少年班数学II第六章数列

§6.1 数列的基本性质

version $\beta 1.0$

2023 年 4 月 23 日, 星期日

- 设 $E \subseteq \mathbb{C}$. 映射 $f:\{1,2,\cdots,m\} \to E$ 称为 E 中的有限数列, 映射 $f:\mathbb{N}^{+} \to E$ 称为 E 中的无穷数列. E 中的有限数列和无穷数列统称为 E 中的数列.
- 如非特别指出, 数列都是指无穷数列.
- 通常将 $f(k)$ 记为 f_k, 将数列 f 记为 $\{f_k\}$. 称 f_k 为数列的第 k 项 (或通项, 或一般项). 称 $\sum\limits_{j=1}^{k} f_j$ 为数列 f 的前 k 项和 (或部分和).
- 通常, 把 $\mathbb{C}$ 中的数列称为复数列, 把 $\mathbb{R}$ 中的数列称为实数列, $\mathbb{Q}$ 中的数列称为有理数列, $\mathbb{N}^{*}$ 中的数列称为正整数列, 等等.

- 若 a, b, c 满足 $a+c=2b$, 则称 a, b, c 是等差的.
- 若 a, b, c 都非零且满足 $ac=b^2$, 则称 a, b, c 是等比的.
- 若数列 $\{a_k\}$ 中任意连续的三项 a_j, a_{j+1}, a_{j+2} 都是等差的, 则称 $\{a_k\}$ 是等差数列 (或算术数列), 此时, 称 a_2-a_1 为该等差数列的公差.
- 若数列 $\{a_k\}$ 中任意连续的三项 a_j, a_{j+1}, a_{j+2} 都是等比的, 则称 $\{a_k\}$ 是等比数列 (或几何数列), 此时, 称 $\dfrac{a_2}{a_1}$ 为该等比数列的公比.

性质 1 (等差数列和等比数列的基本性质)

1. 若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 其前 n 项的和为 S_n, 则
$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$
2. 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 其前 n 项的和为 S_n, 则
$$a_n = a_1 q^{n-1}, \qquad S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1; \\ na_1 & q = 1. \end{cases}$$

例 1

设 $A, B \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = Ax + B$. 证明 $f\big|_{\mathbb{N}^*}$ 是等差数列.

例 1

设 $A, B \in \mathbb{C}$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = Ax + B$. 证明 $f\big|_{\mathbb{N}^*}$ 是等差数列.

例 2

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 证明:

(1) 若 $S_n = An^2 + Bn$, 则 $\{a_n\}$ 是公差为 $2A$ 的等差数列.

(2) 若 $S_n = Aq^n - A$ (其中 $A \neq 0$, $q \neq 1$), 则 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

例 3

若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = p$ (常数), 则 $\{a_n\}$ 是常数列.

例 3

若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = p$ (常数), 则 $\{a_n\}$ 是常数列.

解. 设 $a_n = B + nd$. 因为

$$p = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (dn + d + B)^2 - (dn + B)^2 = d(2dn + d + 2B),$$

所以 $d \cdot 2d = 0$, 即 $d = 0$. $\square$

例 4

设等差数列前 n 项和为 $\{S_n\}$, 由以下条件分别求 S_{p+q}.

(1) $S_p = p$, $S_q = q$ $(p \neq q)$.

(2) $S_p = S_q$ $(p \neq q)$.

例 4

设等差数列前 n 项和为 $\{S_n\}$, 由以下条件分别求 S_{p+q}.

(1) $S_p = p$, $S_q = q$ $(p \neq q)$.

(2) $S_p = S_q$ $(p \neq q)$.

解. (1) 设 $S_n = An^2 + Bn$. 注意函数 $f(x) = Ax^2 + Bx$ 的图像过直线 $y = x$ 上的三个不同点 $(0, 0)$, (p, p), (q, q). 而抛物线不能经过同一直线上的互异三点, 故 $A = 0$, $B = 1$, 于是 $S_n = n$, $S_{p+q} = p + q$.

例 4

设等差数列前 n 项和为 $\{S_n\}$, 由以下条件分别求 S_{p+q}.

(1) $S_p = p$, $S_q = q$ $(p \neq q)$.

(2) $S_p = S_q$ $(p \neq q)$.

解. (1) 设 $S_n = An^2 + Bn$. 注意函数 $f(x) = Ax^2 + Bx$ 的图像过直线 $y = x$ 上的三个不同点 $(0,0)$, (p,p), (q,q). 而抛物线不能经过同一直线上的互异三点, 故 $A = 0$, $B = 1$, 于是 $S_n = n$, $S_{p+q} = p + q$.

(2) 若 $A = 0$, 由 $S_p = S_q$, 可得 $S_n = 0$, 所以 $S_{p+q} = 0$.

若 $A \neq 0$, 由 $S_p = S_q$ 可得抛物线 $y = Ax^2 + Bx$ 的对称轴是直线 $x = \dfrac{p+q}{2}$, 所以 $f(p+q) = f(0) = 0$, 因此 $S_{p+q} = f(p+q) = 0$. □

例 5

设等差数列的前 n 项和为 S_n, 若 $S_p = q$, $S_q = p$ $(p \neq q)$, 求 S_{p+q}.

例 5

设等差数列的前 n 项和为 S_n, 若 $S_p = q$, $S_q = p$ $(p \neq q)$, 求 S_{p+q}.

解. 设 $S_n = An^2 + Bn$, 则

$$\begin{cases} Ap^2 + Bp = S_p = q, \\ Aq^2 + Bq = S_q = p, \end{cases}$$

故 $A(p+q) + B = -1$, 因此

$$S_{p+q} = (p+q)(A(p+q)+B) = -(p+q). \qquad \square$$

例 6

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n, $a_1 > 0$, $S_4 = S_{12}$. 求 S_n 取最大值时对应的 n.

例 6

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n, $a_1 > 0$, $S_4 = S_{12}$. 求 S_n 取最大值时对应的 n.

解. 设 $S_n = An^2 + Bn$ (公差 $d = 2A$).

若 $A = 0$, 则 $S_n = Bn$. 又 $S_4 = S_{12}$, 得 $B = 0$, S_n 恒为 0, 这与 $a_1 > 0$ 矛盾.

若 $A > 0$, 则公差 $d > 0$. 又 $a_1 > 0$, 得 $\{a_n\}$ 各项均正, $S_4 < S_{12}$, 与 $S_4 = S_{12}$ 矛盾.

所以 $A < 0$, $f(x) = Ax^2 + Bx$ 的图像开口向下. 由 $S_4 = S_{12}$ 知 $f(4) = f(12)$, 所以对称轴为 $x = 8$, 最大值为 $f(8)$. $\square$

例 7

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n, $a_3 > 0$, $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$. 求 S_n 取最大值时对应的 n.

例 7

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n, $a_3>0$, $S_{12}>0$, $S_{13}<0$. 求 S_n 取最大值时对应的 n.

解. 设 $S_n=An^2+Bn$ (公差 $d=2A$).

若 $A=0$, 则 $d=0$, $\{a_n\}$ 是常数列, $a_n=a_3>0$, $S_n=na_3>0$, 与 $S_{13}<0$ 矛盾.

若 $A>0$, 则 $d>0$, 又 $a_3>0$, 得 $a_{13}>0$, $S_{13}=S_{12}+a_{13}>0$, 矛盾.

所以 $A<0$. 因 $f(x)=Ax^2+Bx$ 有两个零点 $0,t$ (其中 $12<t<13$), 故抛物线 $y=Ax^2+Bx$ 的对称轴是直线 $x=\dfrac{t}{2}$, 其中 $6<\dfrac{t}{2}<6.5$.

因此, 当 $n=6$ 时 S_n 取最大值. □

例 8

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + n + 4$. 证明数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

例 8

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+n+4$. 证明数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

解. 若 $\{a_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列, 则对任意正整数 n 都有

$$qa_n=a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+n+4,$$

故

$$n+4=\left(q-\frac{2}{3}\right)a_n=\left(q-\frac{2}{3}\right)\cdot a_1\,q^{n-1},$$

因此 $n+5=q(n+4)$, 即 $n(q-1)=1$. 矛盾. $\square$

例 9

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_5}{b_5}, \quad \frac{a_n}{b_n}, \quad \frac{a_1 + a_{12} + a_{14}}{b_3 + b_7 + b_{17}}, \quad \frac{a_2 + a_{20}}{b_7 + b_{15}}, \quad \frac{a_2 + a_5 + a_{17} + a_{22}}{b_8 + b_{10} + b_{12} + b_{16}}.$$

例 9

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_5}{b_5},\quad \frac{a_n}{b_n},\quad \frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}},\quad \frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}},\quad \frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}.$$

解. (1) $\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)}=\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{65}{12}$.

例 9

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_5}{b_5}, \quad \frac{a_n}{b_n}, \quad \frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}, \quad \frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}, \quad \frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}.$$

解. (1) $\dfrac{a_5}{b_5} = \dfrac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)} = \dfrac{S_9}{T_9} = \dfrac{65}{12}$.

(2) $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \dfrac{14n-5}{2n+2}$.

例 9

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_5}{b_5},\quad \frac{a_n}{b_n},\quad \frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}},\quad \frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}},\quad \frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}.$$

解. (1) $\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)}=\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{65}{12}$.

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{14n-5}{2n+2}$.

(3) $\dfrac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}=\dfrac{3a_1+24d_1}{3b_1+24d_2}=\dfrac{a_1+8d_1}{b_1+8d_2}=\dfrac{a_9}{b_9}=\dfrac{S_{17}}{T_{17}}$.

例 9

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_5}{b_5},\quad \frac{a_n}{b_n},\quad \frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}},\quad \frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}},\quad \frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}.$$

解. (1) $\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)}=\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{65}{12}$.

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{14n-5}{2n+2}$.

(3) $\dfrac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}=\dfrac{3a_1+24d_1}{3b_1+24d_2}=\dfrac{a_1+8d_1}{b_1+8d_2}=\dfrac{a_9}{b_9}=\dfrac{S_{17}}{T_{17}}$.

(4) $\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\dfrac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\dfrac{S_{21}}{T_{21}}$.

例 9

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_5}{b_5},\quad \frac{a_n}{b_n},\quad \frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}},\quad \frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}},\quad \frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}.$$

解. (1) $\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)}=\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{65}{12}$.

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{14n-5}{2n+2}$.

(3) $\dfrac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}=\dfrac{3a_1+24d_1}{3b_1+24d_2}=\dfrac{a_1+8d_1}{b_1+8d_2}=\dfrac{a_9}{b_9}=\dfrac{S_{17}}{T_{17}}$.

(4) $\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\dfrac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\dfrac{S_{21}}{T_{21}}$.

(5) $\dfrac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}=\dfrac{2a_{12}+2a_{11}}{2b_{12}+2b_{11}}=\dfrac{a_1+a_{22}}{b_1+b_{22}}=\dfrac{S_{22}}{T_{22}}$.

例 10

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_7}{b_9},\quad \frac{\sqrt{3}a_1-a_9}{a_5+2b_7-b_4},\quad \frac{2{a_1}^3-{a_3}^2b_5}{a_2{b_7}^2+{b_3}^3}.$$

例 10

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_7}{b_9},\quad \frac{\sqrt{3}a_1-a_9}{a_5+2b_7-b_4},\quad \frac{2{a_1}^3-{a_3}^2b_5}{a_2{b_7}^2+{b_3}^3}.$$

解. (6) 注意 S_n, T_n 都是 "An^2+Bn" 的形式. 因 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$, 故存在 $K\neq 0$ 使得 $S_n=Kn(7n+2)$, $T_n=Kn(n+3)$ (♣ 为什么?), 进而

$$a_n=K(14n-5),\quad b_n=K(2n+2), \tag{1}$$

所以 $\dfrac{a_7}{b_9}=\dfrac{93}{20}$.

例 10

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_7}{b_9}, \quad \frac{\sqrt{3}a_1 - a_9}{a_5 + 2b_7 - b_4}, \quad \frac{2{a_1}^3 - {a_3}^2 b_5}{a_2 {b_7}^2 + {b_3}^3}.$$

解. (6) 注意 S_n, T_n 都是 "$An^2 + Bn$" 的形式. 因 $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{7n+2}{n+3}$, 故存在 $K \neq 0$ 使得 $S_n = Kn(7n+2)$, $T_n = Kn(n+3)$ (♣ 为什么?), 进而

$$a_n = K(14n-5), \quad b_n = K(2n+2), \tag{1}$$

所以 $\dfrac{a_7}{b_9} = \dfrac{93}{20}$.

(7) $\dfrac{\sqrt{3}a_1 - a_9}{a_5 + 2b_7 - b_4} = \dfrac{9\sqrt{3} - 121}{65 + 32 - 10} = \dfrac{9\sqrt{3} - 121}{87}$ (用 (1) 式).

例 10

设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n, T_n, 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+2}{n+3}$, 求

$$\frac{a_7}{b_9}, \quad \frac{\sqrt{3}a_1 - a_9}{a_5 + 2b_7 - b_4}, \quad \frac{2{a_1}^3 - {a_3}^2 b_5}{a_2 {b_7}^2 + {b_3}^3}.$$

解. (6) 注意 S_n, T_n 都是 "$An^2 + Bn$" 的形式. 因 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+2}{n+3}$, 故存在 $K \neq 0$ 使得 $S_n = Kn(7n+2)$, $T_n = Kn(n+3)$ (♣ 为什么?), 进而

$$a_n = K(14n-5), \quad b_n = K(2n+2), \tag{1}$$

所以 $\frac{a_7}{b_9} = \frac{93}{20}$.

(7) $\frac{\sqrt{3}a_1 - a_9}{a_5 + 2b_7 - b_4} = \frac{9\sqrt{3} - 121}{65 + 32 - 10} = \frac{9\sqrt{3} - 121}{87}$ (用 (1) 式).

(8) $\frac{2{a_1}^3 - {a_3}^2 b_5}{a_2 {b_7}^2 + {b_3}^3} = \frac{2 \cdot 9^3 - 37^2 \cdot 12}{23 \cdot 16^2 + 8^3}$. □

例 11

对数列 $\{a_n\}$, 证明:

(1) 若 $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, 则 $a_{n+1} = (a_1 - 1)a_1 a_2 \cdots a_n + 1$.

(2) 若 $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n + 1$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$.

例 11

对数列 $\{a_n\}$, 证明:

(1) 若 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, 则 $a_{n+1}=(a_1-1)a_1a_2\cdots a_n+1$.

(2) 若 $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n+1$, 则当 $n\geq 2$ 时, $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$.

解. (1) 直接计算,

$$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)=a_na_{n-1}(a_{n-1}-1)=\cdots$$

$$=a_na_{n-1}\cdots a_1(a_1-1).$$

例 11

对数列 $\{a_n\}$, 证明:

(1) 若 $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, 则 $a_{n+1} = (a_1 - 1)a_1 a_2 \cdots a_n + 1$.

(2) 若 $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n + 1$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$.

解. (1) 直接计算,

$$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) = a_n a_{n-1}(a_{n-1} - 1) = \cdots$$

$$= a_n a_{n-1} \cdots a_1(a_1 - 1).$$

(2) 因 $a_{n+1} - 1 = a_1 a_2 \cdots a_n$, 故当 $n \geq 2$ 时

$$a_n - 1 = a_1 a_2 \cdots a_{n-1},$$

所以

$$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1).$$

□

例 12

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n + 1$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

例 12

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n + 1$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

解. 因当 $n \geq 2$ 时有 $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$, 故

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n},$$

即

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

□

例 13

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 1$, 以及

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3},$$

求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$ 的值.

例 13

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 1$, 以及

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3},$$

求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$ 的值.

解. 因

$$a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} (a_{n+4} - a_n) = a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} - a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}$$

$$= (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}) - (a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3})$$

$$= a_{n+4} - a_n,$$

故 $a_{n+4} = a_n$. 再由 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, 得 $a_4 = 4$. 所以

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 25(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 200.$$

□