少年班数学II 第六章数列
§6.3 数列与不动点

version $\beta 1.0$

2023 年 5 月 9 日, 星期二

命题 1

考虑 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$, $n \in \mathbb{N}^+$.

1. 若 α, β 是方程 $x^2 - px - q = 0$ 的根, $\alpha \neq \beta$, 则

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1},$$

其中 A, B 由下面的条件唯一地确定

$$A + B = a_1, \qquad A\alpha + B\beta = a_2.$$

2. 若方程 $x^2 - px - q = 0$ 有唯一的根 α, 则

$$a_n = (A + Bn)\alpha^{n-1},$$

其中 A, B 由下面的条件唯一地确定

$$A + B = a_1, \qquad (A + 2B)\alpha = a_2.$$

命题 2

考虑 $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{x_n + c}$, $n \in \mathbb{N}^+$.

1. 若 α, β 都是方程 $x = \dfrac{ax + b}{x + c}$ 的解, $\alpha \neq \beta$, 则 $\left\{\dfrac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}\right\}$ 是等比数列.
2. 若 β 是方程 $x = \dfrac{ax + b}{x + c}$ 的唯一解, 则 $\left\{\dfrac{1}{x_n - \beta}\right\}$ 是等差数列.

例 1

设 $f_0=f_1=1$, $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, 求通项.

解. 由特征方程 $x^2-x-1=0$, 解出 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, 故

$$f_n=A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n+B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

代入初始条件, 可得

$$\begin{cases} A+B=1, \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot A+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot B=1, \end{cases}$$

解出 $A=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $B=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 所以

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big).$$

□

例 2

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $S_{n+1} = 4a_n + 2$, 求 a_{2023}.

解. $n \geq 2$ 时, $S_{n+1} = 4a_n + 2$, $S_n = 4a_{n-1} + 2$, 故

$$a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1}).$$

特征方程为 $x^2 - 4x + 4 = 0$, 故 $x_1 = x_2 = 2$, 因此

$$a_n = (An + B) \cdot 2^{n-1}.$$

由已知 $a_2 = 5$, 所以

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 2(2A + B) = 5, \end{cases}$$

解出 $A = \dfrac{3}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$, 故 $a_n = \dfrac{3n-1}{2} \cdot 2^{n-1}$. $\square$

例 3

设 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0, 1)$, 且 $x_0 = f(x_0)$, $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(a_{n-1})$, $n = 2, 3, \cdots$, 则 $\{a_n - x_0\}$ 是公比为 a 的等比数列.

解. 因 $ax_0 + b = x_0$, $b - x_0 = -ax_0$, 故

$$a_n - x_0 = (a \cdot a_{n-1} + b) - x_0 = a \cdot a_{n-1} - ax_0 = a(a_{n-1} - x_0).$$

□

例 4

$\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{3}$, 求通项.

解. 迭代函数为 $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3}$. 令 $f(x) = x$, 得 $x = 1$.

于是 $a_{n+1} - 1 = \dfrac{2}{3}(a_n - 1)$.

□

例 5

设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$, 且 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的不动点, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbb{N}^+$.

(1) 若 $x_1\neq x_2$, 则 $\left\{\dfrac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right\}$ 是公比为 $\dfrac{a-x_1c}{a-x_2c}$ 的等比数列.

(2) 若 $x_1=x_2=x_0$, 则 $\left\{\dfrac{1}{a_n-x_0}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{2c}{a+d}$ 的等差数列.

解. (1) 由 $\dfrac{ax_i+b}{cx_i+d}=x_i$ 得 $\dfrac{b-dx_i}{a-cx_i}=-x_i$, 故 $dx_i-b=(a-cx_i)x_i$,

$$\frac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2}=\frac{\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}-x_1}{\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}-x_2}=\frac{(a-cx_1)a_n+(b-dx_1)}{(a-cx_2)a_n+(b-dx_2)}$$

$$=\frac{a-cx_1}{a-cx_2}\cdot\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}.$$

(2) 因 x_0 是 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ 的唯一解，故 $x_0=\dfrac{a-d}{2c}$，且 $\dfrac{b-dx_0}{a-cx_0}=-x_0$，故

$$\frac{1}{a_{n+1}-x_0}=\frac{1}{\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}-x_0}=\frac{ca_n+d}{(a-cx_0)a_n+(b-dx_0)}$$

$$=\frac{ca_n+d}{(a-cx_0)\left(a_n+\dfrac{b-dx_0}{a-cx_0}\right)}=\frac{ca_n+d}{(a-cx_0)(a_n-x_0)}$$

$$=\frac{c(a_n-x_0)+(d+cx_0)}{(a-cx_0)(a_n-x_0)}=\frac{c}{a-cx_0}+\frac{d+cx_0}{a-cx_0}\cdot\frac{1}{a_n-x_0}$$

$$=\frac{c}{a-c\cdot\dfrac{a-d}{2c}}+\frac{d+c\cdot\dfrac{a-d}{2c}}{a-c\cdot\dfrac{a-d}{2c}}\cdot\frac{1}{a_n-x_0}$$

$$=\frac{1}{a_n-x_0}+\frac{2c}{a+d}.$$

□

例 6

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$, 求通项.

解. 迭代函数为 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$. 令 $f(x)=x$, 得 $x_1=1$, $x_2=2$, 以及

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-2}=\frac{\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-1}{\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-2}=\frac{4a_n-2-(a_n+1)}{4a_n-2-2(a_n+1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n-2},$$

所以

$$\frac{a_n-1}{a_n-2}=\frac{a_1-1}{a_1-2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

得

$$a_n=\frac{2^{n-2}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n-2}-3^{n-1}}.$$

□

例 7

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$, 求通项.

解. 令 $x=\dfrac{2x}{x+2}$, 得 $x_1=x_2=0$. 设 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$, 则由 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$ 可得

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}.$$

因 $\{b_n\}$ 首项为 1, 公差为 $\dfrac{1}{2}$, 于是

$$b_n=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2},$$

由此得 $a_n=\dfrac{2}{n+1}$. $\square$

例 8

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且满足条件: $x^2 - a_n \cdot x - a_n = 0$ 有一根为 $S_n - 1$. 求 $\{a_n\}$ 的通项.

解. 由条件知 $a_1 = \frac{1}{2}$, $(S_n - 1)^2 - a_n(S_n - 1) - a_n = 0$.

将 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 代入上式, 得

$$S_n = \frac{1}{2 - S_{n-1}}.$$

记 $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$. 令 $f(x) = x$, 得不动点 $x_0 = 1$. 直接计算有

$$\frac{1}{S_{n+1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{2 - S_n} - 1} = \frac{2 - S_n}{S_n - 1} = \frac{1}{S_n - 1} - 1,$$

所以 $S_n = \dfrac{n}{n+1}$, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. □

例 9

设 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{2ax+d}$ $(a\neq 0)$, x_1,x_2 是 $f(x)$ 的不动点, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(a_{n-1})$, $n=2,3,\cdots$, 则 $\dfrac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2}=\left(\dfrac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right)^2$.

解. 由 $dx_1=b-ax_1^2$, $dx_2=b-ax_2^2$, 得

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-x_1}{a_{n+1}-x_2}&=\frac{a\cdot a_n^2+b-(2a\cdot a_n+d)x_1}{a\cdot a_n^2+b-(2a\cdot a_n+d)x_2}\\&=\frac{a\cdot a_n^2+b-2a\cdot a_nx_1-b+ax_1^2}{a\cdot a_n^2+b-2a\cdot a_nx_2-b+ax_2^2}\\&=\left(\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right)^2.\end{aligned}$$

□

例 10

数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=4$, $x_{n+1}=\dfrac{{x_n}^2-3}{2x_n-4}$, 求通项公式.

解. 对 $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$ 的不动点 α, 有 $\alpha^2-4\alpha+3=0$, 故

$$x_{n+1}-\alpha=\frac{x_n^2-3}{2x_n-4}-\alpha=\frac{(x_n-\alpha)^2}{2x_n-4},$$

因 $1,3$ 是 f 的不动点, 故

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}-3}=\left(\frac{x_n-1}{x_n-3}\right)^2.$$

又 $\dfrac{x_1-1}{x_1-3}=3$, 所以

$$\log_3\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}-3}=2\log_3\frac{x_n-1}{x_n-3}.$$

令 $a_n=\log_3\dfrac{x_n-1}{x_n-3}$, 则 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 $a_n=2^{n-1}$, 即 $\dfrac{x_n-1}{x_n-3}=3^{2^{n-1}}$, 所以 $x_n=\dfrac{3^{2^{n-1}+1}-1}{3^{2^{n-1}}-1}$. □

例 11

$\{a_n\}$ 定义如下: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 6}{a_n + 1}$, 求通项.

解. 先求出不动点. 令 $x = \dfrac{2x+6}{x+1}$, 解出 $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. 由

$$a_{n+1} - 3 = \frac{2a_n + 6}{a_n + 1} - 3 = -\frac{a_n - 3}{a_n + 1},$$

$$a_{n+1} + 2 = \frac{2a_n + 6}{a_n + 1} + 2 = \frac{4(a_n + 2)}{a_n + 1},$$

两式相除得 $\dfrac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 2} = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{a_n - 3}{a_n + 2}$. 因此

$$\frac{a_n - 3}{a_n + 2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{a_1 - 3}{a_1 + 2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n,$$

所以 $a_n = \dfrac{3(-4)^n + 2}{(-4)^n - 1}$. □