少年班数学第四章复数

§4.2 复数的性质 (续)

version $\beta 1.0$

2023 年 2 月 28 日, 星期二

例 1

证明 (Vieta 恒等式):

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^{k}\theta \cos\frac{k\pi}{2},$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^{k}\theta \sin\frac{k\pi}{2}.$$

特别地,

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \quad \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta.$$

$$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta, \qquad \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

解. 根据 De Moivre 公式和二项式定理, 有

$$\cos n\theta + \mathrm{i}\,\sin n\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta.$$

因 $\mathrm{i}^k = (\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{2})^k = \cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\,\sin\frac{k\pi}{2}$, 故

$$\cos n\theta = \operatorname{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta \cos\frac{k\pi}{2},$$

$$\sin n\theta = \operatorname{Im}((\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta \sin\frac{k\pi}{2}.$$

□

定义 1

设 n 为正整数. 若复数 z, w 满足 $w^n = z$, 则称 z 是 w 的 n 次方, 称 w 是 z 的 n 次方根.

定理 1

设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 其中 $r > 0$, 则 z 恰有 n 个 n 次方根:

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

注 1. 若 n 是正整数, 则任意复数总有 n 次方根.

注 2. 当整数 $n \geq 2$ 时, w_k 分布在以原点为中心, 以 $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆周上, 并且它们恰好把圆周 n 等分.

注 3. 对 $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, 称

$$\omega_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

为 n 次单位根. 除 $\omega_0 = 1$ 之外, 其余的 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}$ 恰好是方程

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$$

的 $n-1$ 个根. 多项式 $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$ 称为分圆多项式.

注 4. 由乘法的性质知 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)$ 的 n 次方根可表为

$$\begin{aligned} w_k &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\theta}{n}\right) \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \\ &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\theta}{n}\right) \cdot \omega_k. \end{aligned}$$

例 2

若复数 z 满足 $z^3 = 8$, 求 $z^2 + 2z + 3$ 的值.

解. 因 $\left(\frac{z}{2}\right)^3 = 1$, 故 $z = 2\omega$ (其中 ω 是 3 次单位根).

若 $\omega = 1$, 则 $z = 2$, 故 $z^2 + 2z + 3 = 11$.

若 $\omega \neq 1$, 则 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, 因此

$$z^2 + 2z + 3 = (2\omega)^2 + 2(2\omega) + 3 = 4(\omega^2 + \omega + 1) - 1 = -1. \qquad \square$$

注. 对 $\omega \neq 1$ 的情况, 一般方法是利用 $\omega^2 = -\omega - 1$ 来降次.

例 3

若 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ 且 $\alpha,\beta\neq 0$，求 $\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2023}+\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{2023}$.

解. 由 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{\alpha}{\beta}+1=0$ 和 $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\beta}{\alpha}+1=0$，知 $\frac{\alpha}{\beta}$ 和 $\frac{\beta}{\alpha}$ 都满足方程 $z^3=1$. 由 $\alpha(\alpha+\beta)=-\beta^2\neq 0$，知 $\alpha+\beta\neq 0$，故

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=-\frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{\beta}{\alpha+\beta}=-\frac{\alpha}{\beta},$$

因此

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2023}+\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{2023}=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2023}+\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2023}\\ &=-\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2023}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2023}\right)=-\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3\cdot 674+1}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3\cdot 674+1}\right)\\ &=-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=1.\end{aligned}$$

□

定义 2

称映射

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad x+y\,\mathrm{i}\mapsto \mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\,\sin y)$$

为指数函数, 通常把 $\exp(z)$ 记为 e^z.

性质 1

$\mathbb{C}$ 上的指数函数 $\exp$ 在 $\mathbb{R}$ 上的限制就是通常的指数函数.

性质 2

对任意实数 θ, 都有 (Euler 公式):

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta.}$$

性质 3

1. 若 $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ (其中 $x, y \in \mathbb{R}$), 则
$$\big|\exp(z)\big| = \mathrm{e}^x > 0,$$
$$\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \{y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$
2. (加法定理) 若 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 则 $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
3. (周期性) 若 $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, 则
$$\exp(z + 2k\pi\mathrm{i}) = \exp(z).$$
并且 exp 的周期都是 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍.

1. 称 $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2\,\mathrm{i}}$ 为正弦函数.

   称 $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2}$ 为余弦函数.

   其他的三角函数用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 按通常的方式来定义.

2. 称 $\operatorname{sh} z = \dfrac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}$ 为双曲正弦函数.

   称 $\operatorname{ch} z = \dfrac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$ 为双曲余弦函数.

   其他的双曲函数用 $\operatorname{sh} z$ 和 $\operatorname{ch} z$ 按通常的方式来定义.

注意: 上面定义的这些函数中, 只有指数函数是真正 “基本的”.

性质 4

- $\sin z$ 在 $\mathbb{R}$ 上的限制就是原来的 $\sin x$. 其余的也是如此.
- $\sin z$, $\cos z$ 的奇偶性, 周期性, 恒等式等与原来的一致.
- 注意: $\sin z$ 和 $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 上都是无界的.
- $\operatorname{sh} z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}\,z), \quad \operatorname{ch} z = \cos(\mathrm{i}\,z).$
- $\operatorname{sh} z$ 和 $\operatorname{ch} z$ 的奇偶性, 恒等式等与原来的一致.
- $\operatorname{sh} z$ 和 $\operatorname{ch} z$ 都以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期.

定义 3

1. 称 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的 (多值) 函数
$$\mathrm{Ln}(z)=\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$$
为对数函数.
2. 对每个 $k\in\mathbb{Z}$, 称 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的函数
$$\ln_k(z)=\ln|z|+\mathrm{i}\,(\arg(z)+2k\pi)$$
为 (多值) 函数 $\mathrm{Ln}(z)$ 的一个分支.
3. 把 $k=0$ 所对应的分支
$$\ln(z)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg(z)$$
称为多值函数 $\mathrm{Ln}(z)$ 的主值.

定义 4

对任意的非零复数 a 以及复数 b, 定义

$$a^b = \exp(b\mathrm{Ln}(a)).$$

称 $\exp(b\ln(a))$ 为 a^b 的主值.

- 注 1. 当 n 为整数时, z^n 是单值的.
- 注 2. 当 n 为正整数时, $z^{\frac{1}{n}}$ 恰有 n 个分支.

例 4

计算 $\mathrm{Ln}(2)$，$\mathrm{Ln}(-2)$，$\mathrm{Ln}(\mathrm{i})$，$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})$, 指出主值.

例 5

计算 $1^{\sqrt{2}}$，$(-1)^{\sqrt{2}}$，i^{i}，$(-1)^{\frac{1}{3}}$, 指出主值.