少年班数学II第五章不等式和最值

§5.3 证明不等式

version $\beta 4.7$

2023 年 4 月 4 日, 星期二

例 1

证明: 对任意正整数 n 都有 $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$.

例 1

证明: 对任意正整数 n 都有 $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$.

解. 由 $\dfrac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \dfrac{(n+1)^n}{n!} > 1$ 立得. $\square$

例 1

证明: 对任意正整数 n 都有 $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$.

解. 由 $\dfrac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \dfrac{(n+1)^n}{n!} > 1$ 立得. $\square$

例 2

证明: $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \cdots \cdot \dfrac{2n+1}{2n} > \sqrt{n+1}$.

例 1

证明: 对任意正整数 n 都有 $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$.

解. 由 $\dfrac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \dfrac{(n+1)^n}{n!} > 1$ 立得. $\square$

例 2

证明: $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \cdots \cdot \dfrac{2n+1}{2n} > \sqrt{n+1}$.

解. 设 $A = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \cdots \cdot \dfrac{2n+1}{2n}$. 因 $k^2 > k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, 故

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n+1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n+1}{2n}\right) \\
&= \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \cdots \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+1)}{(2n) \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2n+2}{2} \\
&> n+1.
\end{aligned}$$

$\square$

例 3

设 n 是正整数, 证明

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

例 3

设 n 是正整数，证明

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

解. 因 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$，故

$$\begin{aligned}
&n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
\geq\ & n\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
\geq\ & \frac{n}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

$\square$

例 4

设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \le 1$, 证明 $|x^2 + 2xy - y^2| \le \sqrt{2}$.

例 4

设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \le 1$, 证明 $|x^2 + 2xy - y^2| \le \sqrt{2}$.

解. 记 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. 于是

$$|x^2 + 2xy - y^2| = r^2|\cos 2t + \sin 2t| \le \sqrt{2}r^2 \le \sqrt{2}. \qquad \square$$

例 4

设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, 证明 $|x^2 + 2xy - y^2| \leq \sqrt{2}$.

解. 记 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. 于是

$$|x^2 + 2xy - y^2| = r^2|\cos 2t + \sin 2t| \leq \sqrt{2}r^2 \leq \sqrt{2}.$$

□

例 5

已知 $k > a > b > c > 0$, 证明: $k^2 - (a + b + c)k + (ab + bc + ca) > 0$.

例 4

设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, 证明 $|x^2 + 2xy - y^2| \leq \sqrt{2}$.

解. 记 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. 于是

$$|x^2 + 2xy - y^2| = r^2|\cos 2t + \sin 2t| \leq \sqrt{2}r^2 \leq \sqrt{2}.$$

□

例 5

已知 $k > a > b > c > 0$, 证明: $k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca) > 0$.

解. 因 $(k-a)(k-b)(k-c) > 0$, 故

$$\begin{aligned}
0 &< k^3 - (a+b+c)k^2 + (ab+bc+ca)k - abc \\
&< k^3 - (a+b+c)k^2 + (ab+bc+ca)k \\
&= k(k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca)).
\end{aligned}$$

□

例 6

设 $f(x) = x^2 + bx + c$, 证明 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

例 6

设 $f(x)=x^2+bx+c$, 证明 $|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

解. 因 $f(1)=1+b+c$, $f(2)=4+2b+c$, $f(3)=9+3b+c$, 故

$$f(2)-f(1)=b+3, \qquad f(3)-f(2)=b+5,$$

因此

$$f(1)-2f(2)+f(3)=2.$$

由三角不等式知

$$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\geq|f(1)-2f(2)+f(3)|=2.$$

所以 $|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$. $\square$

例 7

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$, 且当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 2$. 证明: 当 $|x| \leq 1$ 时, $|g(x)| \leq 4$.

例 7

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$, 且当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 2$. 证明: 当 $|x| \leq 1$ 时, $|g(x)| \leq 4$.

解. 由条件知 $|a - b + c| = |f(-1)| \leq 2$, $|c| = |f(0)| \leq 2$, $|a + b + c| = |f(1)| \leq 2$. 当 $|x| \leq 1$ 时, 利用三角不等式, 得

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= |(cx^2 - c) + (bx + a + c)| \\
&\leq |c| \cdot |x^2 - 1| + |bx + a + c| \\
&\leq |c| + \max\{|b \cdot (-1) + a + c|,\ |b \cdot 1 + a + c|\} \\
&\leq 4.
\end{aligned}$$

$\square$

例 7

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$, 且当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 2$. 证明: 当 $|x| \leq 1$ 时, $|g(x)| \leq 4$.

解. 由条件知 $|a - b + c| = |f(-1)| \leq 2$, $|c| = |f(0)| \leq 2$, $|a + b + c| = |f(1)| \leq 2$. 当 $|x| \leq 1$ 时, 利用三角不等式, 得

$$
\begin{aligned}
|g(x)| &= |(cx^2 - c) + (bx + a + c)| \\
&\leq |c| \cdot |x^2 - 1| + |bx + a + c| \\
&\leq |c| + \max\{|b \cdot (-1) + a + c|,\ |b \cdot 1 + a + c|\} \\
&\leq 4.
\end{aligned}
$$

□

注. 若 $f(x) = Ax + B$, 则 $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max\{|f(a)|,\ |f(b)|\}$.

例 8

设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $a_1^2 > \sum_{i=2}^{n} a_i^2$, $b_1^2 > \sum_{i=2}^{n} b_i^2$. 证明:

$$\left(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq \left(a_1^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2\right)\left(b_1^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2\right).$$

例 8

设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $a_1^2 > \sum_{i=2}^{n} a_i^2$, $b_1^2 > \sum_{i=2}^{n} b_i^2$. 证明:

$$\left(a_1b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_ib_i\right)^2 \geq \left(a_1^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2\right)\left(b_1^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2\right).$$

解. 设 $f(x) = \left(a_1^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_ib_i\right)x + \left(b_1^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2\right)$, 则

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 - \sum_{i=2}^{n}(a_ix - bi)^2,$$

故 $f(0) = b_1^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2 > 0$, $f\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = -\sum_{i=2}^{n}\left(a_i \cdot \frac{b_1}{a_1} - bi\right)^2 \leq 0$, 因此 $f(x) = 0$ 必有零点, 所以二次函数 $f(x)$ 的判别式不小于 0. $\square$

例 9

设实数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 满足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. 证明

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1).$$

例 9

设实数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1$. 证明

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2 \geq (x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1).$$

解. 只需在满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ 且 $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ 的条件下证明.

这就是上题取 $x_0=1$, $y_0=1$ 的情形. $\square$

例 9

设实数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1$. 证明

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2 \ge (x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1).$$

解. 只需在满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ 且 $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ 的条件下证明.

这就是上题取 $x_0=1,\ y_0=1$ 的情形. □

例 10 (Kantorovich)

设 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 都是正数, $\sum\limits_{i=1}^n a_i=1,\ \ \lambda_1\le\cdots\le\lambda_n$, 则

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\Big) \le \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

解. 设 $f(t)=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\Big)t^2-(\lambda_1+\lambda_n)t+\lambda_1\lambda_n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}$, 则

$$\begin{aligned}
f(1)&=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i-(\lambda_1+\lambda_n)+\lambda_1\lambda_n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i-(\lambda_1+\lambda_n)\sum_{i=1}^{n}a_i+\lambda_1\lambda_n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_i-(\lambda_1+\lambda_n)+\frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i}\Big)a_i\\
&=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)\frac{a_i}{\lambda_i}\\
&\le 0.
\end{aligned}$$

因此二次方程 $f(t)=0$ 必有实根, 故其判别式不小于 0. □

例 11

设整数 $n \geq 3$, 证明 $n^{n+1} > (n+1)^n$.

例 11

设整数 $n \geq 3$, 证明 $n^{n+1} > (n+1)^n$.

解. 设 $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$, 则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1$, 故 $\{a_n\}$ 严格单调增. 所以 $n \geq 3$ 时, $a_n \geq a_3$, 即 $\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n} > \dfrac{3^4}{4^3} > 1$. $\square$

例 11

设整数 $n \geq 3$, 证明 $n^{n+1} > (n+1)^n$.

解. 设 $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$, 则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1$, 故 $\{a_n\}$ 严格单调增. 所以 $n \geq 3$ 时, $a_n \geq a_3$, 即 $\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n} > \dfrac{3^4}{4^3} > 1$. □

例 12

已知正数 a, b, c 满足 $a \leq b + c$, 证明 $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$.

例 11

设整数 $n \geq 3$, 证明 $n^{n+1} > (n+1)^n$.

解. 设 $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$, 则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1$, 故 $\{a_n\}$ 严格单调增. 所以 $n \geq 3$ 时, $a_n \geq a_3$, 即 $\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n} > \dfrac{3^4}{4^3} > 1$. □

例 12

已知正数 a, b, c 满足 $a \leq b + c$, 证明 $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$.

解. 因 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增, 故

$$\frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} > \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} = \frac{b+c}{1+b+c} \geq \frac{a}{1+a}.$$

□

例 13

设正整数 $n > 1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{n-1}{n}$.

例 13

设正整数 $n > 1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{n-1}{n}$.

(2) $\dfrac{7}{12} - \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{n}$.

例 13

设正整数 $n > 1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{n-1}{n}$.

(2) $\dfrac{7}{12} - \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{n}$.

解. (2) 设 $a_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{7}{12} + \dfrac{1}{n+1}$, 则

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

故 $\{a_n\}$ 严格增, 因此, 当 $n \ge 2$ 时 $a_n \ge a_2 = 0$.

例 13

设正整数 $n>1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{n-1}{n}$.

(2) $\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{n+1}\le\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{n}$.

解. (2) 设 $a_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{1}{n+1}$, 则

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$

故 $\{a_n\}$ 严格增, 因此, 当 $n\ge 2$ 时 $a_n\ge a_2=0$.

设 $b_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{n}$, 则

$$b_n-b_{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}>0,$$

故 $\{b_n\}$ 严格减, 因此, 当 $n\ge 2$ 时 $b_n\le b_2=0$. □

例 14

证明 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}\le\dfrac{11}{10}$.

例 14

证明 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}\leq\frac{11}{10}$.

解. 设 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$, 则

$$
\begin{aligned}
f(n+1)-f(n) &= \frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}\\
=&\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}=\frac{2}{(9n^2+15n+6)(3n+4)}\\
\leq&\frac{2}{(8n^2+16n+6)(2n+5)}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\\
=&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right).
\end{aligned}
$$

例 14

证明 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}\le\dfrac{11}{10}$.

解. 设 $f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}$, 则

$$
\begin{aligned}
f(n+1)-f(n) &= \frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}=\frac{2}{(9n^2+15n+6)(3n+4)}\\
&\le\frac{2}{(8n^2+16n+6)(2n+5)}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right).
\end{aligned}
$$

所以 $f(n+1)<f(1)+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(2\cdot1+1)(2\cdot1+3)}=\dfrac{11}{10}$. □

例 15

已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [1, +\infty)$, 证明

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + a_1 a_2 \cdots a_n.$$

例 15

已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [1, +\infty)$, 证明

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + a_1 a_2 \cdots a_n.$$

解. 对元素个数 n 用数学归纳法. $n = 1$ 时, 显然成立.

假设 $n = k$ $(k \geq 1)$ 时结论成立. 当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left(a_1 + \cdots + a_{k+1} + \frac{1}{a_1 \cdots a_{k+1}}\right) - \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} + a_1 \cdots a_{k+1}\right) \\
=&\left(a_1 + \cdots + a_k - \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right)\right) + a_{k+1} - \frac{1}{a_{k+1}} \\
&\qquad + \frac{1}{a_1 \cdots a_{k+1}} - a_1 \cdots a_{k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\left(a_1\cdots a_k-\frac{1}{a_1\cdots a_k}\right)+a_{k+1}-\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}-a_1\cdots a_{k+1}\\
&=\left(a_1\cdots a_k-a_1\cdots a_{k+1}\right)+\left(\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}-\frac{1}{a_1\cdots a_k}\right)+\left(a_{k+1}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\
&=(1-a_{k+1})a_1\cdots a_k+\frac{1-a_{k+1}}{a_1\cdots a_{k+1}}+\frac{(a_{k+1}-1)(a_{k+1}+1)}{a_{k+1}}\\
&=(1-a_{k+1})\left(a_1\cdots a_k+\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}-\frac{a_{k+1}+1}{a_{k+1}}\right)\\
&=(1-a_{k+1})\left(a_1\cdots a_k-1-\frac{a_1\cdots a_k-1}{a_1\cdots a_{k+1}}\right)\\
&=(1-a_{k+1})(a_1\cdots a_k-1)\left(1-\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}\right)\\
&=(1-a_{k+1})(a_1\cdots a_k-1)(a_1\cdots a_{k+1}-1)\cdot\frac{1}{a_1\cdots a_{k+1}}\leq 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

例 16

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 证明 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$.

例 16

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 证明 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$.

解. 由均值 (幂平均) 不等式得 $\sqrt{a^2+b^2} \geq \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$, 相加即可. □

例 16

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 证明 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$.

解. 由均值 (幂平均) 不等式得 $\sqrt{a^2+b^2} \geq \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$, 相加即可. $\square$

例 17

设 n 是大于 1 的整数, 证明 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n > n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$.

例 16

已知 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 证明 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\sqrt{2}(a+b+c)$.

解. 由均值 (幂平均) 不等式得 $\sqrt{a^2+b^2}\geq\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$, 相加即可. □

例 17

设 n 是大于 1 的整数, 证明 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$.

解. 因 $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$, 故由均值不等式得

$$\begin{aligned}C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n&=2^n-1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}\\&=\frac{1}{2}\Big((1+2^{n-1})+(2+2^{n-2})+\cdots+(2^{n-1}+1)\Big)\\&>\frac{1}{2}\cdot n\cdot 2\sqrt{2^{n-1}}=n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}.\end{aligned}$$ □

例 18

设 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a + 3b + 5c = 15$, 证明: $\sqrt{a} + \sqrt{5b} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{46}$.

例 18

设 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a + 3b + 5c = 15$, 证明: $\sqrt{a} + \sqrt{5b} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{46}$.

解. 设 $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{5b}$, $z = \sqrt{2c}$, 则 $x^2 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{5}{2}z^2 = 15$. 由 Cauchy 不等式知 $(x + y + z)^2 \leq \left(x^2 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{5}{2}z^2\right)\left(1 + \frac{5}{3} + \frac{2}{5}\right) = 46$. $\square$

例 18

设 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $a+3b+5c=15$, 证明: $\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{2c}\le\sqrt{46}$.

解. 设 $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{5b}$, $z=\sqrt{2c}$, 则 $x^2+\frac{3}{5}y^2+\frac{5}{2}z^2=15$. 由 Cauchy 不等式知 $(x+y+z)^2\le\left(x^2+\frac{3}{5}y^2+\frac{5}{2}z^2\right)\left(1+\frac{5}{3}+\frac{2}{5}\right)=46$. □

例 19

设 a,b,c 是某三角形的三边长, 证明:

$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c.$$

例 18

设 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a + 3b + 5c = 15$, 证明: $\sqrt{a} + \sqrt{5b} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{46}$.

解. 设 $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{5b}$, $z = \sqrt{2c}$, 则 $x^2 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{5}{2}z^2 = 15$. 由 Cauchy 不等式知 $(x + y + z)^2 \leq \left(x^2 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{5}{2}z^2\right)\left(1 + \frac{5}{3} + \frac{2}{5}\right) = 46$. □

例 19

设 a, b, c 是某三角形的三边长, 证明:

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a + b + c.$$

解. 从 Cauchy 不等式或权方和不等式看是显然的, 或由均值不等式可知 $\frac{a^2}{b+c-a} + (b + c - a) \geq 2a$, 求循环和即可. □

例 20

设 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 证明:

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq \frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{z+x} + \frac{2z}{x+y}.$$

例 20

设 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 证明:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z} \geq \frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}.$$

解. 由均值不等式有 $(y+z)^2 \geq 4yz$, 故 $\dfrac{y+z}{yz} \geq \dfrac{4}{y+z}$, 因此

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=x \cdot \frac{y+z}{yz} \geq \frac{4x}{y+z}.$$

同理有

$$\frac{y}{z}+\frac{y}{x} \geq \frac{4y}{z+x},$$

$$\frac{z}{x}+\frac{z}{y} \geq \frac{4z}{x+y}.$$

三式相加即得结论. □

例 21

已知 $a_n=\dfrac{1}{2}\left(t^n+\dfrac{1}{t^n}\right)$ (其中 $\dfrac{1}{2}\le t\le 2$), T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

证明:

$$T_n<2^n-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

例 21

已知 $a_n = \frac{1}{2}\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right)$ (其中 $\frac{1}{2} \le t \le 2$), T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

证明:

$$T_n < 2^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

解. 由 $\frac{1}{2} \le t \le 2$ 知 $\max\limits_{t\in[\frac{1}{2},2]} \left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) = 2^n + \frac{1}{2^n}$.

例 21

已知 $a_n = \frac{1}{2}\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right)$ (其中 $\frac{1}{2} \le t \le 2$), T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 证明:

$$T_n < 2^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

解. 由 $\frac{1}{2} \le t \le 2$ 知 $\max\limits_{t\in[\frac{1}{2},2]}\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) = 2^n + \frac{1}{2^n}$. 再用均值不等式,

$$\begin{aligned} T_n &\le 2^n - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 2^n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &< 2^n - \sqrt{\frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

□

例 22

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $abc = 1$, 证明:

$$\frac{1}{(2a+1)^3} + \frac{1}{(2b+1)^3} + \frac{1}{(2c+1)^3} \geq \frac{1}{9}.$$

例 22

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $abc = 1$, 证明:

$$\frac{1}{(2a+1)^3} + \frac{1}{(2b+1)^3} + \frac{1}{(2c+1)^3} \geq \frac{1}{9}.$$

解. 由均值不等式知 $\dfrac{1}{(2a+1)^3} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{27} \geq \dfrac{1}{3(2a+1)}$, 故

$$\frac{1}{(2a+1)^3} + \frac{1}{(2b+1)^3} + \frac{1}{(2c+1)^3} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1}\right) - \frac{2}{9}.$$

因此只需证

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1.$$

例 22

已知 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $abc=1$, 证明:

$$\frac{1}{(2a+1)^3}+\frac{1}{(2b+1)^3}+\frac{1}{(2c+1)^3}\ge\frac{1}{9}.$$

解. 由均值不等式知 $\dfrac{1}{(2a+1)^3}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{27}\ge\dfrac{1}{3(2a+1)}$, 故

$$\frac{1}{(2a+1)^3}+\frac{1}{(2b+1)^3}+\frac{1}{(2c+1)^3}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\right)-\frac{2}{9}.$$

因此只需证

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\ge 1.$$

通分即知要证 $a+b+c\ge 3$. 由均值不等式知这是显然的. $\square$

例 23

设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, 证明 f 在 $[-1,1]$ 上严格增.

例 23

设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, 证明 f 在 $[-1,1]$ 上严格增.

解. 设 $x,y\in[-1,1]$, $x\neq y$, 则

$$f(x)-f(y)=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

例 23

设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, 证明 f 在 $[-1,1]$ 上严格增.

解. 设 $x,y\in[-1,1]$, $x\neq y$, 则

$$f(x)-f(y)=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

因

$$\begin{aligned} xy &= \frac{1}{4}((x+y)^2-(x-y)^2) < \frac{1}{4}(x+y)^2 \\ &= \frac{1}{4}|x+y|^2 \le \frac{1}{4}(|x|+|y|)^2 \le 1, \end{aligned}$$

故

$$(f(x)-f(y))(x-y)=\frac{(x-y)^2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}>0. \qquad \square$$

例 24

设整数 $n \geq 3$, 正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+{a_i}^4} = 1$. 证明

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \geq (n-1)^{n/4}.$$

例 24

设整数 $n \geq 3$, 正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+{a_i}^4} = 1$. 证明

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \geq (n-1)^{n/4}.$$

解. 设 $x_i = \frac{1}{1+{a_i}^4}$, 则 $a_i = \sqrt[4]{\frac{1}{x_i} - 1}$, 只要证 $\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} - 1\right) \geq (n-1)^n$.

例 24

设整数 $n \geq 3$, 正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+{a_i}^4} = 1$. 证明

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \geq (n-1)^{n/4}.$$

解. 设 $x_i = \frac{1}{1+{a_i}^4}$, 则 $a_i = \sqrt[4]{\frac{1}{x_i} - 1}$, 只要证 $\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} - 1\right) \geq (n-1)^n$.

因 $1 - x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_i \geq (n-1) \sqrt[n-1]{\frac{1}{x_i} \prod_{j=1}^{n} x_j}$, 故

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} - 1\right) \geq \prod_{i=1}^{n} (n-1) \frac{1}{x_i} \sqrt[n-1]{\frac{1}{x_i} \prod_{j=1}^{n} x_j} = (n-1)^n.$$

□

例 25

给定正整数 $n>2$. 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\le 1$, $k=1,2,\cdots,n$. 记 $A_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$. 证明: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|<\dfrac{n-1}{2}$.

例 25

给定正整数 $n>2$. 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\le 1$, $k=1,2,\cdots,n$. 记 $A_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$. 证明: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|<\dfrac{n-1}{2}$.

解. 左边 $=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}A_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|$

例 25

给定正整数 $n>2$. 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\leq 1,\ k=1,2,\cdots,n$. 记 $A_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$. 证明: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|<\dfrac{n-1}{2}$.

解. 左边 $=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}A_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|$

$=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(A_n-A_k)\right|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}|A_n-A_k|=\sum\limits_{k=1}^{n-1}|A_n-A_k|$

例 25

给定正整数 $n>2$. 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\le 1$, $k=1,2,\cdots,n$. 记 $A_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$. 证明: $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\dfrac{n-1}{2}$.

解. 左边 $=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}A_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|$

$=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(A_n-A_k)\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}|A_n-A_k|=\sum\limits_{k=1}^{n-1}|A_n-A_k|$

$=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_j-\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j\right|=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j+\frac{1}{n}\sum\limits_{j=k+1}^{n}a_j-\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j\right|$

例 25

给定正整数 $n>2$. 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\le 1$, $k=1,2,\cdots,n$. 记 $A_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$. 证明: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|<\dfrac{n-1}{2}$.

解. 左边 $=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}A_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}(A_n-A_k)\right|\le\sum_{k=1}^{n}|A_n-A_k|=\sum_{k=1}^{n-1}|A_n-A_k|$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j\right|=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}a_j+\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n}a_j-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n}a_j-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{k}a_j\right|<\sum_{k=1}^{n-1}\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n}a_j,\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{k}a_j\right\}$$

例 25

给定正整数 $n>2$. 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\le 1$, $k=1,2,\cdots,n$. 记 $A_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$. 证明: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|<\dfrac{n-1}{2}$.

解. 左边 $=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}A_n-\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right|$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}(A_n-A_k)\right|\le\sum_{k=1}^{n}|A_n-A_k|=\sum_{k=1}^{n-1}|A_n-A_k|$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j\right|=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}a_j+\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n}a_j-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n}a_j-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{k}a_j\right|<\sum_{k=1}^{n-1}\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n}a_j,\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{k}a_j\right\}$$

$$\le\sum_{k=1}^{n-1}\max\left\{\frac{1}{n}(n-k),\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)k\right\}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n-1}{2}.$$

□