少年班数学II第六章数列

§6.4 数列与不等式

version $\beta1.0$

2023 年 5 月 16 日, 星期二

例 1

设 A 是由定义在 $[2,4]$ 上且满足以下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合:

(i) 对任意的 $x \in [1,2]$ 都有 $\varphi(2x) \in (1,2)$;

(ii) 存在常数 L $(0 < L < 1)$, 使得对任意的 $x_1, x_2 \in [1,2]$ 都有

$$|\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| \le L|x_1 - x_2|.$$

(1) 设 $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x \in [2,4]$, 证明: $\varphi(x) \in A$.

(2) 设 $\varphi(x) \in A$, 如果存在 $x_0 \in (1,2)$, 使得 $x_0 = \varphi(2x_0)$, 证明这样的 x_0 是唯一的.

(3) 设 $\varphi(x) \in A$. 任取 $x_1 \in (1,2)$, 令 $x_{n+1} = \varphi(2x_n)$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明: 对任意的正整数 k, p, 都有 $|x_{k+p} - x_k| \le \dfrac{L^{k-1}}{1-L}|x_2 - x_1|$.

解. (1) 因 $\sqrt[3]{3} \le \varphi(2x) \le \sqrt[3]{5}$, 故 $\varphi(2x) \in (1,2)$.

对任意的 $x_1, x_2 \in [1,2]$ 都有

$$\begin{aligned}
&|\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| = |\sqrt[3]{1+2x_1} - \sqrt[3]{1+2x_2}| \\
=&\frac{2|x_1 - x_2|}{(1+2x_1)^{2/3} + (1+2x_2)^{2/3} + (1+2x_1)^{1/3}(1+2x_2)^{1/3}} \\
\le&\frac{2}{3}|x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

(2) 设 $x_1, x_2 \in (1,2)$ 使得 $x_1 = \varphi(2x_1)$, $x_2 = \varphi(2x_2)$. 因

$$|x_1 - x_2| = |\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| \le L|x_1 - x_2|,$$

故 $(1-L)|x_1 - x_2| \le 0$, 因此 $|x_1 - x_2| \le 0$, 即 $x_1 = x_2$.

(3) 因

$$|x_{n+1}-x_n| = |\varphi(2x_n)-\varphi(2x_{n-1})| \le L|x_n - x_{n-1}|,$$

故

$$|x_{n+1}-x_n| \le L|x_n - x_{n-1}| \le L^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \le \cdots \le L^{n-1}|x_2 - x_1|,$$

因此

$$\begin{aligned}
|x_{k+p}-x_k| &\le |(x_{k+p}-x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1}-x_{k+p-2}) + \cdots + (x_{k+1}-x_k)| \\
&\le |x_{k+p}-x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1}-x_{k+p-2}| + \cdots + |x_{k+1}-x_k| \\
&\le (L^{k+p-2} + L^{k+p-3} + \cdots + L^{k-1})|x_2 - x_1| \\
&= \frac{L^{k-1}(1-L^{k+p-1})}{1-L}|x_2 - x_1| \\
&\le \frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

□

例 2

已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = np^n + qa_n$.

(1) 若 $q = 1$, 求 a_n.

(2) 若 $|p| < 1$, $|q| < 1$, 求证: $\{a_n\}$ 有界.

解. (1) 当 $q = 1$ 时, $a_{n+1} - a_n = np^n$, 因此

$$a_n = p + 2p^2 + 3p^3 + \cdots + (n-1)p^{n-1}.$$

$p = 1$ 时, $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

$p \neq 1$ 时, 因 $pa_n = p^2 + 2p^3 + 3p^4 + \cdots + (n-1)p^n$, 故

$$(1-p)a_n = p + p^2 + \cdots + p^{n-1} - (n-1)p^n = \frac{p - p^n}{1-p} - (n-1)p^n,$$

所以

$$a_n = \frac{p - p^n}{(1-p)^2} - \frac{(n-1)p^n}{1-p}.$$

(2) 由

$$|a_{n+1}| \le n|p|^n + q|a_n| \le n|p|^n + |a_n|,$$

得

$$|a_{n+1}| - |a_n| \le n|p|^n.$$

上式两边求和, 并注意到 $a_1 = 0$, 再利用 (1) 的结论, 就有

$$\begin{aligned} |a_n| &\le 1 \cdot |p|^1 + 2 \cdot |p|^2 + \cdots + (n-1) \cdot |p|^{n-1} \\ &= \frac{|p| - |p|^n}{(1-|p|)^2} - \frac{(n-1)|p|^n}{1-|p|} \\ &\le \frac{|p| - |p|^n}{(1-|p|)^2} < \frac{|p|}{(1-|p|)^2}. \end{aligned}$$

□

例 3

正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2\ (c>0)$.

(1) 求证: 对任意的 $M>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n>M$.

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{1+ca_n}$, S_n 是 b_n 的前 n 项和, 求证: 对任意的 $d>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, $0<\left|S_n-\dfrac{1}{ca_1}\right|<d$.

解. 由 $a_{n+1}=a_n+ca_n^2>a_n$ 知 $\{a_n\}$ 严格递增, 因此

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=a_1+ca_1^2+ca_2^2+\cdots+ca_{n-1}^2>(n-1)ca_1^2.$$

对任意的 $M>0$, 取 $N=\left[\dfrac{M}{ca_1^2}\right]+2$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$a_n>a_N>(N-1)ca_1^2=\left(\left[\frac{M}{ca_1^2}\right]+1\right)ca_1^2>\frac{M}{ca_1^2}\cdot ca_1^2=M.$$

(2) 由 $a_{n+1}=a_n(1+ca_n)$, 得

$$b_n=\frac{1}{1+ca_n}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{ca_n^2}{ca_na_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{ca_na_{n+1}}=\frac{1}{ca_n}-\frac{1}{ca_{n+1}},$$

故

$$S_n=\frac{1}{ca_1}-\frac{1}{ca_{n+1}},$$

因此

$$\left|S_n-\frac{1}{ca_1}\right|=\frac{1}{ca_{n+1}}>0.$$

由 (1) 有 $a_{n+1}>nca_1^2$, 故 $\dfrac{1}{ca_{n+1}}<\dfrac{1}{nc^2a_1^2}$.

对任意的 $d>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{dc^2a_1^2}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, $\dfrac{1}{Nc^2a_1^2}<d$, 因此

$$\left|S_n-\frac{1}{ca_1}\right|=\frac{1}{ca_{n+1}}<\frac{1}{nc^2a_1^2}<\frac{1}{Nc^2a_1^2}<d. \qquad \square$$

例 4

定义 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$, 又设

$$S_n=f\Big(\frac{1}{n}\Big)+f\Big(\frac{2}{n}\Big)+\cdots+f\Big(\frac{n-1}{n}\Big),\quad (n=2,3,\cdots).$$

(1) 求 S_n.

(2) 是否存在常数 M 使得对任意的 $n\geq 2$ 都有 $\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}\leq M$?

解. (1) 因对任意的 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 都有

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{k}{n}\Big)+f\Big(\frac{n-k}{n}\Big)&=\frac{4^{\frac{k}{n}}}{4^{\frac{k}{n}}+2}+\frac{4^{\frac{n-k}{n}}}{4^{\frac{n-k}{n}}+2}\\ &=\frac{4^{\frac{k}{n}}}{4^{\frac{k}{n}}+2}+\frac{4}{2\cdot 4^{\frac{k}{n}}+4}=1, \end{aligned}$$

故 $2S_n=n-1$, $S_n=\dfrac{n-1}{2}$.

(2) 由 (1) 知

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{S_k}=2\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big).$$

取 $n=2^m$, 则

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{S_k}>2\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^m}\Big)$$

$$=2\Big(1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m\text{ 个}}\Big)=m+2.$$

故对任意的 M, 都存在 $n\geq 2$ (例如可取 $n=2^{[|M|]+2}$) 使得 $\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{S_k}>M$, 因此, 不存在常数 M 使得当 $n\geq 2$ 时总有 $\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}\leq M$. □