少年班数学II 第六章数列

§6.2 数列的通项

version $\beta 1.0$

2023 年 5 月 5 日, 星期日

例 1

设至少四项的数列 $\{a_n\}$, 满足 $S_n = npa_n$ (p 为常数), 且 $a_1 \neq a_2$. 求通项.

解. 由 $a_1 + a_2 = S_2 = 2pa_2$, 得 $(2p-2)a_2 = a_1 - a_2 \neq 0$, 故 $p \neq 1$.

又由 $a_1 = S_1 = pa_1$ 得 $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$.

由 $a_2 = S_2 = 2pa_2$, 得 $p = \frac{1}{2}$, 因此 $S_n = \frac{n}{2}a_n$.

由 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{n+1}{2}a_{n+1} - \frac{n}{2}a_n$, 得 $(n-1)a_{n+1} = na_n$.

将 $(n-1)a_{n+1} = na_n$ 和 $na_{n+2} = (n+1)a_{n+1}$ 两式相加得

$$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1},$$

故 $\{a_n\}$ 是等差数列.

再由 $a_1 = 0$, $d = a_2 - a_1 = a_2$, 得通项 $a_n = (n-1)a_2$. □

例 2

设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n, 证明:

(1) 若 $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 则 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}$, 则 $\{a_n\}$ 是等比数列.

解. 因 $2a_{n+1} = 2S_{n+1} - 2S_n = (n+1)(a_1 + a_{n+1}) - n(a_1 + a_n)$, 故 $a_1 + (n-1)a_{n+1} = na_n$. 因此也有 $a_1 + na_{n+2} = (n+1)a_{n+1}$. 所以 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$. □

♣ 由 $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 知 a_1, a_2 可确定 a_3. 一般地, 由 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ $(k \geq 2)$ 可确定 a_{k+1}, 所以数列由其前两项唯一确定, 故满足条件的数列即为所求. 而由 a_1, a_2 确定的等差数列 $\{a_n\}$ 就满足这一条件.

例 3

已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2+n}$, 求 a_n.

解. 满足题意的 $\{a_n\}$ 是唯一确定的, 所以若能找到一个数列满足题设条件, 则其通项公式即为所求. 由

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(k - \frac{1}{n+1}\right) - \left(k - \frac{1}{n}\right),$$

知 $a_n = k - \frac{1}{n}$ 满足递推关系.

再由 $a_1 = \frac{1}{2}$ 得 $a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$ 满足题中所有条件. $\square$

例 4

已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \dfrac{2}{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n$. 求 a_n.

解. 由

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{\dfrac{k}{n+1}}{\dfrac{k}{n}}$$

$(k \neq 0)$, 知 $a_k = \dfrac{k}{n}$ 满足递推关系. 再由 $a_1 = \dfrac{2}{3}$ 得 $a_n = \dfrac{2}{3n}$. $\square$

例 5

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且满足 $nS_{n+1} - (n+3)S_n = 0$. 求 a_n.

解. 由 $nS_{n+1} = (n+3)S_n$, 得 $(n+1)S_{n+2} = (n+4)S_{n+1}$. 两式相减得

$$(n+1)S_{n+2} - nS_{n+1} = (n+4)S_{n+1} - (n+3)S_n$$

即 $(n+1)a_{n+2} = (n+3)a_{n+1}$, 因此有

$$\frac{a_{n+2}}{(n+2)(n+3)} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

所以数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right\}$ 是常数列.

再由 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 知 $\left\{\frac{a_n}{n(n+1)}\right\}$ 也是常数列. 所以

$$\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

例 6

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 且 $3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (n+2)a_n$. 求 a_n 及 S_n.

解. 由

$$3S_{n+1} = (n+3)a_{n+1} = (n+3)(S_{n+1} - S_n),$$

知

$$nS_{n+1} - (n+3)S_n = 0.$$

同上例, 可得 $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $a_n = n(n+1)$. □

例 7

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=4a_n-3n+1$, 求 a_n.

解. 由

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{a_n}{4^n}+\frac{-3n+1}{4^{n+1}}$$

得

$$\frac{a_{n+1}-(n+1)}{4^{n+1}}=\frac{a_n-n}{4^n},$$

所以 $\dfrac{a_n-n}{4^n}$ 为常数 $\dfrac{1}{4}$. □

♣ 进一步问: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=c$, $a_{n+1}=ra_n+f(n)$ (其中 c,r 都是非零常数, $f(x)$ 是多项式), 如何求 a_n ?

例 8

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n + \frac{n+1}{2^n}$, 求 a_n.

解. 由

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{2^n},$$

得

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2^n} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{2^{n-1}},$$

故

$$\frac{a_n}{n} + \frac{1}{2^{n-1}} = 2,$$

所以 $a_n = 2n - \frac{n}{2^{n-1}}$. □

例 9

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a$, $a_{n+1} = S_n + 3^n$, 求 a_n.

解. 由 $a_{n+1} = S_n + 3^n$, 得 $S_{n+1} - S_n = S_n + 3^n$, 即

$$S_{n+1} = 2S_n + 3^n,$$

故 $\dfrac{S_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{S_n}{2^n} - \dfrac{3^n}{2^n}$. 因此 $\dfrac{S_n}{2^n} - \dfrac{3^n}{2^n} = \dfrac{a_1 - 3}{2}$, 即

$$S_n = (a-3)2^{n-1} + 3^n.$$

所以

$$a_n = \begin{cases} a, & n = 1; \\ (a-3)2^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

□

例 10

数列 $\{a_n\}$ 满足 $ba_n - 2^n = (b-1)S_n$ $(b \neq 0, 2)$, 求 a_n.

解. 易见 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = ba_n + 2^n$, 即

$$\frac{a_{n+1}}{b^{n+1}} = \frac{a_n}{b^n} + \frac{2^n}{b^{n+1}},$$

因此

$$\frac{a_{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{1}{b-2}\left(\frac{2}{b}\right)^{n+1} = \frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b-2}\left(\frac{2}{b}\right)^n.$$

所以

$$\frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b-2}\left(\frac{2}{b}\right)^n = \frac{2(b-1)}{b(b-2)},$$

即 $a_n = \dfrac{1}{b-2}\left(2(b-1)b^{n-1} - 2^n\right)$. □

例 11

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. 求 $\{a_n\}$.

解. 计算出 a_1, a_2, a_3, a_4. 容易归纳出 $a_n = \dfrac{1}{n}$. 又题设中的数列唯一存在, 而 $a_n = \dfrac{1}{n}$ 满足题设中所有条件, 故 $a_n = \dfrac{1}{n}$ 即为所求. □

♣ 或先证 a_n 恒不为零, 再令 $b_n = \dfrac{1}{a_n}$.

例 12

已知 $k(1)=1$, $k(2)=2$, $k(n+2)=k(n)+2^{n+1}$. 求 $\{k(n)\}$ 的通项公式.

解. 设 $k(n+2)+x\cdot 2^{n+2}=k(n)+x\cdot 2^{n}$, 即

$$k(n+2)=k(n)-3x\cdot 2^{n}.$$

所以可选 $-3x=2$, 即 $x=-\frac{2}{3}$, 就得到

$$k(n+2)-\frac{2}{3}\cdot 2^{n+2}=k(n)-\frac{2}{3}\cdot 2^{n},$$

故 $\left\{k(n)-\frac{2}{3}\cdot 2^{n}\right\}$ 是以 2 为周期的数列 $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\cdots$. 所以,

$$k(n)=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^{n+1}-1), & n \text{ 为奇数},\\ \frac{1}{3}(2^{n+1}-2), & n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

□

例 13

正数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}+a_n=\dfrac{n+1}{a_{n+1}-a_n}+2$. 求 a_n.

解. 由条件得

$$(a_{n+1}-1)+(a_n-1)=\frac{n+1}{(a_{n+1}-1)-(a_n-1)},$$

故

$$(a_{n+1}-1)^2-(a_n-1)^2=n+1,$$

累加可得 $a_n=1+\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}$. □

例 14

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 6$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n}{n+1} + n + 2$, 求 a_n.

解. 由条件得 $(n+1)a_{n+1} - (n+2)a_n = (n+1)(n+2)$, 故

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{a_n}{n+1} = 1.$$

因此 $a_n = (n+1)(n+2)$. □

例 15

若正数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $a_n + \dfrac{1}{a_n} = 2S_n$, 则 $a_n =$________.

解. 由 $S_n - S_{n-1} + \dfrac{1}{S_n - S_{n-1}} = 2S_n$, 得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1\ (n \geq 2)$, 故

$$S_n^2 = S_1^2 + n - 1 = n,$$

所以 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. □

例 16

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+2}-(t+1)S_{n+1}+tS_n=0$, $a_1=t$, $a_2=t^2$, 求 a_n.

解. 由 $S_{n+2}-S_{n+1}=t(S_{n+1}-S_n)$, 得 $a_{n+2}=ta_{n+1}$.

再由 $a_1=t$, $a_2=t^2$, 还得 $a_{n+1}=ta_n$. 所以 $a_n=t^n$. $\square$

例 17

若 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$. 求 a_n.

解. 因

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1} = \left(\frac{a_n - 1}{a_n + 1}\right)^2,$$

故令 $\frac{a_n - 1}{a_n + 1} = b_n$, 则 $b_n > 0$, $\ln b_{n+1} = 2\ln b_n$, $b_n = 3^{-2^{n-1}}$, 所以

$$a_n = \frac{1 + 3^{-2^{n-1}}}{1 - 3^{-2^{n-1}}}.$$

□

例 18

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n=\sqrt{a_1+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{a_n}{2}}$, 求 a_n.

解. 由条件得 $\dfrac{3}{4}a_n^2=a_1+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{a_n}{2}=S_n-\dfrac{a_n}{2}$.
将 $\dfrac{3}{4}a_n^2+\dfrac{a_n}{2}=S_n$ 和 $\dfrac{3}{4}a_{n+1}^2+\dfrac{a_{n+1}}{2}=S_{n+1}$ 两式相减得

$$\frac{3}{4}(a_{n+1}^2-a_n^2)+\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1},$$

即

$$\frac{3}{4}(a_{n+1}^2-a_n^2)-\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)=0,$$

得 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2}{3}$. 而 $a_1=\dfrac{2}{3}$, 故 $a_n=\dfrac{2n}{3}$. □

例 19

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n$, 求 a_n.

解法 1 (待定系数法) 设 x 为待定的常数, 由

$$a_{n+1}+x\cdot 5^{n+1}=2\left(a_n+\frac{5x+3}{2}\cdot 5^n\right),$$

令 $x=\dfrac{5x+3}{2}$, 解出 $x=-1$. 所以 $a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$. 因此

$$a_n-5^n=2^{n-1}(a_1-5)=-2^{n+1}.$$

解法 2 (累加法) 首先有 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$.

设 $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$, 得 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$, 所以

$$\begin{aligned}b_n&=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\\&=\frac{3}{2}\cdot\frac{5/2-(5/2)^n}{1-5/2}+\frac{1}{2}=\left(\frac{5}{2}\right)^n-2.\end{aligned}$$

解法 3 (解方程组法) 因

$$a_{n+1} - 5a_n = (2a_n + 3 \cdot 5^n) - 5(2a_{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1}) = 2(a_n - 5a_{n-1}),$$

故

$$a_{n+1} - 5a_n = 2^{n-1}(a_2 - 5a_1) = 3 \cdot 2^{n+1},$$

得到方程组

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 5^n, \\ a_{n+1} - 5a_n = 3 \cdot 2^{n+1}. \end{cases}$$

解出 $a_n = 5^n - 2^{n+1}$. $\square$

例 20

设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{4}a_{n-1} + \dfrac{1}{4}b_{n-1}, \\ b_n = \dfrac{1}{4}a_{n-1} + \dfrac{3}{4}b_{n-1}. \end{cases}$$

求 a_n, b_n.

解. 首先注意到, 当 $\lambda \neq -3$ 时, $a_n + \lambda b_n = \dfrac{3+\lambda}{4}\left(a_{n-1} + \dfrac{1+3\lambda}{3+\lambda}b_{n-1}\right)$.

令 $\lambda = \dfrac{1+3\lambda}{3+\lambda}$, 则有 $\lambda = \pm 1$.

取 $\lambda = 1$, 得 $a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, 故 $a_n + b_n = a_1 + b_1 = 3$.

取 $\lambda = -1$, 得 $a_n - b_n = \dfrac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$, 故 $a_n - b_n = \dfrac{a_1 - b_1}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

所以 $a_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2^n}$, $b_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2^n}$. □

例 21

设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$, $b_1=1$, 且当 $n\geq 2$ 时,

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \end{cases}$$

求 a_n, b_n.

解. $\lambda\neq -3$ 时, $a_n+\lambda b_n=(\lambda+3)\left(a_{n-1}+\dfrac{\lambda-1}{\lambda+3}b_{n-1}\right)$.
令 $\lambda=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+3}$, 得 $\lambda=-1$. 于是 $a_n-b_n=2(a_{n-1}-b_{n-1})=2^{n-1}$, 所以

$$a_n=3a_{n-1}-b_{n-1}=2a_{n-1}+(a_{n-1}-b_{n-1})=2a_{n-1}+2^{n-2}.$$

由此可解出 $a_n=(n+3)2^{n-2}$, $\quad b_n=(n+1)2^{n-2}$. □

例 22

设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$, $b_1=1$, 且当 $n\geq 2$ 时,

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{4}a_{n-1} + \dfrac{1}{4}b_{n-1} + 1, \\ b_n = \dfrac{1}{4}a_{n-1} + \dfrac{3}{4}b_{n-1} + 1, \end{cases}$$

求 a_n, b_n.

解. 首先有 $a_n + \lambda b_n + \mu = \dfrac{\lambda+3}{4}\Big(a_{n-1} + \dfrac{3\lambda+1}{\lambda+3}b_{n-1} + \dfrac{4\lambda+4\mu+4}{\lambda+3}\Big)$,
其中 $\lambda \neq -3$. 令 $\lambda = \dfrac{3\lambda+1}{\lambda+3}$, $\mu = \dfrac{4\lambda+4\mu+4}{\lambda+3}$, 可得 $\lambda=-1$, $\mu=0$,
故 $a_n - b_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1}) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
从递推关系又可得 $a_n+b_n = a_{n-1}+b_{n-1}+2 = a_1+b_1+2(n-1) = 2n+1$.
所以 $a_n = n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n}$, $b_n = n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n}$. □