - \delta) < f(x_0) < f(x_0 + \delta) \leq d,$$

故 $f(x_0) \in (c, d)$, 即 $\text{Rg } f \subset (c, d)$ 。反之, 任取 $y \in (c, d)$, 由上、下确界定义, 存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得 $f(x_1) < y < f(x_2)$ 。不妨设 $x_1 < x_2$, 在 $[x_1, x_2]$ 上应用介值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使 $f(\xi) = y$, 故 $y \in \text{Rg } f$ 。因此 $(c, d) \subset \text{Rg } f$, 从而值域为 (c, d) 。

(2) 反函数的连续性与单调性。单调性：若 $y_1 < y_2$ ，则存在 x_1, x_2 使 $f(x_i) = y_i$ 。若 $x_1 \geq x_2$ ，由 f 递增得 $y_1 \geq y_2$ ，矛盾。故 $x_1 < x_2$ ，即 $g(y_1) < g(y_2)$ ， g 严格递增。连续性：设 $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$ ，对任意 $\varepsilon > 0$ ，由命题 5.1 可取 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ 使得 $[x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1] \subset (a, b)$ 。由 f 严格增，

$$f(x_0 - \varepsilon_1) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon_1).$$

令 $\delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon_1), f(x_0 + \varepsilon_1) - y_0\} > 0$ 。则当 $|y - y_0| < \delta$ 时，有

$$f(x_0 - \varepsilon_1) < y < f(x_0 + \varepsilon_1).$$

由于 g 也是严格增的，上式作用 g 得 $x_0 - \varepsilon_1 < g(y) < x_0 + \varepsilon_1$ ，即

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

故 g 在 y_0 连续。由 y_0 的任意性， $g \in C(c, d)$ 。

5.3 闭区间与半开半闭区间的反函数

对于定义域包含端点（甚至无穷）的情形，我们通过“扩展函数法”将其转化为开区间情形，从而直接利用命题 5.3 的结论。

命题 5.4

设 $-\infty < a < b < +\infty$ ， $f \in C[a, b]$ 且严格单调递增。记 $c = f(a)$ ， $d = f(b)$ 。则

1. $c < d$ ，且 $\text{Rg } f = [c, d]$ ；
2. 反函数 $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ 是连续且严格单调递增的。

证明 (1) 由 f 严格增及连续性，据介值定理即得 $\text{Rg } f = [f(a), f(b)] = [c, d]$ ，且 $c < d$ 。(2) 构造 f 的扩展函数 $F : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ （或更简单地将定义域向左侧延拓）。更系统的方法是：定义

$$F(x) = \begin{cases} x - a + c, & x < a, \\ f(x), & a \leq x \leq b, \\ x - b + d, & x > b. \end{cases}$$

则 F 在 $\mathbb{R}$ 上连续且严格单调递增（请自行验证）。由命题 5.3（取 $a = -\infty$ ， $b = +\infty$ ）， F 的值域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且其反函数 $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且严格增。注意到 F 在 $[a, b]$ 上与 f 相同，因此 $g = G|_{[c, d]}$ 即为 f 的反函数，且作为连续函数的限制仍连续。

命题 5.5

设 $-\infty < a < b \leq +\infty$ ， $f \in C[a, b)$ 且严格单调递增。记 $c = f(a)$ ， $d = \sup f$ 。则值域为 $[c, d)$ （若 d 有限）或 $[c, +\infty)$ （若 $d = +\infty$ ），且反函数连续。

证明 我们只考虑 $b < +\infty$ 且 $d < +\infty$ 的情形，其他情况类似。定义扩展函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b), \\ x - b + d, & x \geq b. \end{cases}$$

可以验证 F 在 $[a, +\infty)$ 上连续且严格增，且 $\inf F = c$ ， $\sup F = +\infty$ 。由命题 5.3（视区间为 $[a, +\infty)$ ，仍可应用开区间情形的推广，或再向外扩展）知其值域为 $[c, +\infty)$ ，反函数连续。从而 f 的值域为 $\{F(x) : x \in [a, b)\} = [c, d)$ ，且 f^{-1} 是 F^{-1} 在 $[c, d)$ 上的限制，故连续。

命题 5.6

设 $-\infty \leq a < b < +\infty$ ， $f \in C(a, b]$ 且严格单调递增。记 $c = \inf f$ ， $d = f(b)$ 。则值域为 $(c, d]$ ，且反函数连续。

证明 与上一命题完全对偶，向左侧用线性函数扩展即可。

例题 5.1 设 $f(x) = \sin x$ 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上严格增且连续，其值域为 $[-1, 1]$ ，反函数 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ 连续且严格增。

第六章 导数的定义与求导法则

内容提要

- 导数的定义与导函数
- 反函数求导法则
- 左导数与右导数的概念
- 求导计算例题
- 四则运算求导法则与链式法则

6.1 导数的定义

定义 6.1 (导数)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$. 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 则称 f 在 x_0 点可导, 并记:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

称 $f'(x_0)$ 为 f 在 x_0 点的导数。

例题 6.1 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. 则:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x} = 0,$$

$\therefore f$ 在 $x = 0$ 点可导, 且 $f'(0) = 0$.

定义 6.2 (区间上可导)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. 设 $A \subset I, A \neq \emptyset$. 若对 $\forall x \in A$, f 在 x 点可导, 则称 f 在 A 上可导。

例题 6.2 设 $\alpha < 1, f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$, 则 f 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

证明

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha ((1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1)}{\Delta x} \\ &= x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})} - 1}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} \\ &= x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

而在 $x = 0$ 处:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^\alpha - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} (\Delta x)^{\alpha-1} = +\infty.$$

定义 6.3 (导函数)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. 若对 $\forall x \in I$, f 在 x 点可导. 我们称 f' 为 f 的导函数. 记为 $f': I \rightarrow \mathbb{R}$.

注记: $f' = \frac{df}{dx}$, $f'(x_0) = \frac{d}{dx}|_{x=x_0} f$.

6.2 导数的性质与左/右导数

命题 6.1 (导数的局部性)

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: J \rightarrow \mathbb{R}$. 设 $x_0 \in I \cap J$, 若 $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \cap J$, 且 $f(x) = g(x), \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. 则 f 在 x_0 点可导当且仅当 g 在 x_0 点可导, 且 $f'(x_0) = g'(x_0)$.

证明 设 f 在 x_0 点可导, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在. 由已知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

$\therefore$ 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

定义 6.4 (左/右导数)

设 $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A$. 若 $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $(x_0 - \varepsilon, x_0] \subset A$, 称 x_0 为 A 的内点. 称 f 在 x_0 点左可导, 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在. 称 $f'_-(x_0)$ 为 f 在 x_0 点的左导数; 类似地, 定义右导数 $f'_+(x_0)$.

命题 6.2 (左右导数关系)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 为 I 的内点, 设 $a \in \mathbb{R}$. 则 $f'(x_0) = a$ 当且仅当 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a$.

例题 6.3 讨论分段函数的可导性:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x \leq 0 \\ \beta x + \gamma x^2, & x > 0 \end{cases}$$

则 $f'(0) = \alpha$ 当且仅当 $\alpha = \beta$. 因此 f 在 $x = 0$ 点可导当且仅当 $\alpha = \beta$.

6.3 求导法则

命题 6.3 (四则运算求导)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间。

1. $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$;
2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
3. 若 $g(x) \neq 0, \forall x \in I$, 则 $[\frac{f}{g}]'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

证明 [(i) 的证明] 直接由极限运算性质推证。

命题 6.4 (链式法则)

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow \mathbb{R}$. 设 $x_0 \in I$, f 在 x_0 点可导, g 在 $y_0 = f(x_0)$ 点可导. 则:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

证明 由条件 $\exists h: J \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 y_0 点连续且 $h(y_0) = 0$ 使得:

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + h(y)(y - y_0), \quad \forall y \in J$$

则 $g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)(f(x) - f(x_0)) + h(f(x))(f(x) - f(x_0))$, $\forall x \in I$ 。因此

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[g'(y_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + h(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \\&= g'(y_0)f'(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).\end{aligned}$$

例题 6.4 利用导数定义求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - \sqrt[n]{1+0}}{x - 0} = (\sqrt[n]{1+x})' \Big|_{x=0} = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{n}.$$

6.4 反函数求导法则

命题 6.5

ϕ 为双射, ψ 为 ϕ 的反函数, 设 $x_0 \in I, y_0 = \psi(x_0)$ 。若 ψ 在 x_0 点的导数 $\psi'(x_0) \neq 0$; ϕ 在 y_0 点连续, 则 ϕ 在 y_0 点可导。且 $\phi'(y_0) = \frac{1}{\psi'(x_0)}$ 。

命题 6.6

设 $y = \psi(x)$ 在 x_0 的邻域上严格单调, 且连续。若 $\psi(x)$ 在 x_0 处可导, $\psi'(x_0) \neq 0$, 则其反函数 $x = \phi(y)$ 在 $y_0 = \psi(x_0)$ 处可导。且 $\phi'(y_0) = \frac{1}{\psi'(x_0)} = \frac{1}{\psi'(\phi(y_0))}$ 。

推论 6.1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, 记 $C^1(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ 可导且 } f' \text{ 连续}\}$ 。若 $f \in C^1(I)$, 且 $\psi'(x) \neq 0, \forall x \in I$, 则其反函数 $\psi^{-1} \in C^1(J)$ 且

$$(\psi^{-1})'(y) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))} \quad \forall y \in J.$$

6.5 链式法则记号与例题

设 $z = g(y), y = f(x), z = g[f(x)], z'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$ 。

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

例题 6.5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + nm x + C_n^2(mx)^2 + o(x^2) - [1 + mn x + C_m^2(nx)^2 + p(x)]}{x^2} \\&= C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2 = \frac{n(n-1)}{2} m^2 - \frac{m(m-1)}{2} n^2 = \frac{mn(n-m)}{2}.\end{aligned}$$

例题 6.6 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(n(1-x) + \dots) - n(m(1-x) + \dots)}{(1-x)^2(1+x+\dots)(1+x+\dots)} \\&\stackrel{1-x=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m[1 - (1-t)^n] - n[1 - (1-t)^m]}{mnt^2} = \frac{m-n}{2}.\end{aligned}$$

例题 6.7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+tx} - \sqrt{1+sx}}{e^{tx} - e^{sx}}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(t-s)x}{(e^{tx} - e^{sx})(\sqrt{1+tx} + \sqrt{1+sx})} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tx - sx}{e^{tx} - e^{sx}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tx - sx}{e^{sx}(e^{(t-s)x} - 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(t-s)x}{(t-s)x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例题 6.8 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

解 令 $y = x - 1$, 则

$$\text{原式} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{y+1} - 1}{\sqrt{y+1} - 1} = \frac{\frac{1}{n}y}{\frac{1}{2}y} = \frac{n}{m}.$$

第七章 微分中值定理

内容提要

- Fermat 引理与极值点的必要条件
- Rolle 定理及其实质
- Lagrange 中值定理 (有限增量公式)
- Cauchy 中值定理及其推广意义
- 中值定理的应用与构造辅助函数技巧

7.1 导数的应用与基本例题

例题 7.1 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ 。

解法 1: 设 $x = t^{mn}$, 则 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 1$ 。

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^n - 1}{t^m - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{n-1} + \cdots + 1}{t^{m-1} + \cdots + 1} = \frac{n}{m}.$$

法 2: 利用导数定义 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{x - 1} = \frac{1}{n}(1)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}$ 。

$$\text{原式} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/m} - 1}{x - 1}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/n} - 1}{x - 1}} = \frac{1/m}{1/n} = \frac{n}{m}.$$

例题 7.2 证明 $(\sin x)' = \cos x$ 。

证明

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x \cos x + \cos \Delta x \sin x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} + \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \\ &= \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 = \cos x. \end{aligned}$$

例题 7.3 用反函数求导证明 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 。

证明 $y = \sin x \implies x = \arcsin y$ 。

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7.2 Fermat 引理与 Rolle 定理

定理 7.1 (Fermat 引理)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。若 $x_0 \in I$, f 在 x_0 处取得极值 (如最大/最小值), 若 f 在 x_0 点可导, 则 $f'(x_0) = 0$ 。

证明 设 f 在 x_0 点取得最小值。记

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}$$

则 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。存在 $\varepsilon > 0$, 使 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$ 。因为 $g(x) \leq 0, \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$: $\therefore g(x^-) \leq 0$, 因为 $g(x) \geq 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$: $\therefore g(x^+) \geq 0$ 。又 x_0 为可导点, 得 $g(x^+) = g(x^-) = f'(x_0) = 0$ 。

注 可导函数在极值点处的导数为 0。(闭区间端点不一定)。

定理 7.2 (Rolle 定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上可导。若 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 满足 $f'(\xi) = 0$ 。



注 若 f 在区间 $[a, b]$ 的两个端点上有相同的值, 那 f 一定存在水平切线。

证明 因为 f 连续, 由最值定理, $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ 使得 $f(x_1) = \max f, f(x_2) = \min f$ 。

若 $f(x_1) = f(x_2) = f(a)$, 则 $f \equiv f(a)$, 因此 $f'(x) \equiv 0$ 。

若 $f(x_1) \neq f(a)$ 或 $f(x_2) \neq f(a)$ 。因此 $x_1 \in (a, b)$ 或 $x_2 \in (a, b)$ 。由 Fermat 引理, $f'(x_1) = 0$ 或 $f'(x_2) = 0$ 。得证。

7.3 Lagrange 中值定理与 Cauchy 中值定理

定理 7.3 (Lagrange 中值定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上可导。则 $\exists \xi \in (a, b)$, 满足:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



注 Rolle 是 Lagrange 的特例。

证明 令 $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$, $x \in [a, b]$ 。则 $h \in C[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $h(a) = h(b) = 0$ 。由 Rolle 定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 满足 $h'(\xi) = 0$, 即:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

定理 7.4 (Cauchy 中值定理)

设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上可导。且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ 。则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



注 Lagrange 中值定理是 Cauchy 中值定理的一个特例。 f, g 函数在区间 $[a, b]$ 上平均增长率之比等于某点的切线斜率之比。

证明 由 Lagrange 中值定理: $g(b) - g(a) = g'(\xi_0)(b-a) \neq 0$ 。令 $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$, $x \in [a, b]$ 。则 $h \in C[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$ 。由 Rolle 定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 满足 $h'(\xi) = 0$ 。即:

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

得证。

7.4 定理的应用与补充例题

命题 7.1

若 $f'(x) \equiv 0 \implies f(x) \equiv C$ 。



证明 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = 0 \implies f(b) = f(a)$ 。

例题 7.4 设 $f(x)$ 可导, 证明在 $f(x)$ 的两个零点之间必有 $f(x) + f'(x) = 0$ 的零点。

证明 令 $F(x) = e^x f(x)$ 。则 $F(x_1) = F(x_2) = 0$ 。 $\exists \xi$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $(e^x f(x) + e^x f'(x))|_{x=\xi} = 0$ 。

例题 7.5 同上, 证明必有 $f(x) + \lambda f'(x) = 0$ 的零点。

证明 令 $F(x) = e^{\frac{1}{\lambda}x} f(x)$, 同上。

例题 7.6 前页例 1 再探 用 Cauchy 中值定理求解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{e^{\tan x} - e^{\sin x}}.$$

解 由 Cauchy 中值定理 (对函数 $\sqrt{1+t}$ 与 e^t):

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} \Big|_{t=\sin x}^{t=\tan x}}{e^t \Big|_{t=\sin x}^{t=\tan x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}}{e^\xi} \Bigg|_{\xi=0} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

第八章 高阶导数与泰勒公式

内容提要

- 高阶导数的归纳定义与性质
- Leibniz 高阶乘积求导公式
- Heine 定理的应用：函数极限与数列极限
- Taylor 展开式 (Lagrange 余项与 Peano 余项)
- Taylor 展开式的唯一性
- 构造函数法证明中值型等式

8.1 高阶导数的定义

设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间。利用归纳法定义 f 的高阶导数。粗略地说, f 的 n 阶导数就是 f 的 $n-1$ 阶导数的导数。

定义 8.1 (一点的高阶导数)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。下面用归纳法定义 f 在 x_0 点的 n 阶导数, $n = 1, 2, \dots$ 。

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 称 f 在 x_0 点一阶可导, 并记为 $f^{(1)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 。
2. 设 $n \geq 1$, 若 $\exists \varepsilon > 0$, 使得对于 $\forall x \in I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, f 在 x 点 n 阶可导, 且函数 $h(x)$ (f 在 x 点的 n 阶导数) 在 x_0 点一阶可导, 则记为 $f^{(n+1)}(x_0) = h'(x_0)$ 。

定义 8.2 (高阶导函数)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ 。若对于 $\forall x \in I$, f 在 x 点 n 阶可导, 我们称 f 在 I 上 n 阶可导, 并定义 $f^{(n)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。

记号: $f = f^{(0)}, f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)} \dots$ 。也记 $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$ 。

命题 8.1 (高阶导数的局部性)

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $n \in \mathbb{N}^*$ 。设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ 。设 $x_0 \in I \cap J$ 。若 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \cap J$, 且 $f(x) = g(x), \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 。则 f 在 x_0 点 n 阶可导当且仅当 g 在 x_0 点 n 阶可导, 且 $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ 。

证明 应用数学归纳法。当 $n = 1$ 时由之前命题成立。设当 $n = k$ 时结论成立 ($k \in \mathbb{N}^*$)。设 f 在 x_0 点 $k+1$ 阶可导, 则 $\exists \varepsilon_1 > 0$, 对于 $\forall x \in I \cap (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$, f 在 x 点 k 阶可导; 令 $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon\}$, 则对于 $\forall x \in (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$: $f(x) = g(x)$ 。

设 $x_1 \in (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$ 。下证 g 在 x_1 点 k 阶可导, 且 $g^{(k)}(x_1) = f^{(k)}(x_1)$ 。令 $\delta = \min\{x_1 - (x_0 - \varepsilon_2), (x_0 + \varepsilon_2) - x_1\}$ 。则 $f(x) = g(x), \forall x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ 。因为 f 在 x_1 点 k 阶可导, 由归纳假设, g 在 x_1 点 k 阶可导, 且 $f^{(k)}(x_1) = g^{(k)}(x_1)$ 。

即证对于 $\forall x \in (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$, g 在 x 点 k 阶可导, 且 $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ 。由于 f 在 x_0 点 $k+1$ 阶可导, 由定义知 $h(x)$ 在 x_0 点可导, 且 $h'(x_0) = f^{(k+1)}(x_0)$ 。由此: $g^{(k+1)}(x_0) = h'(x_0) = f^{(k+1)}(x_0)$ 。得证。

例题 8.1 $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, 则 f 三阶可导。

例题 8.2 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

证明 f 在 $x = 0$ 点不是二阶可导的。

解

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 4x, & x > 0 \end{cases}$$

(左导数 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$, 右导数同样为 0)
记 $g(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ ($x \neq 0$), 则

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 4, & x > 0 \end{cases}$$

$f''(0^-) = 2, f''(0^+) = 4$, $\therefore f''(0)$ 不存在。

例题 8.3 由归纳法得:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

注 对于一般的一元函数 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 若 x_0 为 A 的内点, 我们可以同样地定义 f 在 x_0 点的高阶导数; 若 A 为开集, 我们可以同样定义 f 的导函数。

8.2 高阶导数的求导法则

命题 8.2 (Leibniz 公式)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $n \in \mathbb{N}^*$ 。设 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为 n 阶可导, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则:

1. (线性性) $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$ 。
2. (Leibniz 公式) $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)}$ 。

证明 [(ii) 的归纳证明] 当 $n = 1$ 时, 由乘积函数求导法则, 命题结论成立。设当 $n = k$ 时成立, 设 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $k+1$ 阶可导。由归纳假设:

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)} g^{(i)}$$

因此, 由乘积函数求导法则:

$$\begin{aligned} (fg)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^k C_k^i (f^{(k-i+1)} g^{(i)} + f^{(k-i)} g^{(i+1)}) \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i+1)} g^{(i)} + \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)} g^{(i+1)} \\ &= f^{(k+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^k (C_k^i + C_k^{i-1}) f^{(k-i+1)} g^{(i)} + f^{(0)} g^{(k+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i f^{(k+1-i)} g^{(i)}. \end{aligned}$$

因此当 $n = k+1$ 时命题结论也成立。

8.3 Heine 定理的应用

定理 8.1 (Heine 定理)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff$ 对任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\} \subset I \setminus \{x_0\}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.



例题 8.4 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。

解 设 $x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$, $\sin \frac{1}{x_n} = 0 \rightarrow 0$. 取 $x'_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \rightarrow 0$, $\sin \frac{1}{x'_n} = 1 \rightarrow 1$. 其两子列极限不同, 故其无极限。

例题 8.5 证明 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

处处无极限。

证明 [证明思路] 有理数与无理数都在数轴上稠密 (在数轴上任取两点, 其间至少有一个无理数与有理数)。

对 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 构造数列 $a_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, $D(a_n) \equiv 0 \rightarrow 0$. 又 $b_n = x_0 + \frac{\pi}{n}$ (取有理数列也可), $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$, $D(b_n) \equiv 1$. 同时存在有理数列使得 $D = 1$. 故极限不存在。

例题 8.6 证明奇数次多项式方程 $a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} = 0$ 必有实根。

解 不妨设 $a_{2n+1} > 0$, 令

$$f(x) = x^{2n+1} \left(a_0 \cdot \frac{1}{x^{2n+1}} + a_1 \cdot \frac{1}{x^{2n}} + \cdots + a_{2n+1} \right).$$

由此得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. 故必 $\exists x_1, x_2$, 使得 $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$. $f(x)$ 连续, 由介值定理, $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_0) = 0$.

例题 8.7 设 $a > 0$, 若极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right)$ 存在, 求 p 的范围。

8.4 Taylor 展开式

定理 8.2 (Taylor 展开式—Lagrange 余项)

设 $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $n+1$ 阶可导, $n \in \mathbb{N}^*$. 则对于 $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$



注 称 $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ 为 f 在 x_0 点的 n 阶 Taylor 多项式。称 $R(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ 为 Lagrange 余项。

定理 8.3 (Taylor 展开式—Peano 余项)

设 f 在 x_0 点 n 阶可导, 则存在 x_0 的邻域及 $h(x)$ 满足 $h(x_0) = 0$, 且 h 在 x_0 点连续, 使得:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + h(x)(x - x_0)^n.$$



注 称 $R(x) = h(x)(x - x_0)^n$ 为 Peano 余项。注意到 $\frac{R(x)}{(x - x_0)^n} \rightarrow 0$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时。

定理 8.4 (Taylor 展开式的唯一性)

设 $f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$, 则 $A_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$.



8.5 构造函数法 (中值定理应用)

例题 8.8 设 f 在 $[a, b]$ 上三阶可导。证明: $\exists \delta \in (a, b)$, 满足:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\delta).$$

例题 8.9 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, $f''(x)$ 在 (a, b) 内存在。证明: $\forall c \in (a, b)$, $\exists \delta \in (a, b)$, 使得

$$f''(\delta) = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

解 令 $F(x) = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c) + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c) + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$ 。则 $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b)$, $F(c) = f(c)$ 。令 $g(x) = f(x) - F(x)$, 则 $g(a) = g(b) = g(c) = 0$ 。由 Rolle 定理: $\exists \delta_1 \in (a, c)$, $\delta_2 \in (c, b)$, 满足 $g'(\delta_1) = 0 = g'(\delta_2)$ 。再使用一次 Rolle 定理, 知 $\exists \delta \in (\delta_1, \delta_2)$, 使得 $g''(\delta) = 0$ 。代入得:

$$f''(\delta) = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} \cdot (-2) \cdot (\text{求导结果}) + \dots$$

整理即得证。

例题 8.10 f 在 a 的邻域内三阶可导。则对充分小的 h , $\exists \theta \in (0, 1)$, 使得:

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a+\theta h) + f''(a-\theta h).$$

解 令 $F(x) = f(a+x) + f(a-x) - 2f(a)$, $G(x) = x^2$ 。

$$\text{左侧} = \frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} \xrightarrow{\exists \delta \in (0, h)} \frac{F'(\delta)}{G'(\delta)} = \frac{f'(a+\delta) - f'(a-\delta)}{2\delta}.$$

再令 $H(x) = f'(a+x) + f'(a-x)$, 则

$$\text{左侧} = \frac{H(\theta h) - H(0)}{2\theta h} = \frac{1}{2}(f''(a+x) - f''(a-x)) \Big|_{x=\theta h} = \frac{f''(a+\theta h) + f''(a-\theta h)}{2}.$$

第九章 函数的单调性与极值

内容提要

- 函数单调性的导数判别法
- 极值的第二充分条件（二阶导数判别法）
- 极值的定义与必要条件（Fermat 引理）
- 综合计算例题
- 极值的第一充分条件（一阶导数符号变化）

9.1 函数的单调性

定义 9.1

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 若对于 $\forall x_1 < x_2 \in A$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 单调不减. 反之单调不减.

命题 9.1 (单调性判别)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 可导.

1. f 单调不减当且仅当 $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.
2. 若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$, 则 f 严格单调递增.

注 (ii) 的逆命题不成立, 例如 $f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 处 $f'(0) = 0$ 但函数严格递增.

例题 9.1 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x^3} \right]^{\frac{1}{\ln \cos x}} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5}$.

解 原式 $\iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{f(x)}{x^3} \right)}{\ln \cos x} = \ln 2 \implies \frac{f(x)}{x^3} \rightarrow 0$. 又因 $\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] \sim -\frac{1}{2}x^2$. 即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)/x^3}{-\frac{1}{2}x^2} = \ln 2 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

9.2 函数的极值

定义 9.2

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 的内点. 若 $\exists \varepsilon > 0$, 使得对于 $\forall x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 恒有 $f(x) \geq f(x_0)$ (或 $\leq f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 是 f 的极小值 (或极大值).

命题 9.2 (极值的必要条件)

设 f 在 x_0 点可导, 且取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$.

证明 若 x_0 为极大值点, 由 Fermat 引理可知 $f'(x_0) = 0$.

命题 9.3 (极值的第一充分条件)

设 f 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 上连续, 且在去心邻域内可导.

1. 若 $f'(x) \geq 0$ 当 $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, 且 $f'(x) \leq 0$ 当 $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, 则 x_0 是 f 的极大值点.
2. 反之, 若符号相反, 则为极小值点.

命题 9.4 (极值的第二充分条件 (高阶导数判别法))

设 f 在 x_0 点二阶可导。

1. 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为 f 的严格极小值点。
2. 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为 f 的严格极大值点。



证明 由 Taylor 公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$, 则 $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots > 0$, 即为极小值。

第十章 凸函数与琴生不等式

内容提要

- 凸函数的定义（不等式定义与等价定义）
- 凸函数的极值性质（强极值原理）
- 凸函数的三点不等式判别法
- 综合计算与选择题型例题
- Jensen 不等式的归纳证明

10.1 凸函数的定义与基本性质

定义 10.1 (凸函数)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. 若:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I, 0 \leq \lambda \leq 1,$$

我们称 f 为凸函数。

注

- 若符号相反, 称 f 为“凹”或“上凸”函数。
- f 为凸函数当且仅当 f 的上图 (Epigraph) $G = \{(x, y) \mid x \in I, y > f(x)\}$ 为凸集。
- 取得“ $<$ ”即为严格凸函数。

定义 10.2 (等价定义)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f 为凸函数当且仅当对于 $\forall x_1, x_2, x \in I, x_1 < x < x_2$:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

2. 若为“ $<$ ”即为严格凸函数。

注 在 f 上任取两点, 其图象位于 AB 间部分在 AB 下方, 即为凸。

证明 [等价性证明] 设 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 记:

$$g(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x \in \mathbb{R},$$

则一次函数 $g(x)$ 满足 $g(x_1) = f(x_1), g(x_2) = f(x_2)$ 。 g 为一次函数, $\therefore g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2)$ 。
 $\therefore f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \iff f(x) < g(x) \quad \forall x_1 < x < x_2$ 。

命题 10.1 (三点不等式)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f 为凸函数当且仅当对于任意 $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$, 有:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

2. 同理, $<$ 为严格凸函数。

10.2 Jensen (琴生) 不等式

定理 10.1 (Jensen 不等式)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间。设 $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_i \in I$, 其中 $n \geq 2$ 。

1. 若 f 为凸函数, 则 $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ 。
2. 若 f 为严格凸函数, 等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 。

证明 若 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, 则 $f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i f(x_i) = f(x_1)$ 。

若 x_i 并非全相等。当 $n = 2$ 时, 由严格凸函数的定义, 结论成立。设当 $n = k$ 时结论成立。

下面设 $n = k + 1$ 。不妨设 $x_1 \neq x_2$, 记:

$$\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i, \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{\mu} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

则 $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$ 。因此

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\mu \sum_{i=1}^k \mu_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &\leq \mu f\left(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &< \mu \sum_{i=1}^k \mu_i f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

由归纳法得证。

10.3 凸函数的极值性质

命题 10.2 (强极值原理)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, x_0 为 I 的内点。若 $f(x_0) = \max f$, 则 $f \equiv f(x_0)$ 。

注 除非为常数函数, 否则不可能在区间内部取得最大值。我们通常称这个结论为**强极值原理**。

证明 记 $x, y \in I, x < x_0 < y$, 则

$$0 \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq 0.$$

因此 $\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = 0$, 即 $f(x) = f(y) = f(x_0)$ 。

推论 10.1

若 $f \in C[a, b]$ 为凸函数, 则 $\max f = \max\{f(a), f(b)\}$ 。

注 凸函数的最大值必在区间端点上取得。

10.4 综合例题

例题 10.1 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内:

(A) 处处可导;

- (B) 恰有一个不可导点;
 (C) 恰有两个不可导点;
 (D) 至少有三个不可导点。

解 当 $x > 1$ 或 $x < -1$ 时, $(|x|^n)^{\frac{1}{n}} \leq (1 + |x|^n)^{\frac{1}{n}} \leq (2|x|^n)^{\frac{1}{n}}$ 。

$$\therefore |x| \leq (1 + |x|^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}} |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|.$$

当 $0 < x \leq 1$ 或 $-1 \leq x < 0$ 时, $|x|^n + 1 \rightarrow 1$, $\therefore f(x) = 1$ 。故 $f(x) = \max\{1, |x|\}$, 在 $x = 1$ 和 $x = -1$ 处不可导。选 (C)。

例题 10.2 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln\left(e^x + \frac{1}{x}\right) x^2} \cdot \ln \frac{\sin x}{x}.$$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x^2}{\ln\left(e^x + \frac{1}{x}\right) x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin x - x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x - x}{x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$