少年班数学II第五章不等式和最值

§5.4 函数的值域, 最大值和最小值

version $\beta 1.0$

2023 年 4 月 11 日, 星期二

1. 对映射 $f: X \to Y$, 称集合

$$\{y \in Y : \text{存在 } x \in X \text{ 使得 } y = f(x)\}$$

为 f 的值域. 通常把 f 的值域记为 $f(X)$, $\mathrm{Ran}(f)$, 或 R_f.

2. 若 $f: X \to \mathbb{R}$ 的值域中有最小的元素, 则称其最小元素为 f 的最小值, 此时也说 f 有最小值.

   通常把 f 的最小值记为 $\min f$, $\min\limits_{x \in X} f(x)$, 或 $f_{\min}$.

3. 若 $f: X \to \mathbb{R}$ 的值域中有最大的元素, 则称其最大元素为 f 的最大值, 此时也说 f 有最大值.

   通常把 f 的最小值记为 $\max f$, $\max\limits_{x \in X} f(x)$, 或 $f_{\max}$.

例 1

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ 的值域为 $[0,+\infty)$, 有最小值 0, 但没有最大值.
2. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto[x]$ 的值域为 $\mathbb{Z}$, 没有最大值, 也没有最小值.
3. $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto\ln(x^2+y^2)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 没有最大值和最小值.
4. 恒同映射 $I_X:X\to X$, $x\to x$ 的值域为 X.

例 2

设 a, b 是正数, $a+b=2$, 求 $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}$ 的最小值.

例 2

设 a, b 是正数, $a+b=2$, 求 $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}$ 的最小值.

解. 由权方和不等式知

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{1^2}{1+a}+\frac{1^2}{1+b}\geq\frac{(1+1)^2}{(1+a)+(1+b)}=1,$$

当 $a=b=1$ 时, $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}=1.$

所以, 所求的最小值为 1. $\square$

例 3

设 $f(a,b)=(a+5-3|\cos b|)^2+(a-2|\sin b|)^2$, 求 $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} f(a,b)$.

例 3

设 $f(a,b)=(a+5-3|\cos b|)^2+(a-2|\sin b|)^2$, 求 $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} f(a,b)$.

解. 由 $2(x^2+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$ 知 $x^2+y^2\geq\frac{1}{2}(x-y)^2$, 因此

$$f(a,b)\geq\frac{1}{2}(5-3|\cos b|+2|\sin b|)^2\geq\frac{1}{2}(5-3)^2=2.$$

当 $a=-1$, $b=\pi$ 时, $f(a,b)=2$.

所以 $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} f(a,b)=2$. $\square$

例 4

求 $z=(a-b)^2+\left(\sqrt{2-a^2}-\dfrac{9}{b}\right)^2$ 的最小值.

例 4

求 $z=(a-b)^2+\left(\sqrt{2-a^2}-\dfrac{9}{b}\right)^2$ 的最小值.

解. 设 $A(a,\sqrt{2-a^2})$, $B\left(b,\dfrac{9}{b}\right)$, $O(0,0)$, 得

$$z=|AB|^2,\quad |OA|^2=2,\quad |OB|^2=b^2+\frac{81}{b^2}.$$

由均值不等式得 $|OB|^2=b^2+\dfrac{81}{b^2}\geq 18$, 故 $|OB|\geq 3\sqrt{2}$.

由三角不等式得

$$|AB|\geq |OB|-|OA|=|OB|-\sqrt{2}\geq 2\sqrt{2},$$

故 $z=|AB|^2\geq 8$. 分析取等条件知, 当 $(a,b)=(1,3)$ 时 $z=8$.

所以 $z_{\min}=8$. □

例 5

设 b 是实数, x_k, y_k $(k=1,2,3)$ 均为非负实数, 求

$$f=\sqrt{(b-y_1-y_2-y_3)^2+x_3^2}+\sqrt{y_3^2+x_2^2}+\sqrt{y_2^2+x_1^2}+\sqrt{y_1^2+(x_1+x_2+x_3)^2}$$

的最小值.

例 5

设 b 是实数, x_k, y_k $(k=1,2,3)$ 均为非负实数, 求

$$f=\sqrt{(b-y_1-y_2-y_3)^2+x_3^2}+\sqrt{y_3^2+x_2^2}+\sqrt{y_2^2+x_1^2}+\sqrt{y_1^2+(x_1+x_2+x_3)^2}$$

的最小值.

解. 由三角不等式得

$$\begin{aligned} f&=\sqrt{(b-y_1-y_2-y_3)^2+x_3^2}+\sqrt{y_3^2+x_2^2}+\sqrt{y_2^2+x_1^2}+\sqrt{y_1^2+(x_1+x_2+x_3)^2}\\ &\geq\sqrt{((2007-y_1-y_2-y_3)+y_3+y_2+y_1)^2+(x_3+x_2+x_1+(-x_1-x_2-x_3))^2}\\ &=|b|. \end{aligned}$$

当 $x_1=x_2=x_3=y_1=y_2=y_3=0$ 时 $f=|b|$. 所以 $f_{\min}=|b|$. $\square$

例 6

已知正数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, 求 $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}$ 的最小值.

例 6

已知正数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$，求 $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}$ 的最小值.

解. 由 Cauchy 不等式, 得

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a(1+b)} \geq \frac{9}{\sum_{cyc} a(1+b)} = \frac{9}{\sum_{cyc} a+\sum_{cyc} ab} = \frac{9}{1+\sum_{cyc} ab}.$$

再由 $1=(a+b+c)^2=\sum_{cyc} a^2+2\sum_{cyc} ab \geq 3\sum_{cyc} ab$, 得

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a(1+b)} \geq \frac{9}{1+\frac{1}{3}} = \frac{27}{4},$$

当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时等号成立, 故所求的最小值为 $\dfrac{27}{4}$. □

例 7

设 a, b 是给定的正数, 求 $y = \dfrac{a}{\sin x} + \dfrac{b}{\cos x}$ $(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$ 的最小值.

例 7

设 a, b 是给定的正数, 求 $y=\dfrac{a}{\sin x}+\dfrac{b}{\cos x}\ (0<x<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小值.

解. 由 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
y=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x} &= \frac{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sin^2 x}}+\frac{(b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos^2 x}} \\
&\geq \frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

当且仅当 $x=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ 时, y 取到最小值 $y_{\min}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

例 8

设 $c \neq 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$, 且使 $|2a + b|$ 最大时, $\dfrac{3}{a} - \dfrac{4}{b} + \dfrac{5}{c}$ 的最小值是____________.

例 8

设 $c \neq 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$, 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$ 的最小值是__________.

解. 设 $2a + b = t$, 则 $2a = t - b$, 故 $(t-b)^2 - (t-b)b + 4b^2 - c = 0$, 即

$$6b^2 - 3bt + t^2 - c = 0.$$

因关于 b 的二次方程有实根, 故 $(3t)^2 - 24(t^2 - c) \geq 0$, 即 $|t| \leq \sqrt{\frac{8c}{5}}$.

当 $|t|$ 取得最大值 $\sqrt{\frac{8c}{5}}$ 时, $c = \frac{5t^2}{8}$, $b = \frac{t}{4}$, $a = \frac{3t}{8}$. 此时

$$\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = \frac{8}{t} - \frac{16}{t} + \frac{8}{t^2} = 8\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \geq -2.$$

□

例 9

若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a+\sqrt{b^2+8}=4$, 则 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为________.

例 9

若 $a,b\in\mathbb{R}^+$, $a+\sqrt{b^2+8}=4$, 则 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为________.

解. 由 Cauchy 不等式, 有

$$\sqrt{b^2+8}=\sqrt{b^2+1^2+\cdots+1^2}\geq\frac{b+8}{3},$$

当且仅当 $b=1$ 时取等号. 所以

$$4=a+\sqrt{b^2+8}\geq a+\frac{b+8}{3}=\frac{3a+b}{3}+\frac{8}{3},$$

即 $3a+b\leq 4$. 再由

$$4\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq(3a+b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=10+3\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq 16$$

知, 当且仅当 $a=b=1$ 时, $\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}$ 取最小值 4. □

例 10

设 $a, b, c > 0$, $abc + a + c = b$, 求 $u = \frac{2}{a^2+1} + \frac{3}{c^2+1} - \frac{2}{b^2+1}$ 的最大值.

例 10

设 $a,b,c>0$, $abc+a+c=b$, 求 $u=\dfrac{2}{a^2+1}+\dfrac{3}{c^2+1}-\dfrac{2}{b^2+1}$ 的最大值.

解. 设 $a=\tan\alpha$, $c=\tan\beta$, $b=\tan(\alpha+\beta)$, $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\frac{2}{a^2+1}+\frac{3}{c^2+1}-\frac{2}{b^2+1}=2\cos^2\alpha-2\cos^2(\alpha+\beta)+3\cos^2\beta$$

$$=2\sin\beta\sin(2\alpha+\beta)+3\cos^2\beta\leq 2\sin\beta+3\cos^2\beta$$

$$=-3\sin^2\beta+2\sin\beta+3=\frac{10}{3}-3\left(\sin\beta-\frac{1}{3}\right)^2\leq\frac{10}{3},$$

当且仅当 $\sin(2\alpha+\beta)=1$ 且 $\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ 时,

即 $\alpha=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}$ 且 $\beta=\arcsin\dfrac{1}{3}$ 时,

也即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 时, u 取最大值 $\dfrac{10}{3}$. □

例 11

设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \leq 1$. 求 $u = x + y - xy$ 的最大值.

例 11

设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \leq 1$. 求 $u = x + y - xy$ 的最大值.

解. 设 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 其中 $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

当 $0 < r \leq 1$ 时, $u = r(\sin\theta + \cos\theta) - r^2 \sin\theta\cos\theta$.

设 $\sin\theta + \cos\theta = t$ $(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$, 则 $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{t^2-1}{2}$, 于是

$$u = rt - \frac{r^2}{2}(t^2 - 1) = \frac{r^2+1}{2} - \frac{r^2}{2}\left(t - \frac{1}{r}\right)^2 \leq \frac{r^2+1}{2} \leq 1,$$

当且仅当 $r = 1$ 且 $t = 1$, 即 $(x, y) = (1, 0)$ 或$(0, 1)$ 时, $u_{\max} = 1$.

例 11

设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \le 1$. 求 $u = x + y - xy$ 的最大值.

解. 设 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 其中 $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta < 2\pi$.

当 $0 < r \le 1$ 时, $u = r(\sin\theta + \cos\theta) - r^2 \sin\theta\cos\theta$.

设 $\sin\theta + \cos\theta = t$ $(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2})$, 则 $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, 于是

$$u = rt - \frac{r^2}{2}(t^2 - 1) = \frac{r^2 + 1}{2} - \frac{r^2}{2}\left(t - \frac{1}{r}\right)^2 \le \frac{r^2 + 1}{2} \le 1,$$

当且仅当 $r = 1$ 且 $t = 1$, 即 $(x, y) = (1, 0)$ 或 $(0, 1)$ 时, $u_{\max} = 1$.

解 2. 设 $x + y = t$, 则 $t^2 = x^2 + y^2 + 2xy \le 1 + 2xy$, 即 $xy \ge \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

因此 $x + y - xy \le t - \dfrac{t^2 - 1}{2} = 1 - \dfrac{(t-1)^2}{2} \le 1$. $\square$

例 12

设 $x, y \in \mathbb{R}$，且 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$，记 $S = x^2 + y^2$. 求 $\dfrac{1}{S_{\min}} + \dfrac{1}{S_{\max}}$.

例 12

设 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$, 记 $S = x^2 + y^2$. 求 $\dfrac{1}{S_{\min}} + \dfrac{1}{S_{\max}}$.

解. 设 $x^2 = \dfrac{S}{2} + t$, $y^2 = \dfrac{S}{2} - t$, 代入 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$ 中, 整理得

$$(4S-5)^2 = 25\left(\frac{S^2}{4} - t^2\right),$$

于是

$$39S^2 - 160S + 100 = -100t^2 \leq 0,$$

解出 $\dfrac{10}{13} \leq S \leq \dfrac{10}{3}$.

经检验知, 当且仅当 $x = y$ 时, $S_{\max} = \dfrac{10}{3}$; $x = -y$ 时, $S_{\min} = \dfrac{10}{13}$. □

例 13

已知 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 满足

$$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2,$$

求 $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}$ 的最大值.

例 13

已知 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 满足

$$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2,$$

求 $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}$ 的最大值.

解. 由条件知 $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}=1$. 再由 Cauchy 不等式知

$$\begin{aligned} 2 &= \left(\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\right) \\ &\geq \left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)^2. \end{aligned}$$

因此所求的最大值为 $\sqrt{2}$. □

例 14

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $abc = 1$, 求 $S = \dfrac{1}{2a+1} + \dfrac{1}{2b+1} + \dfrac{1}{2c+1}$ 的最小值.

例 14

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $abc = 1$, 求 $S = \dfrac{1}{2a+1} + \dfrac{1}{2b+1} + \dfrac{1}{2c+1}$ 的最小值.

解. 设 $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$, 其中 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ (为啥能这么设?), 则

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \\
&= \frac{y^2}{y(2x+y)} + \frac{z^2}{z(2y+z)} + \frac{x^2}{x(2z+x)} \\
&\geq \frac{(x+y+z)^2}{y(2x+y)+z(2y+z)+x(2z+x)} = 1.
\end{aligned}
$$

当 $x = y = z$, 即 $a = b = 1$ 时 $S = 1$.

所以 S 的最小值为 1. $\square$

例 15

设 $x>0$, $y>0$, $x+y=1$, 求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$ 的最小值.

例 15

设 $x>0$, $y>0$, $x+y=1$, 求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$ 的最小值.

解. 设 $x=\dfrac{1}{2}-d$, $y=\dfrac{1}{2}+d$, 其中 $|d|<\dfrac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 &\geq 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\\ &=\frac{8d^4+12d^2+\frac{25}{2}}{1-4d^2}\geq\frac{25}{2},\end{aligned}$$

当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时, 等号成立. 因此, 所求最小值为 $\dfrac{25}{2}$. □

例 15

设 $x>0$, $y>0$, $x+y=1$, 求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$ 的最小值.

解. 设 $x=\dfrac{1}{2}-d$, $y=\dfrac{1}{2}+d$, 其中 $|d|<\dfrac{1}{2}$, 则

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geq 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$$
$$=\frac{8d^4+12d^2+\frac{25}{2}}{1-4d^2}\geq\frac{25}{2},$$

当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时, 等号成立. 因此, 所求最小值为 $\dfrac{25}{2}$. □

注. 若正数 $x_1,\cdots,x_n$ 满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}x_j=1$, 则 $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(x_j+\dfrac{1}{x_j}\right)^2$ 的最小值为 $\dfrac{(1+n^2)^2}{n}$.

例 16

(1) 设正数 x, y 满足 $x+2y=1$, 求 $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

(2) 设正数 a, b 满足 $a+b=1$, 求 $w=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}$ 的最大值.

例 16

(1) 设正数 x, y 满足 $x+2y=1$, 求 $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值.

(2) 设正数 a, b 满足 $a+b=1$, 求 $w=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}$ 的最大值.

解. 因对任意的 $\lambda>0$, 都有

$$\begin{aligned} z&=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda(x+2y-1)=\left(\frac{1}{x}+\lambda x\right)+\left(\frac{1}{y}+2\lambda y\right)-\lambda \\ &\geq 2\sqrt{\lambda}+2\sqrt{2\lambda}-\lambda=3+2\sqrt{2}-\left(\sqrt{\lambda}-\sqrt{2}-1\right)^2, \\ w&=\frac{\lambda\sqrt{2a+1}+\lambda\sqrt{2b+1}}{\lambda}\leq\frac{\lambda^2+2a+1}{2\lambda}+\frac{\lambda^2+2b+1}{2\lambda} \\ &=\lambda+\frac{2}{\lambda}=2\sqrt{2}+\left(\sqrt{\lambda}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)^2, \end{aligned}$$

当 $\sqrt{\lambda}=\sqrt{2}+1$, $x=\sqrt{2}-1$, $y=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, z 取最小值 $3+2\sqrt{2}$.

当 $\lambda=\sqrt{2}$, $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时, w 取最大值 $2\sqrt{2}$. □

例 17

设实数 x, y, z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $u=xy+2xz$ 的最大值.

例 17

设实数 x, y, z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $u=xy+2xz$ 的最大值.

解. 设 $0<\lambda<1$, 由均值不等式得

$$1=x^2+y^2+z^2=(\lambda x^2+y^2)+\left((1-\lambda)x^2+z^2\right)\geq 2\sqrt{\lambda}xy+2\sqrt{1-\lambda}xz.$$

令 $2\sqrt{\lambda}:2\sqrt{1-\lambda}=1:2$, 得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$, 进而可得

$$1=x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{5}x^2+y^2\right)+\left(\frac{4}{5}x^2+z^2\right)\geq\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2xz),$$

因此 $u\leq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 当且仅当 $xy\geq 0$, $xz\geq 0$, $\dfrac{1}{5}x^2=y^2$, $\dfrac{4}{5}x^2=z^2$, $x^2+y^2+z^2=1$ 时等号成立.

所以当 $(x,y,z)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{10}}{10},\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{10}}{10},-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ 时, $xy+2xz$ 取最大值 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. $\square$

例 18

设实数 x, y 满足 $3 \le xy^2 \le 8$, $4 \le \dfrac{x^2}{y} \le 9$, 求 $\dfrac{x^3}{y^4}$ 的取值范围.

例 18

设实数 x, y 满足 $3 \le xy^2 \le 8$, $4 \le \dfrac{x^2}{y} \le 9$, 求 $\dfrac{x^3}{y^4}$ 的取值范围.

解. 由 $\dfrac{x^3}{y^4} = \left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2 \left(\dfrac{1}{xy^2}\right)$, 以及所给的不等式, 得

$$2 = 4^2 \cdot \frac{1}{8} \le \frac{x^3}{y^4} \le 9^2 \cdot \frac{1}{3} = 27. \qquad \square$$

例 19

设 $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, 求 g 的值域.

例 19

设 $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, 求 g 的值域.

解. 若 $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 因 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号, 故由三角不等式和均值不等式得

$$|g(x)|=\left|\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|=\frac{1}{2}\left(|x|+\left|\frac{1}{x}\right|\right)\geq 1,$$

因此 $R_g\subseteq(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

设 $z\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 令 $x=z+\sqrt{z^2-1}$, 则 $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 且

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-1}+\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)=z,$$

故 $z\in R_g$. 因此 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\subseteq R_g$.

综上有 $R_g=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. $\square$

例 20

设实数 x, y 满足 $x^2+2xy-1=0$, 求 $x+y$ 的取值范围.

例 20

设实数 x, y 满足 $x^2+2xy-1=0$, 求 $x+y$ 的取值范围.

解. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2+2xy-1=0\}$.

问题为: 求映射 $f: D\to\mathbb{R}$, $(x,y)\to x+y$, 的值域.

因 $D=\left\{\left(x, \dfrac{1-x^2}{2x}\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x\neq 0\right\}$, 故

$$f(D)=\left\{x+\frac{1-x^2}{2x} : x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}.$$

设 $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, 则 $R_f=R_g$.

由上题结论知 $R_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. □

例 21

设实数 x, y 满足 $x^2 - 3xy + y^2 = 2$, 求 $x^2 + y^2$ 的取值范围.

例 21

设实数 x, y 满足 $x^2 - 3xy + y^2 = 2$, 求 $x^2 + y^2$ 的取值范围.

解. 令 $x = u + v$, $y = u - v$, 则

$$x^2 + y^2 = 2(u^2 + v^2), \quad 5v^2 - u^2 = 2.$$

由

$$5(v^2 + u^2) = (5v^2 - u^2) + 6u^2 = 2 + 6u^2 \geq 2,$$

得 $u^2 + v^2 \geq \dfrac{2}{5}$. 因此有

$$x^2 + y^2 = 2(u^2 + v^2) \geq \frac{4}{5},$$

当 $u = 0$ 时取等号.

所以 $x^2 + y^2$ 取值范围是 $\left[\dfrac{4}{5}, +\infty\right)$. □

例 22

设实数 x, y 满足 $x^2 - xy + y^2 = 1$, 求 $x^2 - y^2$ 的取值范围.

例 22

设实数 x, y 满足 $x^2 - xy + y^2 = 1$, 求 $x^2 - y^2$ 的取值范围.

解. 为消去交叉项仍做替换 $x = u + v$, $y = u - v$, 则 $u^2 + 3v^2 = 1$,

$$x^2 - y^2 = 4uv.$$

再设 $u = \cos t$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin t$, 则

$$x^2 - y^2 = 4uv = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin t \cos t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2t.$$

所以 $x^2 - y^2$ 的取值范围是 $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$. □

例 23

求函数 $f(x)=\dfrac{x^4-8x^3+23x^2-28x+21}{x^2-4x+4}$ $(|x|\leq 1)$ 的值域.

例 23

求函数 $f(x)=\dfrac{x^4-8x^3+23x^2-28x+21}{x^2-4x+4}$ $(|x|\le 1)$ 的值域.

解. 由

$$x^4-8x^3+23x^2-28x+21=(x-2)^4-(x-2)^2+9$$

知

$$f(x)=(x-2)^2+\frac{9}{(x-2)^2}-1.$$

由 $|x|\le 1$ 知

$$1\le (x-2)^2\le 9.$$

因此 $f(x)$ 的值域为 $[5,9]$. □

例 24

若正数 x, y 满足 $\dfrac{7x-9y}{xy+y^2}=x$, 则 y 的范围是________.

例 24

若正数 x, y 满足 $\dfrac{7x-9y}{xy+y^2}=x$, 则 y 的范围是________.

解. 由条件得 $(x^2+9)y=x(7-y^2)$, 故

$$\frac{7-y^2}{y}=\frac{x^2+9}{x}\geq 6.$$

得 $0<y\leq 1$. □

例 25

若正数 x, y 满足 $x+\dfrac{2}{x}+3y+\dfrac{4}{y}=10$, 求 xy 和 $\dfrac{y}{x}$ 的范围.

例 25

若正数 x, y 满足 $x+\dfrac{2}{x}+3y+\dfrac{4}{y}=10$, 求 xy 和 $\dfrac{y}{x}$ 的范围.

解. 由均值不等式知

$$10=\left(x+\frac{4}{y}\right)+\left(3y+\frac{2}{x}\right)\geq 2\sqrt{\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(3y+\frac{2}{x}\right)}=2\sqrt{3xy+\frac{8}{xy}+14},$$

故 $3xy+\dfrac{8}{xy}+14\leq 25$, 因此 $1\leq xy\leq\dfrac{8}{3}$. 当且仅当 $x+\dfrac{4}{y}=3y+\dfrac{2}{x}=5$, 即 $(x,y)=(1,1)$ 时 $xy=1$; 当且仅当 $(x,y)=\left(2,\dfrac{4}{3}\right)$ 时 $xy=\dfrac{8}{3}$.

由均值不等式, 又知

$$10=(x+3y)+\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{y}\right)\geq 2\sqrt{(x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{y}\right)}=2\sqrt{\frac{6y}{x}+\frac{4x}{y}+14},$$

故 $\dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}\leq 11$, 得 $6\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-11\left(\dfrac{y}{x}\right)+4\leq 0$, 因此 $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{y}{x}\leq\dfrac{4}{3}$. $\square$

例 26

若实数 x, y 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$, 则 x 的范围是__________.

例 26

若实数 x, y 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$, 则 x 的范围是__________.

解. 设 $\sqrt{y}=a\ (a\geq 0)$, $\sqrt{x-y}=b\ (b\geq 0)$, 则 $x=a^2+b^2$, 并且

$$a^2+b^2-4a=2b,$$

即

$$(a-2)^2+(b-1)^2=5,\quad a\geq 0,\quad b\geq 0.$$

注意 a^2+b^2 表示圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 上的点 (a,b) 到原点距离的平方, 所以 x 的取值范围是 $\{0\}\cup(4,20]$. □

例 27

若实数 x, y 满足 $x^2+xy-2y^2=1$, 求 $S=3x^2-y^2$ 的范围.

例 27

若实数 x, y 满足 $x^2+xy-2y^2=1$, 求 $S=3x^2-y^2$ 的范围.

解. 因 $(x+2y)(x-y)=1$, 故令 $x+2y=m$, $x-y=n$, 则 $mn=1$, $x=\dfrac{m+2n}{3}$, $y=\dfrac{m-n}{3}$, 因此, 由均值不等式得

$$S=\frac{2}{9}m^2+\frac{11}{9}n^2+\frac{14}{9}mn\geq\frac{2\sqrt{22}}{9}mn+\frac{14}{9}mn=\frac{2\sqrt{22}}{9}+\frac{14}{9},$$

当且仅当 $\sqrt{2}m=\sqrt{11}n$ 且 $mn=1$ 时取等号. □

例 28

若 a, b 满足 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$, 求 a^2+b^2 的取值范围.

例 28

若 a, b 满足 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$, 求 a^2+b^2 的取值范围.

解. 由 Cauchy 不等式知

$$1=\left(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right)^2\leq(a^2+1-a^2)(b^2+1-b^2)=1.$$

由取等条件知 $\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}=ab$, 整理即得 $a^2+b^2=1$. □