

2026 年数学 II 期末考试题目（回忆版）

整理者：双草酸酯

本试卷共 9 题 100 分，考试时长 150 分钟

1. (10 分) 设 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ 。若 f 在 x_0 连续, 且 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 连续。

证明： 复合函数 $g \circ f$ 在 x_0 连续。

2. (10 分) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}.$$

3. (10 分) φ 为双射, ψ 为 φ 的反函数, 设 $x_0 \in I$, $y_0 = \psi(x_0)$ 。若 φ 在 x_0 点的导数 $\varphi'(x_0) \neq 0$; ψ 在 y_0 点连续。

证明： φ 在 y_0 点可导, 且

$$\psi'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}.$$

4. (10 分) 设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ 。

证明： 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

5. (15 分) 设函数 f 满足在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $(a, +\infty)$ 内可导。且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$

证明： 存在 $\xi \in (a, +\infty)$, 使得

$$f'(\xi) = 0.$$

6. (10 分) 设

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n}{(x - x_0)^n} = 0$

证明：

$$A_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}.$$

7. (10 分) **证明：**

$$\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}, \quad x \in (0, 1).$$

8. (15 分) 已知：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right]}{3^x - 1} = 5, \quad \text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

9. (10 分) 设 $0 < \alpha < 1$, $f(x) = x^\alpha$, $x \in [0, +\infty)$ 。

(1) 证明: $-f$ 为凸函数。

(2) 设 $h > 0$, 证明: $g(x) = f(x+h) - f(x)$ 为减函数。

(3) 设 (a_i, b_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, 为 $[0, +\infty)$ 中的互不相交的开区间。已知

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq 1,$$

证明:

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq 1.$$