少年班数学II第五章不等式和最值

§5.5 不等式中的参数

version $\beta 1.0$

2023 年 4 月 18 日, 星期二

❶ 恒成立问题

(i) $f(x) \geq \lambda$ 对 $x \in D$ 恒成立 $\iff \lambda \leq \inf\limits_{x \in D} f(x)$.

(ii) $f(x) \leq \lambda$ 对 $x \in D$ 恒成立 $\iff \lambda \geq \sup\limits_{x \in D} f(x)$.

❷ 能成立问题

(i) 存在 $x_0 \in D$ 使 $f(x_0) > \lambda$ 成立 $\iff \lambda < \sup\limits_{x \in D} f(x)$.

(ii) 存在 $x_0 \in D$ 使 $f(x_0) < \lambda$ 成立 $\iff \lambda > \inf\limits_{x \in D} f(x)$.

♣ 若 f 在 D 上有最大值和最小值, 则

(iii) 存在 $x_0 \in D$ 使 $f(x_0) \geq \lambda$ 成立 $\iff \lambda \leq \max\limits_{x \in D} f(x)$.

(iv) 存在 $x_0 \in D$ 使 $f(x_0) \leq \lambda$ 成立 $\iff \lambda \geq \min\limits_{x \in D} f(x)$.

❸ 恰成立问题

$f(x) > \lambda$ 恰在集合 D 上成立 $\iff f(x) > \lambda$ 的解集为 D.

例 1

求使得关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}\geq k$ 有解的实数 k 的最大值.

解. 设 $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}$, 由 Cauchy 不等式知

$$(f(x))^2\leq((x-3)+(6-x))\cdot(1+1)=6,$$

当 $x=\dfrac{9}{2}$ 时等号成立, 故 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{6}$.

所以使得 $f(x)\geq k$ 有解的 k 的最大值为 $\sqrt{6}$. $\square$

例 2

设对任意 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \le a\sqrt{x+y}$ 都成立, 求 a 的最小值,

解. 由均值不等式知

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2 \le 2\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}\right)=2,$$

当且仅当 $x=y$ 时等号成立, 故 k 的最小值为 $\sqrt{2}$. $\square$

例 3

设 x, y, z 是直角三角形的三边长, 且 z 是斜边长. 当不等式

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) \geq kxyz$$

恒成立时, 求参数 k 的最大值, 并指出何时等号成立.

解. 不妨设 $z=1$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, 以及 $x \geq y$, 即 $0<t \leq \dfrac{\pi}{4}$.

记 $p=\sin t+\cos t$, 则 $1<p \leq \sqrt{2}$, 因此

$$\frac{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}{xyz}=\frac{2+(\sin t+\cos t)(2+2\sin t\cos t)}{2\sin t\cos t}$$

$$=\frac{2+p(2+p^2-1)}{p^2-1}=(p-1)+\frac{2}{p-1}+1 \geq (\sqrt{2}-1)+\frac{2}{\sqrt{2}-1}+1$$

$=2+3\sqrt{2}$. 当且仅当 $\sin t+\cos t=\sqrt{2}$, 即 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时等号成立. 所以 k 的最大值为 $2+3\sqrt{2}$. □

例 4

若 $a,b,c,k\in\mathbb{R}^+$, 且 $\dfrac{kabc}{a+b+c}\geq(a+b)^2+(a+b+4c)^2$, 求 k 的最小值.

解. 由均值不等式, 得 $a+b+c=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}+c\geq5\sqrt[5]{\dfrac{a^2b^2c}{16}}$, 以及

$$\begin{aligned}(a+b)^2+(a+b+4c)^2&=(a+b)^2+((a+2c)+(b+2c))^2\\&\geq(2\sqrt{ab})^2+(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc})^2\\&=4(ab+2ac+2bc+2c\sqrt{ab}+2c\sqrt{ab})\\&\geq20\sqrt[5]{16a^3b^3c^4}.\end{aligned}$$

因此有

$$\frac{((a+b)^2+(a+b+4c)^2)\cdot(a+b+c)}{abc}\geq100,$$

当且仅当 $a=b=2c$ 时等号成立. 所以 k 的最小值为 100. □

例 5

如果关于 x 的不等式 $ax^2 - |x+1| + 2a < 0$ 的解集为空集, 求 a 的范围.

解. 不等式 $ax^2 - |x+1| + 2a < 0$ 的解集为空集 $\iff$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $ax^2 - |x+1| + 2a \geq 0$, 即 $a \geq \dfrac{|x+1|}{x^2+2}$. 所以 $a \geq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \dfrac{|x+1|}{x^2+2} \right\}$.

记 $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x^2+2}$, 则 $f(-1) = 0$. 当 $x \neq -1$ 时, $f(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 3}{|x+1|} = |x+1| + \frac{3}{|x+1|} - 2\frac{x+1}{|x+1|} \\ &\geq |x+1| + \frac{3}{|x+1|} - 2 \geq 2(\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

所以 $f(x) \leq \dfrac{1}{2(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$. 而 $f(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$, 故 f 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$, 因此 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}, +\infty\right)$. □

例 6

设实数 a 使不等式 $|2x-a|+|3x-2a|\geq a^2$ 对任意的 x 恒成立，求满足条件的 a 组成的集合 A.

解. 显然 $0\in A$. 当 $a\neq 0$ 时，设 $x=ka$，则对任意的 $k\in\mathbb{R}$，恒有不等式

$$|2k-1|+|3k-2|\geq |a|.$$

所以 $|a|\leq \dfrac{1}{3}$. 综上，$A=\left[-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right]$. $\square$

例 7

若 $x\in[-1,1]$ 时, $ax^3-3x+1\geq 0$ 恒成立, 求 a 的范围.

解. (解法 1) 设 $x=\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 由 $\sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t$ 知 $(4-a)\sin^3 t\leq 1-\sin 3t$ 恒成立. 取 $t=\dfrac{\pi}{6}$, 得 $a\geq 4$; 取 $t=-\dfrac{\pi}{2}$, 得 $a\leq 4$. 所以必须有 $a=4$. 反过来还可验证 $a=4$ 时, 上式恒成立.

(解法 2) 设 $0<x\leq 1$, 则 $a\geq\dfrac{3x-1}{x^3}$, 因此对任意的 $t\geq 1$ 都有 $a\geq t^2(3-t)$, 故 $a\geq\sup\limits_{t\geq 1}t^2(3-t)$. 因 $t^2(3-t)=4\cdot\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{t}{2}(3-t)\leq 4$, 且当 $t=2$ 时等号成立, 故 $\sup\limits_{t\geq 1}t^2(3-t)=4$. 所以 $a\geq 4$.

对任意的 $t\geq 1$ 都有 $-1\leq-\dfrac{1}{t}<0$, 故 $a\left(-\dfrac{1}{t}\right)^3-3\left(-\dfrac{1}{t}\right)+1\geq 0$, 因此 $a\leq 3t^2+t^3$, 再由单调性知 $a\leq\inf\limits_{t\geq 1}(3t^2+t^3)=4$, 故 $a=4$. □

例 8

若 $x \in [-1,1]$ 时, $f(x) = ax^5 - 20x^3 + 5x - 1 \leq 0$ 恒成立, 求 a 的范围.

设 $x = \sin t$. 由 $\sin 5t = 5\sin t - 20\sin^3 t + 16\sin^5 t$, 得

$$(a-16)\sin^5 t \leq 1 - \sin 5t$$

恒成立. 取 $t = \dfrac{\pi}{10}$, 得 $a \leq 16$; 取 $t = \dfrac{13}{10}\pi$, 得 $a \geq 16$. 所以 $a = 16$. □

例 9

设 $x > 0$, $a > 0$, 求使不等式 $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{a}$ 成立的 a 的最大值.

解. 设 $\sqrt{1+x} = t$, 其中 $t > 1$, 则 $x = t^2 - 1$. 题中不等式即

$$t - 1 \geq \frac{t^2-1}{2} - \frac{(t^2-1)^2}{a},$$

即 $1 \geq \frac{t+1}{2} - \frac{(t-1)(t+1)^2}{a}$, 亦即 $\frac{t-1}{2} \leq \frac{(t-1)(t+1)^2}{a}$, 再变形得

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(t+1)^2}{a}.$$

因为上式对任意的 $t > 1$ 恒成立, 所以 $a > 0$, 且 $a \leq 2(t+1)^2$ 对任意的 $t > 1$ 恒成立.

所以 a 的最大值为 8. □

例 10

已知不等式

$$\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{\sin\theta+\cos\theta}-2\sin 2\theta\leq 3a+6$$

对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，求 a 的范围.

解. 记 $x=\cos\theta+\sin\theta$, 则 $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=x$, $\sin 2\theta=x^2-1$, 因此问题的条件可改写为: 不等式

$$(2a+3)x+\frac{6}{x}-2(x^2-1)\leq 3a+6$$

对 $x\in[1,\sqrt{2}]$ 恒成立. 因 $3-2x>0$, 故上式即为 $a\geq x+\frac{2}{x}$.

因 $\max\limits_{x\in[1,\sqrt{2}]}\left\{x+\frac{2}{x}\right\}=3$, 故 a 的取值范围为 $[3,+\infty)$. □

例 11

设 a, b, c 都是正数, 且 $a+b+c=\lambda$, 若不等式

$$\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)} \geq \frac{27}{4} \tag{$*$}$$

恒成立, 求 λ 的范围.

解. 因 $\lambda^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$, 故

$$\frac{1}{a(1+\lambda b)}+\frac{1}{b(1+\lambda c)}+\frac{1}{c(1+\lambda a)} \geq \frac{9}{a(1+\lambda b)+b(1+\lambda c)+c(1+\lambda a)}$$
$$=\frac{9}{(a+b+c)+\lambda(ab+bc+ca)} \geq \frac{9}{\lambda+\dfrac{\lambda^3}{3}}=\frac{27}{3\lambda+\lambda^3}.$$

并且当 $a=b=c=\dfrac{\lambda}{3}$ 时等号成立. 所以, 为使 $(*)$ 恒成立, 必须且只需 $\lambda>0$ 且 $\dfrac{27}{3\lambda+\lambda^3} \geq \dfrac{27}{4}$. 因此 λ 的取值范围是 $(0,1]$. $\square$

例 12

已知 $a \in (0,1)$, 试确定 t 的取值范围, 使不等式 $ax^2 + ty^2 \geq (ax+ty)^2$ 对任意实数 x, y 都成立.

解. 不等式可变形为 $a(1-a)x^2 - (2aty)x + t(1-t)y^2 \geq 0$. 利用二次函数性质知, 为使不等式对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 都成立, 必须且只需: 对任意的 $y \in \mathbb{R}$, 都有

$$(2aty)^2 - 4a(1-a)t(1-t)y^2 \leq 0.$$

这等价于 $4a^2t^2 - 4a(1-a)t(1-t)) \leq 0$, 即

$$t(t-(1-a)) \leq 0.$$

所以 t 的取值范围是 $[0, 1-a]$. $\square$

例 13

已知 $f(x)=\log_a\left(x+\dfrac{a}{x}-4\right)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 求 a 的取值范围.

解. 首先 $a>0$ 且 $a\neq 1$. f 的定义域为

$$D_f=\left\{x: x\neq 0,\ x+\frac{a}{x}-4>0\right\}=\left\{x: x>0,\ x+\frac{a}{x}-4>0\right\}$$

$$=\begin{cases}(0,2-\sqrt{4-a})\cup(2+\sqrt{4-a},+\infty), & a\leq 4,\\ (0,+\infty), & a>4.\end{cases}$$

注意, f 的值域为 $\mathbb{R}$ $\iff$ $g(x)=x+\dfrac{a}{x}-4$ $(x\in D_f)$ 的值域 R_g 为 $(0,+\infty)$.

当 $a\leq 4$ 时, $R_g=(0,+\infty)$. 当 $a>4$ 时, $R_g=[2\sqrt{a}-4,+\infty)\neq\mathbb{R}$.

所以 a 的范围是 $(0,1)\cup(1,4]$. □

例 14

定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的函数 f 满足

(i) 存在 $a>1$ 使得 $f(a)\neq 0$,

(ii) 对任意的 $b\in\mathbb{R}$, 有 $f(x^b)=bf(x)$.

若方程 $f(mx)f(mx^2)=4(f(a))^2$ 的所有解大于 1, 求 m 的取值范围.

解. 取定 $a>1$ 使得 $f(a)\neq 0$. 由 (ii) 得 $f(x)=f(a^{\log_a x})=f(a)\log_a x$,

于是所给的方程为 $\big(\log_a m+\log_a x\big)\big(\log_a m+2\log_a x\big)=4$.

记 $\log_a m=n$, $\log_a x=y$, 则方程变为 $2y^2+3ny+n^2-4=0$.

因关于 x 方程的解都大于 1, 意味着关于 y 的方程的解都是正数, 故有

$$(3n)^2-8(n^2-4)\geq 0,\quad -\frac{3n}{2}>0,\quad \frac{n^2-4}{2}>0.$$

解出 $n<-2$. 所以 m 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{a^2}\right)$. □

例 15

设关于 x 的不等式 $\lg^2 x-(2+m)\lg x+(m-1)>0$ 对于 $|m|\le 1$ 恒成立, 求 x 的范围.

解. 记 $\lg x=y$, 则不等式变为 $y^2-(2+m)y+(m-1)>0$.

记 $f(m)=(1-y)m+(y^2-2y-1))$, 则当 $m\in[-1,1]$ 时 $f(m)>0$ 恒成立.

这就意味着 $f(-1)>0$, $f(1)>0$, 即 $y^2-y-2>0$, $y^2-3y>0$.

解出 $y<-1$ 或 $y>3$, 进而得 x 的范围是 $\left(0,\dfrac{1}{10}\right)\cup(10^3,+\infty)$. □

例 16

求使不等式 $\sin^2 x + a\cos x + a^2 \geq 1 + \cos x$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立的负数 a 的范围.

解. 不等式可变形为

$$\left(\cos x + \frac{1-a}{2}\right)^2 \leq a^2 + \frac{(a-1)^2}{4}.$$

因为 $a < 0$, 故 $\left(\cos x + \frac{1-a}{2}\right)^2$ 在 $\cos x = 1$ 时取得最大值 $\left(1 + \frac{1-a}{2}\right)^2$.

所以

$$\left(1 + \frac{1-a}{2}\right)^2 \leq a^2 + \frac{(a-1)^2}{4}.$$

解出 $a \leq -2$. □

例 17

设 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 且 $x+y=k$, 求使

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{k}{2}+\frac{2}{k}\right)^2$$

恒成立的 k 的范围.

解. 若 $x=y=\dfrac{k}{2}$, 则不等式成为等号. 下设 $x \neq y$, 不妨设 $x>y$. 记 $m=\dfrac{k}{2}$, $x=m+t$, $y=m-t$, 其中 $0<t<m$. 于是不等式变为

$$\left(m+t+\frac{1}{m+t}\right)\left(m-t+\frac{1}{m-t}\right) \geq \left(m+\frac{1}{m}\right)^2,$$

经化简整理可得 $t^2 \geq \dfrac{m^4-4m^2-1}{m^2}$. 此式对任意的 $t \in (0, m)$ 都成立的充要条件是 $m^4-4m^2-1 \leq 0$. 再注意 $m>0$, 就得到 m 的取值范围是 $(0, \sqrt{2+\sqrt{5}})$, 因此 k 的范围是 $(0, 2\sqrt{2+\sqrt{5}})$. $\square$

例 18

若对任意的 $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$, 不等式 $|a - \ln x| > \ln \frac{3x+2}{3}$ 恒成立, 求 a 的范围.

解. 先考虑反面: 若存在 $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$, 使 $|a - \ln x| \le \ln \frac{3x+2}{3}$ 成立, 求 a 的范围.

由 $|a - \ln x| \le \ln \frac{3x+2}{3}$, 得 $\ln \frac{3x+2}{3} \ge 0$, 故 $x \ge \frac{1}{3}$.

再由 $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ 得 $x = \frac{1}{3}$, 因此 $a = -\ln 3$.

所以 a 的范围是 $(-\infty, -\ln 3) \cup (-\ln 3, +\infty)$. □

例 19

设 $M=\left\{y: y=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2-x+4},\ x\le 1\right\}$. 若任取 $a,b,c\in M$, 都可使以 a, b, c 为长度的线段能够成为一个三角形的三边, 求 m 的范围.

解. 注意到 $y=1+\dfrac{(m+1)x}{x^2-x+4}=1+\dfrac{(m+1)x}{x^2-x+4}\quad(x\le 1,\ x\ne 0)$.
当 $x\le 1$ 且 $x\ne 0$ 时, 有 $x+\dfrac{4}{x}-1\le -5$, 或 $x+\dfrac{4}{x}-1\ge 4$; 因此 $-\dfrac{1}{5}\le\dfrac{x}{x^2-x+4}\le\dfrac{1}{4}$.
当 $m\ge -1$ 时, $M=[\dfrac{4-m}{5},\dfrac{5+m}{4}]$, 当 $m<-1$ 时, $M=[\dfrac{5+m}{4},\dfrac{4-m}{5}]$.
依题意, 对任意 $a,b,c\in M$ 恒有 $a+b>c$, 即 $2\cdot y_{\min}>y_{\max}$. 据此得到两个关于 m 的不等式组. 这两个不等式组的解分别是 $-1\le m<\dfrac{7}{13}$ 和 $-\dfrac{17}{7}<m<-1$. 所以, m 的范围为 $\left(-\dfrac{17}{7},\dfrac{7}{13}\right)$. □

例 20

已知 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x$ 满足 $f(3) = 3$, $f(x) \geq x$, 求 a, b.

解. 由 $f(3) = 3$ 得 $b = -(3a + 9)$, 因此

$$f(x) = x^4 + ax^3 - (3a + 9)x^2 + x.$$

因对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) \geq x$, 即

$$x^2(x^2 + ax - 3a - 9) \geq 0,$$

所以当 $x \neq 0$ 时, 总有

$$x^2 + ax - 3a - 9 \geq 0.$$

据此可知 $a^2 + 4(3a + 9) \leq 0$, 即 $(a + 6)^2 \leq 0$. 所以 $a = -6$, $b = 9$. □