少年班数学 II 第四章复数

§4.5 综合练习

version $\beta 2.0$

2023 年 3 月 14 日, 星期二

例 1 (把下列复数化成三角形式)

1. $1+\cos\theta+i\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi)$; 解
2. $\dfrac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha}$; 解
3. $1+i\tan\alpha$; 解
4. $\dfrac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}$. 解

例 2

求 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha$, $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha$. 解

例 3

设$z_1\in\mathbb{C}$, $z_2\in\mathbb{C}$, 证明:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\big(|z_1|^2+|z_2|^2\big).$$

解

例 4

设 z_1, z_2, z_3 是复平面上三个点 A, B, C 对应的复数. 证明三角形 ABC 是等边三角形的充分必要条件是

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

解. 充分性, 必要性. □

例 5

若复数 $z_1 \neq z_2$, $|z_1| = \sqrt{2}$, 求 $\left|\dfrac{z_1 - \overline{z}_2}{2 - z_1 z_2}\right|$. 解

例 6

若 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r \neq 0$, 求 $\left|\dfrac{z_1{}^{-1} + z_2{}^{-1} + z_3{}^{-1}}{z_1 + z_2 + z_3}\right|$. 解

例 7

设复数 z 满足 $|z|=1$, 求 $|z^2-z+1|$ 的范围. 解

例 8

设 z 为虚数, $w=z+\dfrac{1}{z}$ 为实数, 且 $-1<w<2$.

(1) 求 $|z|$ 及 z 的实部的取值范围; 解

(2) 证明 $\mu=\dfrac{1-z}{1+z}$ 为纯虚数. 解

例 9

设 a 是负实数, 复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|$, 且 $\overline{z_1}\,z_2=a\left(1+\sqrt{3}i\right)$. 求 $\dfrac{z_2}{z_1}$. 解

例 10

若 x, y 满足 $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1=0$, 求 $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2010}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2010}$ 的值. 解

例 11

设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3,\ |z_1-z_2|=3\sqrt{3}$, 求

$$(z_1\overline{z}_2)^{2000}+(\overline{z}_1z_2)^{2000}.$$

解

例 12

若实数 x, y 满足 $z_1=x+\sqrt{3}+iy$, $z_2=x-\sqrt{3}+iy$, $|z_1|+|z_2|=4$, 求 $f(x,y)=|2x-4y+9|$ 的最值. 解

例 13

若复数 $z_1 = 2-\sqrt{3}a+ai$, $z_2=\sqrt{3}b-1+\left(\sqrt{3}-b\right)i$, 且它们的模相等, $\overline{z}_1 z_2$ 的辐角主值为 $\dfrac{\pi}{2}$, 求实数 a, b. 解

例 14

设复数 $z = 3\cos\theta + i\sin\theta$, 求 $y=\tan(\theta-\arg z)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值及相应的 θ. 解

例 15

设 $0<\theta<2\pi$, 复数 $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$, $u=a^2+ai$, 且 zu 是纯虚数, $a\in\mathbb{R}$.

(1) 求复数 u 的辐角主值 (用 θ 表示); 解

(2) 记 $w=z^2+u^2+2zu$, 试问 w 可能是正实数吗? 解

例 16

若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=2$, $|z_2|=3$, $3z_1-2z_2=\dfrac{3}{2}-i$, 求 $z_1 z_2$. 解

例 17

已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$, $w=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, 复数 $\overline{zw}$, z^2w^3 对应的复数平面上的点分别为 P, Q, 证明: $\triangle POQ$ 是等腰直角三角形. 解

例 18

设 M 是单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的动点, 点 N 与定点 $A(2,0)$ 和点 M 构成一个等边三角形的顶点, 并且 $M\to N\to A\to M$ 成逆时针方向. 当 M 点移动时, 求点 N 的轨迹. 解

例 19

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, 且满足 $\sum\limits_{j=1}^{n} |z_j| = 1$, 证明: 上述 n 个复数中, 必存在若干个复数, 它们的和的模不小于 $\frac{1}{6}$.

解

解. (1)

$$
\begin{aligned}
1+\cos\theta+i\sin\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+i\ \sin\frac{\theta}{2}).\\
1-\cos\theta-i\sin\theta &= 2\cos\frac{\pi+\theta}{2}(\cos\frac{\pi+\theta}{2}+i\ \sin\frac{\pi+\theta}{2})\\
&= -2\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\pi+\theta}{2}+i\ \sin\frac{\pi+\theta}{2}).\\
1-\cos\theta+i\sin\theta &= 2\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+i\ \sin\frac{\pi-\theta}{2}).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha} &= \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} \\
&= \frac{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)}{\cos\alpha + i\sin\alpha} \\
&= \cos(-2\alpha)+i\sin(-2\alpha).
\end{aligned}
$$

返回

(3)

$$1+i\tan\alpha=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha), & \alpha\in\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),\\ -\dfrac{1}{\cos\alpha}\big(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)\big), & \alpha\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi\right).\end{cases}$$

返回

(4) 设 $z=1-\sin\theta+i\cos\theta$, 则 $\overline{z}=1-\sin\theta-i\cos\theta$, 因此

$$\frac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{z}{\overline{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}.$$

由 $1-\cos\theta+i\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+i\ \sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)$ 得

$$\begin{aligned} z=1-\sin\theta+i\cos\theta&=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &=2\sin\frac{\pi-2\theta}{4}\left(\cos\frac{\pi+2\theta}{4}+i\ \sin\frac{\pi+2\theta}{4}\right),\end{aligned}$$

故 $z^2=4\sin^2\frac{\pi-2\theta}{4}\left(\cos\frac{\pi+2\theta}{2}+i\ \sin\frac{\pi+2\theta}{2}\right)$, 因此

$$\frac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{z^2}{|z|^2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right).$$

解. 令 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, 则 $\forall\ k\in\mathbb{N}$ 有 $z^k=\cos k\alpha+i\sin k\alpha$, 故

$$z+z^2+\cdots+z^n=\sum_{k=1}^{n}(\cos k\alpha+i\sin k\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha.$$

因 $1-\cos\theta-i\sin\theta=-2\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\pi+\theta}{2}+i\ \sin\frac{\pi+\theta}{2})$, 故又有

$$\begin{aligned}
&z+z^2+\cdots+z^n=\frac{z(1-z^n)}{1-z}\\
=&\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(1-(\cos n\alpha+i\sin n\alpha))}{1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\\
=&\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\Big(-2\sin\frac{n\alpha}{2}(\cos\frac{\pi+n\alpha}{2}+i\ \sin\frac{\pi+n\alpha}{2})\Big)}{-2\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\pi+\alpha}{2}+i\ \sin\frac{\pi+\alpha}{2})}\\
=&\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}+i\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

解. 由复数的模的定义知

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1),$$

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+(-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1).$$

两式相加即可.

返回

(充分性) 设 z_1, z_2, z_3 是三个复数, 且 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

设 $w_1=z_1-z_2$, $w_2=z_2-z_3$, $w_3=z_3-z_1$, 则 w_1,w_2,w_3 都不为零, 且

$$w_1+w_2+w_3=0, \quad {w_1}^2+{w_2}^2+{w_3}^2=0.$$

因此

$${w_1}^2=(w_2+w_3)^2={w_2}^2+{w_3}^2+2w_2w_3=-{w_1}^2+2w_2w_3,$$

即 ${w_1}^2=w_2w_3$, 进而有 ${w_1}^3=w_1w_2w_3$.

同理 ${w_2}^3=w_1w_2w_3$, ${w_3}^3=w_1w_2w_3$.

所以 ${w_1}^3={w_2}^3={w_3}^3$, 于是 $|w_1|=|w_2|=|w_3|$. □

(必要性) 设 z_1, z_2, z_3 是复平面上三个点 A, B, C 对应的复数, 且三角形 ABC 是等边三角形, 则存在 3 次单位根 ω 使得

$$z_1 - z_2 = \omega(z_3 - z_1), \quad z_2 - z_3 = \omega(z_1 - z_2), \quad z_3 - z_1 = \omega(z_2 - z_3).$$

三式平方相加, 得

$$(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_1)^2 = \omega^2((z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_1)^2).$$

因 $\omega^2 \neq 1$, 故 $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$, 即

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1. \qquad \square$$

解. 由 $|z_1|^2 = 2$, 得

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1-\overline{z}_2}{2-z_1z_2}\right| &= \left|\frac{z_1-\overline{z}_2}{z_1\overline{z}_1-z_1z_2}\right| \\ &= \frac{|z_1-\overline{z}_2|}{|z_1|\cdot|\overline{z}_1-z_2|} \\ &= \frac{|z_1-\overline{z}_2|}{|z_1|\cdot|z_1-\overline{z}_2|} \\ &= \frac{1}{|z_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

□

返回

解. 因 ${z_k}^{-1} = \dfrac{\overline{z}_k}{r^2}$, 故

$$\left|\frac{{z_1}^{-1} + {z_2}^{-1} + {z_3}^{-1}}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = \frac{1}{r^2}\left|\frac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = \frac{1}{r^2}. \qquad \square$$

返回

解. 由 $|z|=1$ 知 $z\overline{z}=1$, 故

$$|z^2-z+1|=|z^2-z+z\overline{z}|=|z||z+\overline{z}-1|=|z+\overline{z}-1|.$$

设 $z=x+iy$, 则 $x^2+y^2=1$, 因此 $|x|\leq 1$. 由三角不等式得

$$|z^2-z+1|=|2x-1|\leq|2x|+1\leq 3.$$

当 $x=-1$ 时, $|2x-1|=3$. 又 $|2x-1|\geq 0$, 且 $x=\dfrac{1}{2}$ 时, $|2x-1|=0$. 所以 $|z^2-z+1|$ 的范围是 $[0,3]$. $\square$

返回

解. (1) 设 $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$, 则

$$w=a+ib+\frac{1}{a+ib}=a+ib+\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$
$$=\Big(a+\frac{a}{a^2+b^2}\Big)+\Big(b-\frac{b}{a^2+b^2}\Big)i.$$

因 w 为实数, 故 $b-\dfrac{b}{a^2+b^2}=0$. 因 z 为虚数, 故 $b\neq 0$. 于是 $a^2+b^2=1$, 即 $|z|=1$.

由 $w=2a$, 且 $-1<w<2$, 得 $-\dfrac{1}{2}<a<1$. □

返回

(2) 注意到 (1) 中已证明的 $|z|=1$. 因 z 是虚数, 故 $z-\overline{z}\neq 0$. 因此有

$$\begin{aligned}
\mu+\overline{\mu} &= \frac{1-z}{1+z}+\overline{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)} = \frac{1-z}{1+z}+\frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}} \\
&= \frac{(1-z)(1+\bar{z})+(1+z)(1-\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z})} \\
&= \frac{2-2z\bar{z}}{(1+z)(1+\bar{z})} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu-\overline{\mu} &= \frac{1-z}{1+z}-\overline{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)} = \frac{1-z}{1+z}-\frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}} \\
&= \frac{(1-z)(1+\bar{z})-(1+z)(1-\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z})} \\
&= \frac{-2(z-\overline{z})}{(1+z)(1+\bar{z})} \neq 0.
\end{aligned}$$

得 $\mathrm{Re}(\mu)=0$, $\mathrm{Im}(\mu)\neq 0$. 所以 μ 是纯虚数. 返回 □

解. 由 $|z_1| = |z_1 + z_2|$, 得

$$|z_1|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = |z_1|^2 + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2,$$

故

$$|z_2|^2 = -(z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2}) = -2\mathrm{Re}(\overline{z_1}\, z_2) = -2a,$$

因此

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 \cdot \overline{z}_2}{z_1 \cdot \overline{z}_2} = \frac{-2a}{a\left(1-\sqrt{3}i\right)} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$ □

返回

解. 设 $\frac{x}{y}=\omega$, 则 $\omega+1=-\omega^2$, $\omega^3=1$. 因

$$\frac{x}{x+y}=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}=\frac{\omega}{\omega+1}=\frac{\omega}{-\omega^2}=-\omega^2,$$

$$\frac{y}{x+y}=\frac{1}{\frac{x}{y}+1}=\frac{1}{\omega+1}=\frac{1}{-\omega^2}=-\omega,$$

故

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2010}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2010}=(-\omega^2)^{2010}+(-\omega)^{2010}=1+1=2. \qquad \square$$

返回

解. 由

$$9 = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2,$$

$$27 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2,$$

得 $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 18$. 因 $|z_1|^2 = 9$, 故 $|z_2| = 3$, 且 $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = -9$.

因 $\left|z_1\overline{z}_2\right| = \left|z_1\right| \cdot \left|\overline{z_2}\right| = 9$, 故可设 $z_1\overline{z}_2 = 9(\cos\theta + i\sin\theta)$, 则

$$\overline{z}_1 z_2 = 9(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$

由 $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = -9$ 得 $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, 故 $z_1\overline{z}_2 = 9\omega$, 其中 $\omega = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$,

因此 $\omega^3 = 1$. 于是

$$\begin{aligned}(z_1\overline{z}_2)^{2000} + (\overline{z}_1 z_2)^{2000} &= (9\omega)^{2000} + (9\omega^2)^{2000} \\ &= 9^{2000}\left(\omega^{2000} + \omega^{4000}\right) = -9^{2000}.\end{aligned}$$

$\square$

返回

解. 令 $z=x+iy$, 则 $\left|z+\sqrt{3}\right|+\left|z-\sqrt{3}\right|=4$, 即 z 在以 $\left(\pm\sqrt{3},0\right)$ 为焦点, 2 为长半轴长的椭圆上, 其方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 令

$$x=2\cos\theta,\quad y=\sin\theta,$$

则

$$\begin{aligned} f(x,y) &= |4\cos\theta-4\sin\theta-9| \\ &= \left|4\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-9\right|. \end{aligned}$$

因此, 当 $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ 时, $f(x,y)_{\min}=9-4\sqrt{2}$; 当 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ 时,

$$f(x,y)_{\max}=9+4\sqrt{2}.$$

□

解. 由已知条件得 $z_1 \neq 0$, $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1$. 因 $\overline{z}_1 z_2 = |z_1|^2 \cdot \frac{z_2}{z_1}$, 故

$$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg(\overline{z}_1 z_2) = \frac{\pi}{2},$$

于是 $\frac{z_2}{z_1} = i$, 即 $z_2 = z_1 i$, 因此

$$\sqrt{3}b - 1 + \left(\sqrt{3} - b\right)i = \left(2 - \sqrt{3}a + ai\right)i = -a + \left(2 - \sqrt{3}a\right)i.$$

比较两边实部, 虚部, 解出 $a = b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. $\square$

返回

解. 因 $z = 3\cos\theta + i\sin\theta$, 故 $\tan(\arg z) = \dfrac{\sin\theta}{3\cos\theta} = \dfrac{1}{3}\tan\theta$. 因此,

$$y = \tan(\theta - \arg z) = \frac{\tan\theta - \frac{1}{3}\tan\theta}{1 + \frac{1}{3}\tan^2\theta} = \frac{2}{\frac{3}{\tan\theta} + \tan\theta}$$
$$\leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

当且仅当 $\dfrac{3}{\tan\theta} = \tan\theta$, 即 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 时, $y_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

返回

解. (1) 因 zu 为纯虚数, 故 $\theta \neq \pi$, 且

$$zu = \big(a^2(1-\cos\theta) - a\sin\theta\big) + \big(a^2\sin\theta + a(1-\cos\theta)\big)i,$$

故

$$\begin{cases} a^2(1-\cos\theta) = a\sin\theta, \\ a^2\sin\theta + a(1-\cos\theta) \neq 0. \end{cases}$$

由第二个等式知 $a \neq 0$. 因 $0 < \theta < 2\pi$, 故 $1-\cos\theta \neq 0$. 由第一个等式知 $a = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\dfrac{\theta}{2}$, 故 $\tan(\arg u) = \dfrac{a}{a^2} = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

(i) 若 $0 < \theta < \pi$, 则 $u = \cot^2\dfrac{\theta}{2} + i\cot\dfrac{\theta}{2}$ 在第一象限, $\arg u = \dfrac{\theta}{2}$.

(ii) 若 $\pi < \theta < 2\pi$, 则 u 在第四象限, $\arg u = \pi + \dfrac{\theta}{2}$.

返回

(2) 首先 $w = z^2 + u^2 + 2zu = (z+u)^2$, 且

$$z + u = (1 - \cos\theta + a^2) + (a + \sin\theta)i.$$

若 $w \in \mathbb{R}^+$, 则 $a + \sin\theta = 0$, 即 $a = -\sin\theta$.

又因 $a = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$, 故 $a = \dfrac{-a}{1-\cos\theta}$.

由 $a \neq 0$, 得 $\cos\theta = 2$, 矛盾. 所以 a 不能为正实数. $\square$

返回

解. 令 $z_1 = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = 3(\cos\beta + i\sin\beta)$.

由 $3z_1 - 2z_2 = \dfrac{3}{2} - i$, 得

$$6(\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{3}{2}, \quad 6(\sin\alpha - \sin\beta) = -1,$$

即

$$-12\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{3}{2}, \quad 12\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = -1,$$

因此 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{3}{2}$. 由万能公式得

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{12}{13}, \qquad \cos(\alpha+\beta) = -\frac{5}{13},$$

故

$$z_1 z_2 = 6(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)) = -\frac{30}{13} + \frac{72}{13}i. \qquad \square$$

返回

解. 因 $z=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $w=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, 故

$$\begin{aligned} zw &= \cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}, \\ \overline{zw} &= \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right), \\ z^2w^3 &= \cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi. \end{aligned}$$

因此, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{12}-(-\frac{\pi}{12})=\frac{\pi}{2}$.

因 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$, 且 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{Ow}|$, 故 $\triangle POQ$ 是等腰直角三角形. $\square$

返回

解. 设 M, N 对应的复数依次为 $u+vi$, $x+yi$, 则

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)\cdot\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}\right),$$

即

$$\begin{aligned} u+vi-2&=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}(x+yi-2)\\ &=\frac{x+\sqrt{3}y-2}{2}+\frac{y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{2}i, \end{aligned}$$

所以

$$u=\frac{x+\sqrt{3}y+2}{2},\qquad v=\frac{y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{2}.$$

但 $u^2+v^2=1$, 故 $\left(\frac{x+\sqrt{3}y+2}{2}\right)^2+\left(\frac{y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$. 整理得

$$(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=1.$$

□

返回

解. 设 $z_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$
\begin{aligned}
1 = \sum_{j=1}^{n} |z_j| &\le \sum_{j=1}^{n} (|a_j| + |b_j|) \\
&= \sum_{j=1}^{n} |a_j| + \sum_{j=1}^{n} |b_j| \\
&= \sum_{a_j<0} |a_j| + \sum_{a_j>0} |a_j| + \sum_{b_j<0} |b_j| + \sum_{b_j>0} |b_j|.
\end{aligned}
$$

不妨设 $\sum\limits_{b_j>0} |b_j| \ge \frac{1}{4}$, 则

$$
\Big|\sum_{b_j>0} z_j\Big| \ge \Big|\sum_{b_j>0} b_j\Big| = \sum_{b_j>0} |b_j| \ge \frac{1}{4} > \frac{1}{6}. \qquad \square
$$