少年班数学第四章复数

§4.4 复数的代数应用

version $\beta 1.1$

2023 年 3 月 7 日, 星期二

1. 把系数都在数域 $\mathbb{F}$ 中的多项式称为 $\mathbb{F}$ 上的多项式.
2. 用 $\mathbb{F}[z]$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有的多项式构成的集合.

性质 1

若 $a \in \mathbb{F}$, $f(z), g(z) \in \mathbb{F}[z]$, 则 $a\,f(z)$, $f(z)+g(z)$, $f(z)\cdot g(z) \in \mathbb{F}[z]$.

定理 1 (带余除法)

设 $f(z), g(z)$ 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式. 若 $g(z)$ 不是 0 多项式, 则存在唯一的 $(q(z), r(z)) \in \mathbb{F}[z]^2$ 满足下列条件:

(1) $f(z) = q(z)g(z) + r(z)$;

(2) $r(z)$ 的次数小于 $g(z)$ 的次数.

定理1的证明: 存在性

1. 若存在 $q(z)\in\mathbb{F}[z]$ 使 $f(z)=q(z)g(z)$, 取 $r(z)=0$ 即可.
2. 若对任意的 $q(z)\in\mathbb{F}[z]$ 都有 $f(z)\neq q(z)g(z)$, 考虑集合

$$E=\{f(z)-\varphi(z)g(z):\varphi(z)\in\mathbb{F}[z]\}.$$

由最小数原理知 E 中必有次数最小的者, 设 $r(z)\in E$ 的次数最小, 则存在 $q(z)\in\mathbb{F}[z]$ 使得 $r(z)=f(z)-q(z)g(z)$. 因此 $f(z)=q(z)g(z)+r(z)$.

倘若 $r(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$ 的次数 n 不小于 $g(z)=b_mz^m+\cdots+b_0$ 的次数 m, 则 $h(z)=r(z)-\dfrac{a_n}{b_m}z^{n-m}g(z)\in E$, 且 $h(z)$ 的次数小于 $r(z)$ 的次数, 矛盾. 所以 $r(z)$ 的次数小于 $g(z)$ 的次数.

综上, 满足条件的 $(q(z),r(z))\in\mathbb{F}[z]^2$ 是存在的.

设 $(q_1(z), r_1(z)), (q_2(z), r_2(z)) \in \mathbb{F}[z]^2$ 是满足条件的有序对, 则

$$f(z) = q_1(z)g(z) + r_1(z) = q_2(z)g(z) + r_2(z),$$

因此

$$(q_1(z) - q_2(z))g(z) = r_2(z) - r_1(z).$$

下面比较上式两边的次数.

倘若 $q_1(z) \neq q_2(z)$, 则左边的次数不小于 $g(z)$ 的次数. 而 $g(z)$ 的次数都大于 $r_2(z) - r_1(z)$ 的次数, 于是左边的次数大于右边的次数, 矛盾.

因此必有 $q_1(z) = q_2(z)$, 进而 $r_1(z) = r_2(z)$. $\square$

定理 2 (因式定理)

设 $f(z)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 次多项式 $(n \geq 1)$, $\alpha \in \mathbb{F}$. 若 α 是 $f(z)$ 的根, 则存在 $n-1$ 次多项式 $g(z) \in \mathbb{F}[z]$, 使得 $f(z) = (z-\alpha)g(z)$.

证明. 由带余除法知, 存在多项式 $g(z), r(z) \in \mathbb{F}[z]$ 使得

$$f(z) = (z-\alpha)g(z) + r(z),$$

且 $r(z)$ 的次数小于 $z-\alpha$ 的次数. 因 $z-\alpha$ 是 1 次的, 故 $r(z)$ 为常数. 因

$$r(\alpha) = (\alpha-\alpha)g(\alpha) + r(\alpha) = f(\alpha) = 0,$$

故 $r(z)$ 为 0 多项式, 所以 $f(z) = (z-\alpha)g(z)$. 比较次数可知 $g(z)$ 是 $n-1$ 次多项式. $\square$

定理 3 (代数学基本定理)

次数大于 0 的复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中必有根. [超纲不证]

由代数学基本定理和因式定理知, 复系数 n 次多项式

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdot + a_1 z + a_0$$

(其中 $n > 0$, $a_n \neq 0$) 必可分解为 a_n 和 n 个一次因式的乘积:

$$f(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n).$$

$f(z)$ 还可进一步表示为

$$f(z) = a_n (z - \beta_1)^{k_1} (z - \beta_2)^{k_2} \cdots (z - \beta_l)^{k_l},$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l$ 是互不相同的复数, $k_1, k_2, \cdots, k_l$ 都是正整数, 并且

$k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$.

对于 $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$, 称 $z - \beta_j$ 是 $f(z)$ 的 k_j 重因式, 称 β_j 是 $f(z)$ 的 k_j 重根. 特别地, 1 重因式称为单因式, 1 重根称为单根.

定理 4

一元的 n $(n>0)$ 次复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中恰有 n 个根 (重根按重数计, 即每个 k 重根算 k 个根). $\square$

引理 1

若复数 α 是实系数多项式 $f(z)$ 的根, 则 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(z)$ 的根. $\square$

定理 5 (实系数多项式因式分解定理)

次数大于 0 的实系数多项式必可以分解为若干个次数不超过 2 的实系数多项式的乘积.

证明. 对多项式的次数 n 用数学归纳法. 当 $n=1,2$ 时, 结论显然成立. 当 $n\geq 3$ 时, 假设结论对于 $1,2,...,n-1$ 都成立; 下面来证明结论对 n 也成立.

设 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 是 n 次实系数多项式. 根据代数基本定理, $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中至少有一个根, 设 α 是 $f(z)$ 的一个根.

1. 若 α 是实数, 由因式定理知, 存在 $n-1$ 次实系数多项式 $g(z)$ 使得 $f(z)=(z-\alpha)g(z)$. 由归纳假设知 $g(z)$ 可分解为次数不超过 2 的实系数多项式的乘积, 因此 $f(z)$ 也可分解为次数不超过 2 的实系数多项式的乘积.

2. 若 α 是虚数, 则 $f(z)$ 仍可在复数域内分解为 $f(z)=(z-\alpha)g(z)$ (这里的 $g(z)$ 是复系数多项式). 由引理知 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(z)$ 的根, 即

$$0=f(\overline{\alpha})=(\overline{\alpha}-\alpha)g(\overline{\alpha}).$$

因 α 是虚数, 故 $\alpha\neq\overline{\alpha}$, 所以 $g(\overline{\alpha})=0$, 即 $\overline{\alpha}$ 是 $g(z)$ 的根.

因此存在复系数 $n-2$ 次多项式 $h(z)$ 使得 $g(z)=(z-\overline{\alpha})h(z)$, 所以有

$$f(z)=(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})h(z).$$

又因

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})=z^2-(\alpha+\overline{\alpha})z+\alpha\overline{\alpha}=z^2-2\mathrm{Re}(\alpha)z+|\alpha|^2$$

为实系数多项式, 我们断言, $h(z)$ 也必是实系数的多项式.

事实上, 根据 $\mathbb{C}$ 中的带余除法, $f(z)=(z^2-2\mathrm{Re}(\alpha)z+|\alpha|^2)h(z)+0$. 设 $\mathbb{R}$ 中的带余除法为 $f(z)=(z^2-2\mathrm{Re}(\alpha)z+|\alpha|^2)h_1(z)+r(z)$. 由 $\mathbb{C}$ 中的带余除法的唯一性, 就有 $h(z)=h_1(z)$. 所以 $h(z)$ 是实系数的多项式.

既然 $h(z)$ 是实系数的多项式, 且为 $n-2$ 次多项式, 根据归纳假设, $h(z)$ 可分解为次数不超过 2 的实系数多项式的乘积, 因此

$$f(z)=(z^2-2\mathrm{Re}(\alpha)z+|\alpha|^2)h(z)$$

也可分解为次数不超过 2 的实系数多项式的乘积. □