# 少年班数学II第五章不等式和最值

# §5.1 不等式的基本性质 (续)

version $\beta 1.0$

2023 年 3 月 28 日, 星期二

**定理 1 (Schur)**

设 $r > 0$. 若 $x, y, z$ 都是非负的, 则

$$\sum_{cyc} x^r (x-y)(x-z) \geq 0,$$

即

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0.$$

当且仅当 $x = y = z$, 或其中一个为零而另外两个相等时, 等号成立.

证明. 不妨设 $x \geq y \geq z$. 令

$$t_1 = x - y, \quad t_2 = y - z, \quad t_3 = z,$$

则 $t_1, t_2, t_3 \geq 0$, 且

$$x = t_1 + t_2 + t_3, \quad y = t_2 + t_3, \quad z = t_3.$$

因此

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)$$

$$=(t_1+t_2+t_3)^r t_1(t_1+t_2)+(t_2+t_3)^r t_2(-t_1)+{t_3}^r(-t_1-t_2)(-t_2)$$

$$=(t_1+t_2+t_3)^r {t_1}^2+\big((t_1+t_2+t_3)^r-(t_2+t_3)^r+{t_3}^r\big)t_1t_2+{t_3}^r t_2^2 \geq 0.$$

当 $x=y=z$ 时, 显然等号成立. 当 $z=0$ 且 $x=y$ 时, 等号显然也成立.

反过来, 设等号成立.

(1) 若 $t_2\neq 0$, 则 $t_1+t_2+t_3\neq 0$. 由 ${t_3}^r t_2^2=0$ 和 $(t_1+t_2+t_3)^r {t_1}^2=0$ 知 $t_3=0$, $t_1=0$, 即 $z=0$, $x=y$.

(2) 若 $t_2=0$, 则由 ${t_1}^{r+2}\leq(t_1+t_2+t_3)^r{t_1}^2=0$ 知 $t_1=0$, 此时 $x=y=z$. □

注 1. 对 $r=0$, 把 $x^r, y^r, z^r$ 都视为 1, Schur 不等式也成立. 事实上,

$$
\begin{aligned}
&(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y) \\
=&x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0.
\end{aligned}
$$

注 2. 若 $r<0$, 则对任意的正数 $x, y, z$, 也有 Schur 不等式.

注 3. 通常记 $p=x+y+z,\ \ q=xy+yz+zx,\ \ r=xyz.$

注 4. 当 $r=1$ 时, Schur 不等式为

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \geq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{cyc} x^3 + 3xyz \geq \sum_{cyc} xy(x+y), \tag{2}$$ 解

$$\Big(\sum_{cyc} x\Big)^3 + 9xyz \geq 4\Big(\sum_{cyc} x\Big)\Big(\sum_{cyc} xy\Big), \tag{3}$$ 解

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq xyz. \tag{4}$$

证明. (2) 由 Schur 不等式知

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \\
&= \sum_{cyc}(x^3 - x^2y - zx^2 + xyz) \\
&= \sum_{cyc} x^3 - \sum_{cyc} x^2y - \sum_{cyc} zx^2 + \sum_{cyc} xyz \\
&= \sum_{cyc} x^3 - \sum_{cyc} x^2y - \sum_{cyc} xy^2 + \sum_{cyc} xyz \\
&= \sum_{cyc} x^3 + 3xyz - \sum_{cyc} xy(x+y).
\end{aligned}
$$

(3) 因 $\left(\sum_{cyc} x\right)^2 = \sum_{cyc} x^2 + 2\sum_{cyc} xy$, 并且

$$\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} xy\right) = \sum_{cyc} xy(x+y) + 3xyz,$$

故

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{cyc} x\right)^3 &= \left(\sum_{cyc} x^2 + 2\sum_{cyc} xy\right)\left(\sum_{cyc} x\right) \\
&= \sum_{cyc} x^2(x+y+z) + 2\left(\sum_{cyc} xy\right)\left(\sum_{cyc} x\right) \\
&= \sum_{cyc}(x^3 + x^2y + zx^2) + 2\left(\sum_{cyc} xy(x+y) + 3xyz\right) \\
&= \sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc} xy(x+y) + 2\sum_{cyc} xy(x+y) + 6xyz \\
&= \sum_{cyc} x^3 + 3\sum_{cyc} xy(x+y) + 6xyz,
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{cyc} x\Big)^3 + 9xyz &= \sum_{cyc} x^3 + 3xyz + 3\sum_{cyc} xy(x+y) + 12xyz \\ &\geq \sum_{cyc} xy(x+y) + 3\sum_{cyc} xy(x+y) + 12xyz \\ &= 4\Big(\sum_{cyc} xy(x+y) + 3xyz\Big) \\ &= 4\Big(\sum_{cyc} x\Big)\Big(\sum_{cyc} xy\Big).\end{aligned}$$

返回

(3) 由对称性知存在常数 $A, B$ 使得对任意的 $x, y, z$ 都有

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = -\sum_{cyc} x^3 + A\sum_{cyc} xy(x+y) + Bxyz.$$

令 $z=0$ 得

$$(y-x)(x-y)(x+y) = -x^3 - y^3 + Axy(x+y).$$

再令 $x=y=1$, 得 $0=-2+2A$, 故 $A=1$. 在

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = -\sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc} xy(x+y) + Bxyz$$

中令 $x=y=z=1$ 得 $1=-3+6+B$, 故 $B=-2$. 于是, 由 Schur 不等式得

$$xyz-(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = \sum_{cyc} x^3 - \sum_{cyc} xy(x+y) + 3xyz \geq 0.$$

$\square$

**例 1**

设 $a, b, c$ 为三角形的三边，证明

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

解

**例 2**

设正数 $a, b, c$ 满足 $abc=1$，证明

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

解

解. 由 Schur 不等式得

$$\begin{aligned}
3abc-\sum_{cyc}a^2(b+c-a) &= 3abc-\Big(\sum_{cyc}a^2b+\sum_{cyc}a^2c-\sum_{cyc}a^3\Big)\\
&= 3abc-\Big(\sum_{cyc}a^2b+\sum_{cyc}b^2a-\sum_{cyc}a^3\Big)\\
&= 3abc-\Big(\sum_{cyc}(a^2b+b^2a)-\sum_{cyc}a^3\Big)\\
&= \sum_{cyc}a^3+3abc-\sum_{cyc}ab(a+b)\geq 0.
\end{aligned}$$

□

注. 实际上, 只要 $a,b,c$ 非负即可.

返回

解. 因 $abc=1$, 故 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc=2\sum\limits_{cyc}ab$.

因 $a^2+b^2+c^2+3=\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2-2\sum\limits_{cyc}ab+3$, 故只需证 $\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2+3\geq 4\sum\limits_{cyc}ab$.

由均值不等式知 $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3abc$, 再由 Schur 不等式, 得

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\left(\sum_{cyc}a\right)^2+3-4\sum_{cyc}ab\right)\\=&\left(\sum_{cyc}a\right)^3+3\sum_{cyc}a-4\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a\right)\\\geq&\left(\sum_{cyc}a\right)^3+9abc-4\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a\right)\geq 0,\end{aligned}$$

因此有 $\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2+3\geq 4\sum\limits_{cyc}ab$. □

返回