少年班数学第四章复数

§4.2 复数的性质

version $\beta 1.0$

2023 年 2 月 24 日, 星期五

1. 用来表示复数域 $\mathbb{C}$ 坐标平面称为复平面, 也用 $\mathbb{C}$ 来表示.
2. 把复平面 Oxy 中的 x 轴称为实轴, 把 y 轴称为虚轴.

定义 1 (共轭和模)

若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

1. 称 $a - b\mathrm{i}$ 为 $a + b\mathrm{i}$ 的共轭, 记为 $\overline{a + b\mathrm{i}}$.
2. 称 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为 $a + b\mathrm{i}$ 的模 (或绝对值, 或长度), 记为 $|a + b\mathrm{i}|$.

定理 1 (共轭和模的性质)

1. 若 $z\in\mathbb{C}$, 则 $\overline{(\overline{z})}=z$, $\quad z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$, $\quad z-\overline{z}=2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.
2. 若 $z\in\mathbb{C}$, 则 $|z|=|\overline{z}|$, $\quad |z|^2=z\overline{z}$, $\quad |\mathrm{Re}(z)|\le|z|$, $\quad |\mathrm{Im}(z)|\le|z|$.
3. 若 $z\in\mathbb{C}$, 则 z 是实数的充要条件为 $z=\overline{z}$.
4. 若 $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则 z 是纯虚数的充要条件为 $z=-\overline{z}$.
5. 若 $z\in\mathbb{C}$, 则 $|z|\ge 0$; $\quad$ 并且, $|z|=0$ 的充要条件为 $z=0$.
6. 若 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 则 $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
7. 若 $z_1\in\mathbb{C}$, $z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
8. 若 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 则 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; $\quad$ 当 $z_2\neq 0$ 时有 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.
9. 若 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 则 $|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$, $\quad \big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1-z_2|$.

结论 (1), (2), (3), (4), (5), (6) 可直接验证.

(7) 设 $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 因 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot \overline{z_2} = \overline{\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2} = \overline{z_1}$, 故 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(8) 因

$$
\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2|^2 &= (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) \\
&= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2,
\end{aligned}
$$

故 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

若 $z_2 \neq 0$, 则 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| = \left|\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right| = |z_1|$, 故 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

(9) 因为

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{z_1+z_2} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1|\cdot|\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

故 $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$. 由 $|z_1| \le |z_1-z_2|+|z_2|$ 得 $|z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2|$.

交换 z_1, z_2, 又得到 $|z_2|-|z_1| \le |z_2-z_1| = |z_1-z_2|$.

所以 $\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1-z_2|$. □

例 1

设复数 α 满足 $|\alpha|<1$. 证明: 若复数 z 满足 $|z|<1$, 则 $\dfrac{|z-\alpha|}{|1-\overline{\alpha}z|}<1$.

解. 只需证 $|z-\alpha|<|1-\overline{\alpha}z|$, 即 $|z-\alpha|^2<|1-\overline{\alpha}z|^2$. 事实上,

$$\begin{aligned}
|1-\overline{\alpha}z|^2-|z-\alpha|^2 &= (1-\overline{\alpha}z)\overline{(1-\overline{\alpha}z)}-(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}\\
&= (1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})-(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})\\
&= (1-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+|\alpha z|^2)-(|z|^2+|\alpha|^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z})\\
&= 1-|z|^2-|\alpha|^2+|\alpha|^2|z|^2\\
&= (1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)>0.
\end{aligned}$$

□

定义 2 (辐角)

设 z 是非零复数，它在坐标平面上所确定的点为 P.

1. z 的**辐角**是指以 x 轴正半轴为始边，以射线 OP 为终边的有向角.
2. 用 $\mathrm{Arg}z$ 表示 z 的所有的辐角所构成的集合.
3. 非零复数 z 的满足 $0 \le \theta < 2\pi$ 的辐角称做 z 的辐角的**主值**，记做 $\arg z$.

注 1. 每个非零复数都有辐角. 但凡说到辐角，必然是非零复数的辐角.

注 2. 若 θ 是 z 的一个辐角，则对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ 都是 z 的辐角，因此 z 总有无穷多个辐角.

注 3. 另一方面, z 的任意两个辐角的差必然是 2π 的整数倍, 所以

$$\mathrm{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

注 4. 对任意非零复数 z, $\arg z$ 是唯一确定的, 并且

$$\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$$

是满射.

注 5. 规定辐角的主值区间 $[0, 2\pi)$ 不是绝对的, 实际上, 任意指定一个长度为 2π 半开半闭区间作为主值区间都是可以的, 例如 $(-\pi, \pi]$.

设 $|z| = r > 0$, θ 是 z 的一个辐角, 则

$$\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta, \quad \mathrm{Im}(z) = r\sin\theta,$$

因此有

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta).$$

上式称为 z 的一个三角式.

注意, 复数的三角式不是唯一的, 其中 θ 可以差 2π 的整数倍.

例 2

求 $\arg(1-2\,\mathrm{i})$.

解. 因 $1-2\mathrm{i} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{i}\right)$, 故 $\arg(1-2\,\mathrm{i}) = -\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi$. □

例 3

设 $z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$, 其中 $0<\alpha<2\pi$. 求 $|z|$ 和 $\mathrm{Arg}z$.

解. 由 $0<\alpha<2\pi$ 知 $\mathrm{Re}(z)\neq 0$, 故 $z\neq 0$. 由倍角公式得

$$\begin{aligned} z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha &= 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

所以 $|z|=2\sin\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{Arg}z=\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$. $\square$

为后面的讨论方便计, 对于形如 $\{\theta+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ 的集合

$$A=\{\alpha+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\},\quad B=\{\beta+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\},$$

我们约定

$$A+B=\{\alpha+\beta+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\},$$

$$A-B=\{\alpha-\beta+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\},$$

$$-A=\{-\alpha+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}.$$

定理 2 (辐角的性质)

1. 若 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 $\mathrm{Arg}\overline{z} = -\mathrm{Arg}z$.
2. 若 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则
$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$
3. (De Moivre 公式) 若 $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, 则
$$(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\,\sin n\theta.$$

设 $z_1 = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha)$, $z_2 = s(\cos\beta + \mathrm{i}\,\sin\beta)$ 都是非零复数, 则

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= rs(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\,\sin\beta) \\ &= rs((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)) \\ &= rs(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\,\sin(\alpha+\beta)), \end{aligned}$$

故 $\alpha + \beta$ 是 $z_1 \cdot z_2$ 的一个辐角, 因此

$$\begin{aligned} \mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) &= \{\alpha + \beta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} + \{\beta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2). \end{aligned}$$

□

例 4

证明: $\arctan \frac{11}{2} = 3 \arctan \frac{1}{2}$.

解. 设 $z = 2 + \mathrm{i}$, 则 $\arg z = \arctan \frac{1}{2}$. 因 $z^3 = (2 + \mathrm{i})^3 = 2 + 11\,\mathrm{i}$, 故 $\arg(z^3) = \arctan \frac{11}{2}$. 因

$$\operatorname{Arg}(z^3) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z) = \{3 \arctan \frac{1}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

故存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 $\arctan \frac{11}{2} = 3 \arctan \frac{1}{2} + 2k\pi$.

由 $0 < 3 \arctan \frac{1}{2} + 2k\pi < \frac{\pi}{2}$, 得

$$\frac{-3\pi}{2} < -3 \arctan \frac{1}{2} < 2k\pi < \frac{\pi}{2} - 3 \arctan \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

故 $k = 0$. 所以 $\arctan \frac{11}{2} = 3 \arctan \frac{1}{2}$. □

例 5

证明 (Vieta 恒等式):

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta \cos\frac{k\pi}{2},$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta \sin\frac{k\pi}{2}.$$

解. 根据 De Moivre 公式和二项式定理, 有

$$\cos n\theta + \mathrm{i}\,\sin n\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k\,\cos^{n-k}\theta \sin^k\theta.$$

因 $\mathrm{i}^k = (\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{2})^k = \cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\,\sin\frac{k\pi}{2}$, 故

$$\cos n\theta = \mathrm{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta \cos\frac{k\pi}{2},$$

$$\sin n\theta = \mathrm{Im}((\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta \sin\frac{k\pi}{2}.$$

□

定义 3

设 n 为正整数. 若复数 z, w 满足 $w^n = z$, 则称 z 是 w 的 n 次方, 称 w 是 z 的 n 次方根.

定理 3

设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)$, 其中 $r > 0$, 则 z 恰有 n 个 n 次方根:

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

注 1. 若 n 是正整数, 则任意复数总有 n 次方根.

注 2. 当整数 $n \geq 2$ 时, w_k 分布在以原点为中心, 以 $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆周上, 并且它们恰好把圆周 n 等分.

注 3. 对 $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, 称

$$\omega_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

为 n 次单位根. 除 $\omega_0 = 1$ 之外, 其余的 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}$ 恰好是方程

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$$

的 $n-1$ 个根. 多项式 $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$ 称为分圆多项式.

注 4. 由乘法的性质知 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)$ 的 n 次方根可表为

$$\begin{aligned} w_k &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\theta}{n}\right) \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \\ &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\theta}{n}\right) \cdot \omega_k. \end{aligned}$$

例 6

若复数 z 满足 $z^3=8$, 求 z^2+2z+3 的值.

解. 因 $\left(\frac{z}{2}\right)^3=1$, 故 $z=2\omega$ (其中 ω 是 3 次单位根).

若 $\omega=1$, 则 $z=2$, 故 $z^2+2z+3=11$.

若 $\omega\neq 1$, 则 $\omega^2+\omega+1=0$, 因此

$$z^2+2z+3=(2\omega)^2+2(2\omega)+3=4(\omega^2+\omega+1)-1=-1.$$ □

注. 对 $\omega\neq 1$ 的情况, 一般方法是利用 $\omega^2=-\omega-1$ 来降次.

例 7

若 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ 且 $\alpha,\beta\neq 0$, 求 $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2023}+\left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{2023}$.

解. 由 $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2+\dfrac{\alpha}{\beta}+1=0$ 和 $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$, 知 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 和 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 都满足方程 $z^3=1$. 由 $\alpha(\alpha+\beta)=-\beta^2\neq 0$, 知 $\alpha+\beta\neq 0$, 故

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=-\frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{\beta}{\alpha+\beta}=-\frac{\alpha}{\beta},$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2023}+\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{2023}=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2023}+\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2023}\\
=&-\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2023}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2023}\right)=-\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3\cdot 674+1}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3\cdot 674+1}\right)\\
=&-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=1.
\end{aligned}$$

□