

前言

各位即将进入预科二的同学们好！少年班的数学课程十分重要，它不仅是学年末将要进行的专业选择与试验班选拔的重要参考依据，更是日后进入理、工等各专业学习的基础。为了让大家更好地完成预科二数学课程的学习，笔者整理了这份资料，希望能为各位同学带来帮助。

本资料包含以下三个部分：

1. “数学 I 作业题与解答合集”（P2~17）

这一部分是笔者在思源学堂上提交的数学 I 作业的合订本，仅包含陈虎民老师布置的作业，可供日常学习与考前复习参考。但是，两位老师所布置的作业如与本资料中题目雷同，还请各位同学认真思考，独立完成作业，这样作业的练习效果才能实现。

2. “数学 II 作业题与解答合集”（P18~27）

这一部分是笔者在思源学堂上提交的数学 II 作业的合订本；不同的是，本学期两位老师布置的作业相同，本部分包含了所有的作业。

3. “数学 II 复习笔记”（P28~53）

这一部分是笔者于考前的周末（6.7~6.8）复习时完成的手写笔记，参考价值较为有限，且数学 II 课程授课内容与考试难度波动较大，还请各位同学选择性地参考。同时，鉴于笔者能力有限，且完成时间仓促，如有错误或不当之处欢迎交流指正。

此外，关于 23 级少年班预科二数学课程的资料还有韩一宁等同学编写的期末复习手册与笔者编写的两学期期末试题回忆与解答等，均可在少学组群中找到。

感谢少年班历届学长学姐对我们学习生活的帮助，笔者也希望能够将这种互帮互助、交流分享的精神传承下来，是有此资料。笔者与同学们一样迫切地希望着这份资料能为大家的数学学习带来哪怕是一丝一毫的帮助。

最后预祝同学们度过精彩的预科二生活，愿大家不吝汗水，不负热爱，学业有成，诸事顺遂。

少年班 2302 / 25 级数试 张杰铭

2025 年 7 月

第一部分

数学 I 作业题与解答合集

第一次作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 设 A, B 是任意两个非空集合, 定义 A, B 的对称差:

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$, 证明: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

证明

$$\begin{aligned}x \in (A \oplus B) \oplus C &\Leftrightarrow x \in [(A - B) \cup (B - A)] \oplus C \\&\Leftrightarrow (x \in (A - B) \cup (B - A) \wedge x \notin C) \vee (x \notin (A - B) \cup (B - A) \wedge x \in C) \\&\Leftrightarrow x \in A \cap B \cap C \vee x \in A - (B \cup C) \vee x \in B - (C \cup A) \vee x \in C - (A \cup B) \\&\Leftrightarrow (x \in (B - C) \cup (C - B) \wedge x \notin A) \vee (x \notin (B - C) \cup (C - B) \wedge x \in A) \\&\Leftrightarrow x \in A \oplus (B \oplus C)\end{aligned}$$

□

题目 2 某工厂装备 30 辆汽车, 可供选择的设备是收音机, 空气调节机和对讲机. 已知其中 15 辆汽车有收音机, 8 辆有空气调节机, 6 辆有对讲机, 而且其中三辆汽车这三种设备都有, 问至少多少辆汽车没有提供任何设备?

解 设集合 A, B, C 分别表示装备有收音机、空气调节机、对讲机的汽车, 则由题意得:

$$|A| = 15, |B| = 8, |C| = 6$$

$$|A \cap B \cap C| = 3$$

由容斥原理:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \\&\leq 15 + 8 + 6 - 3 - 3 - 3 + 3 = 23\end{aligned}$$

而当不存在恰好装备两种设备的车辆时, 不等式成立. 故至少 7 辆汽车没有提供任何设备.

题目 3 若 $A = \{\alpha, \beta\}, B = \{1, 2, 3\}$, 求 $A \times B, B \times A, A \times A, B \times B$ 以及 $A \times B \cap B \times A$.

解

$$A \times B = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\}$$

$$A \times A = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta)\}$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$A \times B \cap B \times A = \emptyset.$$

题目 4 设 A, B, C 是任意三个非空集合, 证明:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

证明

$$\begin{aligned}(x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \\&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \\&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \\&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\end{aligned}$$

□

题目 5 设 A, B, C, D 是四个非空集合, 证明: $A \times B \subseteq C \times D$ 的充要条件是 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$.

证明

$$\begin{aligned}A \times B \subseteq C \times D &\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in C \times D) \\&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge y \in B) \Rightarrow (x \in C \wedge y \in D)) \\&\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in D) \\&\Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D\end{aligned}$$

□

题目 6 设 $A = \{1, 2, 3\}$, 求 I_A .

解

$$I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}.$$

题目 7 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, 若 $H = \{(x, y) | \frac{x-y}{2} \in Z, x, y \in X\}$,
 $S = \{(x, y) | \frac{x-y}{3} \in Z^+, x, y \in X\}$, 求 $H \cup S, H \cap S, H - S$.

解 依题意得:

$$H = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$$

$$S = \{(4, 1)\}$$

故

$$H \cup S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 1)\}$$

$$H \cap S = \emptyset$$

$$H - S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}.$$

题目 8 设 $R = \{(1, 2), (3, 4), (2, 2)\}$, $S = \{(4, 2), (2, 5), (3, 1), (1, 3)\}$, 求 $R \circ S$,
 $S \circ R$, $R \circ (S \circ R)$.

解

$$R \circ S = \{(4, 2), (3, 2), (1, 4)\}$$

$$S \circ R = \{(1, 5), (3, 2), (2, 5)\}$$

$$R \circ (S \circ R) = \{(3, 2)\}.$$

题目 9 设 T 是从 X 到 Y 的二元关系, S 是从 Y 到 Z 的二元关系, 证明:
 $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$

证明

$$\begin{aligned} (z, x) \in (S \circ T)^{-1} &\Leftrightarrow (x, z) \in S \circ T \\ &\Leftrightarrow \exists y ((x, y) \in T \wedge (y, z) \in S) \\ &\Leftrightarrow \exists y ((z, y) \in S^{-1} \wedge (y, x) \in T^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (z, x) \in T^{-1} \circ S^{-1} \end{aligned}$$

□

题目 10 若 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 均为双射, 证明: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

证明 由于映射必为二元关系, 则本题的证明在上题已经给出.

□

第二次作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 用 Hölder 不等式证明 Young 不等式: 设 $a, b > 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$, 当且仅当 $a = b$ 等号成立.

证明 定义函数 $f: \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{a^x}{p} + \frac{b^x}{q})^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}, & x = 0 \end{cases}$$

$\forall 0 < x_1 < x_2$, 由 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= (\frac{1}{p} + \frac{1}{q})^{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}} (\frac{a^{x_2}}{p} + \frac{b^{x_2}}{q})^{\frac{1}{x_2}} \\ &\geq [(\frac{1}{p})^{\frac{x_2-x_1}{x_2}} (\frac{a^{x_2}}{p})^{\frac{x_1}{x_2}} + (\frac{1}{q})^{\frac{x_2-x_1}{x_2}} (\frac{b^{x_2}}{q})^{\frac{x_1}{x_2}}]^{\frac{1}{x_1}} \\ &= (\frac{a^{x_1}}{p} + \frac{b^{x_1}}{q})^{\frac{1}{x_1}} \\ &= f(x_1) \end{aligned} \tag{1}$$

这就是说, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 事实上,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{a^x}{p} + \frac{b^x}{q})^{\frac{1}{x}} \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{a^x}{p} + \frac{b^x}{q})}{x} \right] \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{a^x}{p} \ln a + \frac{b^x}{q} \ln b}{\frac{a^x}{p} + \frac{b^x}{q}} \right) \\ &= \exp \left(\frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q} \right) \\ &= a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \\ &= f(0) \end{aligned}$$

由 (1) 可知, $\forall x \in (0, 1)$, 我们有:

$$f(x) \leq f(1)$$

由极限的保号性:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq f(1)$$

即

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

取等条件即是 (1) 中 Hölder 不等式的取等条件:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{\frac{a^{x/2}}{p}}{\frac{a^{x/2}}{p} + \frac{b^{x/2}}{q}} \\ \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{\frac{b^{x/2}}{q}}{\frac{a^{x/2}}{p} + \frac{b^{x/2}}{q}} \end{cases}$$

即

$$a = b$$

□

题目 2 用 Hölder 不等式求 $f(x) = \frac{p}{\sqrt{\sin x}} + \frac{q}{\sqrt{\cos x}}$ 的值域, 其中 $x \in (0, \frac{\pi}{2}), p, q > 0$.

解 由 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned} & [(p^{\frac{4}{5}} \sin^{-\frac{2}{5}} x)^{\frac{5}{4}} + (q^{\frac{4}{5}} \cos^{-\frac{2}{5}} x)^{\frac{5}{4}}]^{\frac{4}{5}} [(\sin^{\frac{2}{5}} x)^5 + (\cos^{\frac{2}{5}} x)^5]^{\frac{1}{5}} \\ & \geq p^{\frac{4}{5}} \sin^{-\frac{2}{5}} x \sin^{\frac{2}{5}} x + q^{\frac{4}{5}} \cos^{-\frac{2}{5}} x \cos^{\frac{2}{5}} x = p^{\frac{4}{5}} + q^{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

即

$$f(x) = \frac{p}{\sqrt{\sin x}} + \frac{q}{\sqrt{\cos x}} \geq (p^{\frac{4}{5}} + q^{\frac{4}{5}})^{\frac{5}{4}}$$

等号在 $x = \arctan(\frac{p}{q})^{\frac{2}{5}}$ 时取到. 而另一方面, 当 x 足够小, $f(x)$ 总能取到任意大的值, 于是 $f(x)$ 的值域为:

$$[(p^{\frac{4}{5}} + q^{\frac{4}{5}})^{\frac{5}{4}}, +\infty).$$

第三次作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 设 x, y, z 均为正数, 且 $x + y + z = 1$, 求 $f(x, y, z) = xy^2z^3$ 的最大值.

解 由 AM-GM 不等式

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy^2z^3 \\ &= 108 \cdot [x \cdot (\frac{y}{2}) \cdot (\frac{y}{2}) \cdot (\frac{z}{3}) \cdot (\frac{z}{3}) \cdot (\frac{z}{3})] \\ &\leq 108 \cdot (\frac{x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3}}{6})^6 \\ &= \frac{1}{432} \end{aligned}$$

当且仅当 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, 即

$$x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{2}$$

时取到等号.

题目 2 已知 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 均为锐角, 且 $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 \cdot \dots \cdot \tan \theta_n = 1$, 求 $\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_n$ 的最大值.

解 由 $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 \cdot \dots \cdot \tan \theta_n = 1$ 得

$$\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_n = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_n$$

而由 AM-GM 不等式, $\forall 1 \leq i \leq n$

$$\sin \theta_i \cdot \cos \theta_i \leq \frac{\sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i}{2} = \frac{1}{2}$$

于是得

$$\begin{aligned} &\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_n \\ &= \sqrt{(\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin \theta_n)(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_n)} \\ &= \sqrt{(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1)(\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2) \dots (\sin \theta_n \cdot \cos \theta_n)} \\ &\leq 2^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

当且仅当

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \frac{\pi}{4}$$

时取到等号.

题目 3 设 $f(x) = \lg \frac{1^x + 2^x + \dots + (n-1)^x + an^x}{n}$. 若 $0 \leq a \leq 1, n \geq 2$, 求证:
 $f(2x) \geq 2f(x)$.

证明 要证 $f(2x) \geq 2f(x)$, 只需证

$$\frac{1^{2x} + 2^{2x} + \dots + (n-1)^{2x} + an^{2x}}{n} \geq \left(\frac{1^x + 2^x + \dots + (n-1)^x + an^x}{n} \right)^2$$

由于 $0 \leq a \leq 1$, 且 $n^x > 0$, 即得

$$\frac{1^x + 2^x + \dots + (n-1)^x + \sqrt{an^x}}{n} \geq \frac{1^x + 2^x + \dots + (n-1)^x + an^x}{n}$$

故只需证

$$\frac{1^{2x} + 2^{2x} + \dots + (n-1)^{2x} + an^{2x}}{n} \geq \left(\frac{1^x + 2^x + \dots + (n-1)^x + \sqrt{an^x}}{n} \right)^2 \quad (1)$$

事实上, 由 Cauchy 不等式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1^{2x} + 2^{2x} + \dots + (n-1)^{2x} + an^{2x}}{n} \right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ & \geq \left(\frac{1^x + 2^x + \dots + (n-1)^x + \sqrt{an^x}}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$ 是 n 个 $\frac{1}{n}$ 的和.

即 (1) 式成立. 从而原命题便得到了证明.

□

第四次作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 证明：圆内接 n 边形中，正 n 边形面积最大.

证明 将圆的圆心设为 O ，半径设为 1. 则正 n 边形的面积为

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \quad (n \geq 3)$$

容易知道， S_n 随 n 的增加单调增加. 考虑圆周上任意 n 点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 组成的 n 边形，记其面积为 S'_n . 并记

$$\theta_i = \angle A_i O A_{i+1} \quad (\theta = 1, 2, \dots, n, A_{n+1} = A_1)$$

若存在一条直径，使得该 n 个点均分布在直径上或其一侧，则有：

$$\theta_n = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}$$

进而可得：

$$S'_n = \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_{n-1} - \sin \theta_n)$$

由于 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上为上凸函数，由 Jensen 不等式：

$$\begin{aligned} S'_n &= \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_{n-1} - \sin \theta_n) \\ &< \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_{n-1}) \\ &\leq \frac{n-1}{2} \cdot \sin \frac{\theta_n}{n-1} \\ &\leq \frac{n-1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n-1} \\ &< S_n \end{aligned}$$

否则，对于任意一条直径，总存在两个顶点在其两侧，则有：

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1} + \theta_n = 2\pi$$

进而可得：

$$S'_n = \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_{n-1} + \sin \theta_n) \leq S_n$$

□

题目 2 设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的任一排列为 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 用排序不等式证明:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$$

证明 不妨设 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. 由题意得, 正实数 $\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n-1}}, \dots, \frac{1}{a_1}$ 的任一排列为 $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n}$, 其由大到小的一个排列为 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$. 由排序不等式:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n} = n$$

当且仅当

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

时等号成立.

□

题目 3 用上题结论证明均值不等式: 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为正数, 则:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

证明 先证 $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ 时的情形. 不妨设

$$p_1 = 1$$

$$p_i = a_i p_{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

于是可得:

$$p_1 = a_1 p_n$$

则由上题的结论, 我们得到:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{p_1}{p_n} + \frac{p_2}{p_1} + \dots + \frac{p_n}{p_{n-1}} \geq n$$

而当 $a_1 a_2 \dots a_n \neq 1$ 时, 记

$$b_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则此时 $b_1 b_2 \dots b_n = 1$. 于是有:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}{n} \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

□

第五次作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 若 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且满足: $\exists a \in (1, +\infty), f(a) = 1$; 当 $m \in R, x \in (0, +\infty)$ 时, 有 $f(x^m) - mf(x) = 0$ 恒成立.

- (1) 证明: $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y), \forall x, y \in (0, +\infty)$;
- (2) 判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并证明你的结论;
- (3) 若 $t > 0$ 时, 不等式 $f(t^2 + 4) - f(t) \geq 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解 (1) 证明: 由于 $x, y > 0$:

$$f(\frac{x}{y}) = f(e^{\ln x - \ln y}) = (\ln x - \ln y)f(e) = f(e^{\ln x}) - f(e^{\ln y}) = f(x) - f(y)$$

□

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是严格增的. 事实上:

$$f(x) = f(a^{\log_a x}) = f(a) \log_a x = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

由对数函数严格增的性质, 结合 $a \in (1, +\infty)$, 可得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是严格增的.

(3) 由 (1) 的结论, 原不等式可以化为:

$$f(t + \frac{4}{t}) \geq f(a)$$

由 (2) 的结论, 上式等价于:

$$t + \frac{4}{t} \geq a$$

而 $t > 0$ 时, $t + \frac{4}{t} \geq 4$ 恒成立. 且 $2 + \frac{4}{2}$. 于是:

$$a \in (1, 4]$$

题目 2 若函数 $f(x) = \sin(x + \theta)$ 是偶函数, 求 θ .

解 由偶函数的定义, 即 $\forall x \in R$, 有:

$$\sin(x + \theta) = \sin(-x + \theta)$$

于是

$$\sin x \cos \theta = 0$$

恒成立. 由于 x 的任意性, 恒有 $\cos \theta = 0$. 故

$$\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

第六次作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 已知 $\sin(x + 20^\circ) = \cos(x + 10^\circ) + \cos(x - 10^\circ)$, 求 $\tan x$ 的值.

解 原方程可化为

$$\sin x \cos 20^\circ + \cos x \sin 20^\circ = 2 \cos x \cos 10^\circ$$

于是

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{2 \cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \\&= \frac{2(\cos 10^\circ - \sin 30^\circ \sin 20^\circ)}{\cos 20^\circ} \\&= \frac{2 \cos 30^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \\&= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

题目 2 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A \cos^2 \frac{C}{2} + \sin C \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2} \sin B$, 求 $\cos \frac{A-C}{2} - 2 \sin \frac{B}{2}$.

解 原方程可化为:

$$\sin A(1 + \cos C) + \sin C(1 + \cos A) = 3 \sin B$$

$$\sin A + \sin C = 3 \sin B - \sin(A + C) = 2 \sin B$$

因此

$$\begin{aligned}(\cos \frac{A-C}{2} - 2 \sin \frac{B}{2}) \cos \frac{B}{2} &= \frac{1}{2} [\cos \frac{A+B-C}{2} + \cos \frac{C+B-A}{2}] - \sin B \\&= \frac{1}{2} (\sin A + \sin C) - \sin B \\&= 0.\end{aligned}$$

由于 $\cos \frac{B}{2} \neq 0$, 故

$$\cos \frac{A-C}{2} - 2 \sin \frac{B}{2} = 0.$$

题目 3 求值: $\arctan \frac{1}{7} + 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$.

解 不妨记

$$\alpha = \arctan \frac{1}{7}$$

$$\beta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$$

于是可得

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, \cos \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

故

$$\sin 2\beta = \frac{3}{5}, \cos 2\beta = \frac{4}{5}$$

于是

$$\sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha \cos 2\beta + \cos \alpha \sin 2\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于 $\alpha + 2\beta \in (0, 2\pi)$, 故

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}.$$

第八次作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 用复数求值: $\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ$.

解 用三角法求解:

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ &= \frac{\sin 20^\circ + 4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \\&= \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} \\&= 2 \cdot \frac{\cos 60^\circ \sin 20^\circ + \sin (60^\circ - 20^\circ)}{\cos 20^\circ} \\&= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

注 本题我没有想到太好的复数方法. 较为自然的想法是用复数的指数函数表示三角函数, 即

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}$$

后再进行计算. 然而, 这样的做法缺少引入复数的动机, 且计算中的一些构造思路仍是由三角函数变形的方法所取得, 不能带来更多的启发. 因此仍采用了三角法完成本题. 以下是老师课上给出的解法, 确实巧妙.

正解 设 $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$. 则有:

$$z^3 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

由于 $|z| = 1$, 所以 $\bar{z} = \frac{1}{z}$, 于是得到:

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ &= \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ \sin 20^\circ &= \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}\end{aligned}$$

代入得到：

$$\begin{aligned}
 \tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ &= \frac{1}{i} \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} + 2 \cdot \frac{z^2 - 1}{zi} \\
 &= \frac{z(z^2 - 1) + 2(z^2 + 1)(z^2 - 1)}{i \cdot z(z^2 + 1)} \\
 &= \frac{\sqrt{3}iz - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{iz - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \\
 &= \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

题目 2 设有四边形 $ABCD$ ，其中 A, B, C, D 为逆时针方向。利用复数证明：

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

证明 由于四边形 $ABCD$ 在一个平面上，则可以用

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$

分别表示 A, B, C, D 四个点. 由于

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$$

由绝对值不等式可得

$$\begin{aligned}
 & |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| \\
 & \geq |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| = |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)|
 \end{aligned}$$

进而得

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

取等号时，有 $(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)$ 与 $(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)$ 共线，即交比

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$$

由于 A, B, C, D 形成一个四边形，则它们不共线. 故取等条件为： A, B, C, D 四点共圆.

□

第二部分

数学 II 作业题与解答合集

第三周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!}$

解 由于 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n > 2 \times 3^{n-2}$, 我们有:

$$0 < \frac{2^n}{n!} < \frac{2^n}{2 \times 3^{n-2}} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. 由夹逼准则知:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

题目 2 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n^2+1} + \frac{2}{4n^2+2} + \dots + \frac{n}{4n^2+n}$.

解 由于

$$\frac{1}{4n^2+n} + \frac{2}{4n^2+n} + \dots + \frac{n}{4n^2+n} < \frac{1}{4n^2+1} + \frac{2}{4n^2+2} + \dots + \frac{n}{4n^2+n} < \frac{1}{4n^2} + \frac{2}{4n^2} + \dots + \frac{n}{4n^2}$$

而我们知道:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n^2+n} + \frac{2}{4n^2+n} + \dots + \frac{n}{4n^2+n} = \frac{n(n+1)}{2(4n^2+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{8n+2} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n^2} + \frac{2}{4n^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} = \frac{n(n+1)}{2 \cdot 4n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{8n} = \frac{1}{8}$$

由夹逼准则知:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n^2+1} + \frac{2}{4n^2+2} + \dots + \frac{n}{4n^2+n} = \frac{1}{8}.$$

第四周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 设 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, $n = 1, 2, \dots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

解 先证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在. 对于任意的正整数 n , 显见 $a_n > 0$. 于是:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n}})^2 + 1 \geq 1$$

这就是说, $\{a_n\}$ 有下界. 以下证明 $\{a_n\}$ 单调递减. 事实上:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$$

于是得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$. 由于 $a_n > 0$, 由极限的保号性, $A \geq 0$. 于是有:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}(A + \frac{1}{A}) \\ A \geq 0 \end{cases}$$

解得 $A = 1$. 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

第五周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{4x^2 + 6x + 5} - (ax + b)] = 0$, 求 a, b .

解 由于

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2 + 6x + 5} - (ax + b) &= \frac{[\sqrt{4x^2 + 6x + 5} - (ax + b)][\sqrt{4x^2 + 6x + 5} + (ax + b)]}{\sqrt{4x^2 + 6x + 5} + (ax + b)} \\&= \frac{4x^2 + 6x + 5 - (ax + b)^2}{\sqrt{4x^2 + 6x + 5} + (ax + b)} \\&= \frac{(4 - a^2)x + 6 - 2ab + \frac{5 - b^2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}} + a + \frac{b}{x}}\end{aligned}$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}} + a + \frac{b}{x} = 2 + a$, 则原极限为 0 的一个必要条件是 $4 - a^2 = 0$. 即

$$a = \pm 2$$

当 $a = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}} + a + \frac{b}{x} = 4$, 则还要有 $6 - 2ab = 0$, 即 $b = \frac{3}{2}$, 此时满足题意.

当 $a = -2$ 时, 无论 b 的取值, 当 x 充分大时有

$$\sqrt{4x^2 + 6x + 5} - (ax + b) = \sqrt{4x^2 + 6x + 5} + 2x - b > 2x, \text{ 此时显然不收敛于 } 0.$$

综上所述, 所有满足要求的 a, b 为

$$a = 2, b = \frac{3}{2}$$

题目 2 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$.

解 对任意的正整数 $k \geq 2$, 我们有

$$\frac{1 - \sqrt[k]{x}}{1 - x} \stackrel{t = \sqrt[k]{x}}{=} \frac{1 - t}{1 - t^k} = \frac{1}{1 + t + \cdots + t^{k-1}}$$

于是得到

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[k]{x}}{1 - x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1 + t + \cdots + t^{k-1}} = \frac{1}{k}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x})(1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \cdots \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x} = \frac{1}{n!}$$

第五周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 设 $f(x) = xe^{ax} - e^x$. 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$. 求 a 的取值范围.

解 设 $g(x) = e^x$, $h(x) = xe^{ax}$, 其中 h 与 a 有关. 于是 $f(x) < -1$ 即

$$g(x) - g(0) > h(x) - h(0)$$

对任意的 $x > 0$, 显见 g, h 在 $[0, x]$ 上连续, 在 $(0, x)$ 上可导. 由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (0, x)$, 使得

$$\frac{g(x) - g(0)}{h(x) - h(0)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$$

由于 $h(x) - h(0) = xe^{ax} > 0$, 则 $g(x) - g(0) > h(x) - h(0)$ 等价于

$$g'(\xi) > h'(\xi)$$

带入并化简得到

$$e^{(1-a)\xi} > 1 + a\xi$$

下面我们证明 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

一方面, 我们证明, 对任意的 $a \in (-\infty, \frac{1}{2}]$, 当 $x > 0$ 时有 $g(x) - g(0) > h(x) - h(0)$. 事实上, 此时对任意的 x , 我们有

$$e^{(1-a)\xi} > 1 + (1-a)\xi \geq 1 + a\xi$$

另一方面, 我们证明, 对任意的 $a \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, 存在 $x_0 > 0$, 使得 $f(x_0) \geq -1$.

当 $a \geq 1$ 时, $f(1) = e^a - e \geq 0 > -1$.

当 $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi' \in (0, x)$

$$\frac{e^x - x - 1}{x} = e^{\xi'} - 1 < e^x - 1$$

进而有

$$e^x < 1 + x + x(e^x - 1)$$

取 $x_0 = \frac{1}{1-a} \ln \frac{a}{1-a}$, $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ 保证了 $x_0 > 0$. 于是有

$$\begin{aligned} e^{(1-a)\xi} &< 1 + (1-a)\xi + (1-a)\xi \cdot (e^{(1-a)\xi} - 1) \\ &< 1 + (1-a)\xi + (1-a)\xi \cdot (e^{(1-a)x_0} - 1) \\ &= 1 + a\xi \end{aligned}$$

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

第六周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 已知函数

$$f(x) = \cos(ax) - \ln(1 - x^2)$$

若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

解 由 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(ax) - \ln(1 - x^2) \\ &= \left[1 - \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^4 x^4}{24} + o(x^4)\right] - \left[-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] \\ &= 1 + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a^4}{24} + \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

于是当 $a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点; 当 $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

当 $a = \pm\sqrt{2}$ 时

$$f(x) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

于是在 $x = 0$ 附近成立

$$\frac{f(x) - 1}{x^4} > 0$$

故

$$f(x) > f(0) = 1$$

这就是说, $a = \pm\sqrt{2}$ 时 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

第七周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 设 $n \in N^+$. 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln(n+1)$.

证明 我们先证 $\forall k \in N^+, \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln(1 + \frac{1}{k})$, 然后将其累加即可得到原命题.

设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x)$. 求导函数并整理得

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} (1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x})$$

当 $x > 0$ 时, 由于

$$1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} = \frac{\frac{1}{4}x^2}{1 + \frac{1}{2}x + \sqrt{1+x}} > 0$$

于是此时 $f'(x) > 0$. 故而我们得到, 对任意 $x > 0$, 存在 $\xi \in (0, x)$ 使得

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) > 0$$

因此, $\forall k \in N^+$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+k}} - \ln(1 + \frac{1}{k}) = f(\frac{1}{k}) > f(0) = 0$$

这就是说, $\forall k \in N^+, \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln(1 + \frac{1}{k})$. 于是

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln(n+1)$$

□

第八周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 设 $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 证明: f 在 $x = 0$ 点没有极限.

证明 用反证法. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$, 即对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $x \in \overset{\circ}{U}(0, \delta)$, 都有

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad (1)$$

取 $\epsilon = 1$, 存在对应的 δ_0 . 取 $n = [\frac{1}{\pi\delta_0}] + 1$. 命

$$x_1 = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \quad x_2 = \frac{2}{(4n-1)\pi},$$

于是得到

$$|x_1| < |x_2| < \frac{1}{n\pi} < \delta_0$$

而 $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$. 代入 (1) 得

$$\begin{cases} |1 - a| < 1 \\ |-1 - a| < 1 \end{cases} \quad (2)$$

然而

$$|1 - a| + |-1 - a| = |1 - a| + |1 + a| > |(1 - a) + (1 + a)| = 2$$

这与 (2) 矛盾!

□

第九周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 计算极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \cos x} - \sqrt{1+x}}{x^3}$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1+x \cos x} - \sqrt{1+x}}{x^3} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x \cos x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{1+x \cos x} + \sqrt{1+x})}{x^3(\sqrt{1+x \cos x} + \sqrt{1+x})} \\ &= \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x \cos x} + \sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \cos x} - \sqrt{1+x}}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x \cos x} + \sqrt{1+x}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

第十周作业

少年班 2302 张杰铭

题目 1 求极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \ln[(1 - \sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin 2x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{x^2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \exp(\lim_{x \rightarrow 0} \ln[(1 - \sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}]) \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

第三部分

数学 II 复习笔记



西安交通大学

中国 西安 710049

Xi'an Jiaotong University
Xi'an 710049, P.R. China

数学 II 期末复习.

考试范围: 数列极限, 函数极限, 导数, 中值定理, Taylor公式,

常微分方程, 幂级数, 复数.

师: 陈纪修 C2~5, 9.1~9.4, 10.3. 陈虎氏 C4. 王立国笔记.

§ 2.1: 确界.

- 定义: ~~略~~. $\forall S: \sup S = \beta: \forall x \in S, x \leq \beta; \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > \beta - \varepsilon.$

- 性质: $f(x) \leq A$ 恒成立 $\Rightarrow \sup f(x) \leq A$. (上节课P15)

§ 2.2: 数列极限. 及其性质.

例 2.2.3. 设 $a > 1$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

pf. 设 $\sqrt[n]{a} = 1 + y_n$. 于是 $a = (1 + y_n)^n > ny_n$.

故有 $y_n < \frac{a}{n}$. 而 $y_n > 0$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. $\square$

例 2.2.4. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

pf. 设 $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$. 于是 $n = (1 + y_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} y_n^2$.

故有 $y_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{2}{\varepsilon^2}] + 2, \dots \square$.

• 证: $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow +\infty$) 取对数: $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

要证 $\forall k > 0, \frac{\ln n}{n^k} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 即证 $\sqrt[n^k]{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

$n = (1 + y_n)^{n^k} > \frac{n^k(n^k-1)\dots(n^k-m+1)}{m!} y_n^m$

$\Rightarrow y_n^m < \frac{m! \cdot n}{n^k \dots (n^k - m + 1)} \rightarrow 0$. 即得.



例 2.2.6 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.

pf. $\forall \varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}^+$, s.t. $\forall n > N$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

记 $M = \max_{1 \leq k \leq N} |a_1 + a_2 + \dots + a_N - Na|$. 于是: $|\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a|$

$$\leq \frac{|a_1 + \dots + a_N - Na|}{n} + \frac{n-N}{n} \cdot \frac{1}{n} (|a_{N+1} - a| + |a_{N+2} - a| + \dots + |a_n - a|)$$

$$\leq \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{取 } N' = \max \{N, \lceil \frac{2M}{\varepsilon} \rceil\}. \quad \forall n > N': \quad < \varepsilon. \quad \square.$$

收敛数列的性质: 极限唯一, 有界, 保序, 夹逼 (迫敛),

例 2.2.8 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n)^{\frac{1}{n}} = \max_{1 \leq i \leq p} \{a_i\}$

pf. 用夹逼. 不妨 $a = \max_{1 \leq i \leq p} \{a_i\}$. 于是: $(a^n)^{\frac{1}{n}} \leq \sim \leq (na^n)^{\frac{1}{n}}$.

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (na^n)^{\frac{1}{n}} = a. \quad \square.$$

极限的四则运算. (定理 2.2.5). 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

$$(1). \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b.$$

$$\text{pf. } |\alpha x_n + \beta y_n - \alpha a - \beta b| \leq |\alpha| |x_n - a| + |\beta| |y_n - b| < (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon.$$

$$(2). \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab.$$

$$\text{pf. } |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n| |y_n - b| + |b| |x_n - a| < (M + |b|) \varepsilon.$$

$$(3). \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

$$\text{pf. } \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{x_n b - y_n a}{b y_n} \right| \leq \frac{2}{b^2} \cdot (|x_n - a| \cdot |b| + |y_n - b| \cdot |a|). \quad \square.$$

例 2.2.12 设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$.

pf. $H_n \leq G_n \leq A_n$. 由 [例 2.2.6], $A_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$.

$$\text{而 } H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n}{n}$$

$$= 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad \text{夹逼得.} \quad \square.$$



§ 2.3: 无穷大量.

设: $x_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 但 $\{x_n\}$ 极限为 $+\infty$.

定理 2.3.1 设 $x_n \neq 0$. $\{x_n\}$ 是无穷大量 $\Leftrightarrow \{\frac{1}{x_n}\}$ 是无穷小量.

证 1° 当 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } \forall n > N, |x_n| > G$.

此时 $|\frac{1}{x_n}| < \frac{1}{G}$. 2° 当 $\{\frac{1}{x_n}\}$ 是无穷小量, $\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } \forall n > N,$

$|\frac{1}{x_n}| < \frac{1}{G}$. 此时 $|x_n| > G$. $\square$.

定理 2.3.2 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 若当 $n > N_0$ 时, $|y_n| \geq \delta > 0$ 成立.

则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷大量.

证. $\forall G > 0: \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } \forall n > N, |x_n| > \frac{G}{\delta}$. 而 $|y_n| \geq \delta$.

故 $|x_n y_n| > G$. $\square$.

定理 2.3.3 (Stolz 定理) 设 $\{y_n\}$ 是严格单调增加的正无穷大量,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ ($a \in [-\infty, +\infty]$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

证 先证 $a=0$. 此时 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } \forall n > N, |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon (y_n - y_{n-1})$.

我们让 $y_N > 0$. 于是 $|x_n - x_N| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{N+1} - x_N|$

$< \varepsilon (y_n - y_N) < \varepsilon y_n$. 即: $|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_N}{y_N}| < \varepsilon$. $|\frac{x_n}{y_n}| < \varepsilon + |\frac{x_N}{y_N}| < 2\varepsilon$.

当 $a \neq 0$ 而为有限数时, 取 $x'_n = x_n + a y_n$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n - x'_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 0$.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n + a y_n}{y_n} = a$. 最后证 $a = +\infty$. ($-\infty$ 同理).

此时 $x_n - x_{n-1} > 0$. $\{x_n\}$ 为严格单调增加的正无穷大量, 于是

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

$-\infty$: 令 $x'_n = -x_n$. 即得. $\square$.



§ 2.4 收敛数列. (五个判定定理), 两个重要极限.

确界存在定理 $\Rightarrow$ 单调有界数列收敛定理 (2.4.1) $\Rightarrow$ 闭区间套定理 (2.4.2)

$\Rightarrow$ Bolzano - Weierstrass 定理 (2.4.5) $\Rightarrow$ Cauchy 收敛原理 (2.4.7)

Cauchy 收敛原理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理 $\Rightarrow$ 确界存在定理 (定理 2.4.8).

定理 2.4.1 单调有界数列必定收敛.

证. 设 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界. 则记 $a = \sup \{x_n\}$.

于是: $\forall n, x_n \leq a$; $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon$. 于是 $\forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon$. $\square$.

例 2.4.5 (证). 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

证. $\exists x \rightarrow 0^+$: 用 $\sin x < x < \tan x$. $|1 - \frac{\sin x}{x}| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$
 $= 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{1}{2} x^2$. $\square$.

例 2.4.6 证明: 数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调增加, $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 单调减少, 两者收敛于同一极限.

证. 由 A-G 不等式: $\frac{n(1+\frac{1}{n}) + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n \cdot 1}$. 即 $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$.
 $\frac{(n+1) \cdot \frac{n}{n+1} + 1}{n+2} > \sqrt[n+2]{(\frac{n}{n+1})^{n+1} \cdot 1}$. 即 $(\frac{n+1}{n+2})^{n+2} > (\frac{n}{n+1})^{n+1}$, $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$
 而 $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^{n+1} < 4$ 故二者均收敛. 而 $y = x \cdot (1+\frac{1}{n}) \Rightarrow x = y$ $\square$.

注: 记 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})^n = 2.718281828 \dots$

定义 2.4.1 如果一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件

(1). $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \dots$;

(2). $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

则称这列闭区间形成一个闭区间套.



定理 2.4.2 如果 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 则存在唯一的实数 ξ

属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$, 且 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

证. 由于 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$: $a_{n+1} \geq a_n$. 而 $a_n \leq b_n \leq b_1$.

故 $\{a_n\}$ 单调增加且有上界. 记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. 同理 $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

$b - a = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. 故 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 属于所有闭区间.

惟一性: 若 $\exists \xi' \neq \xi$. 则不妨 $\xi < \xi'$. 则 $b_n - a_n \geq \xi' - \xi!$ $\square$.

定理 2.4.4 的推论: 若存在数列 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$,

分别收敛于不同的极限, 则数列 $\{x_n\}$ 必定发散.

定理 2.4.5 (Bolzano - Weierstrass 定理). 有界数列必有收敛子列.

证. 设 $\{x_n\}$ 有界. 于是 $\exists a_1, b_1$: $x_n \in [a_1, b_1]$ 对任意 n 成立.

取 $n_1 = 1$. 而在 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 与 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ 中, 存在一个包含 $\{x_n\}$ 的

无穷多项. 记为 $[a_2, b_2]$. 取 $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$. 如此进行, 形成一个闭区间套.

而总存在 x_{n_k} . 设 ξ 为该闭区间套确定的值. 于是有:

$$|x_{n_k} - \xi| \leq |a_k - b_k| = \frac{1}{2^{k-1}} (b_1 - a_1). \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi. \quad \square$$

注: 对无界数列, 存在无穷子列. 取 $|x_{n_k}| > k$ 即可.

定义 2.4.3 称数列 $\{x_n\}$ 是一个基本数列, 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,

存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 使得当 $n, m > N$ 时成立 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

定理 2.4.7 (Cauchy 收敛原理) $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{x_n\}$ 是基本数列.

(这里要注意的是, Cauchy 收敛原理揭示了实数系的完备性,

其在 $\mathbb{Q}$ 中将不再成立).



西安交通大学

中国 西安 710049

Xi'an Jiaotong University
Xi'an 710049, P.R. China

证. 当 $\{x_n\}$ 收敛. 此时 $\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } \forall n > N, |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

故有 $|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon$.

当 $\{x_n\}$ 是基本数列: $\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}^+, |x_m - x_{N+1}| < \varepsilon/2$

于是 $\forall n > N: x_n \in (x_{N+1} - \frac{\varepsilon}{2}, x_{N+1} + \frac{\varepsilon}{2})$. 有界. 由 Bolzano - Weierstrass

定理, 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\} \xrightarrow{x}$ 于是当 $n > N'$, $|x_m - x| \leq |x_m - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$.

定理 2.4.8 实数系的完备性 $\Leftrightarrow$ 实数系的连续性.

证. " $\Leftarrow$ " 已完成. 证 " $\Rightarrow$ ".

1° Cauchy 收敛原理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0: \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 此时 $n, m > N, |b_n - b_m|$

$|a_n - a_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$. 故 $\{a_n\}$ 为基本数列. 由 Cauchy 收敛原理, 收敛.

因此 $\{b_n\}$ 收敛. 于是得到 ξ .

2° 闭区间套定理 $\Rightarrow$ 确界存在定理.

设 $S \subset \mathbb{R}$ 非空有上界. Γ 为 S 的上界. 证 Γ 有最小元.

取 $a_1 \in \Gamma, b_1 \in \Gamma$. 对 $f \frac{a_1+b_1}{2}, [a_2, b_2] = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] (\frac{a_1+b_1}{2} \in \Gamma), [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$.

于是得到 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$.

故而确定了 ξ . 证 ξ 为 Γ 中最小元. 1° $\xi \in \Gamma$. 则 $\exists x \in S, \xi < x$.

而当 n 充分大, $b_n < x$. 这与 $b_n \in \Gamma$ 矛盾. 2° $\exists \eta < \xi, \eta \in \Gamma$.

则 $\exists n$ 充分大, $a_n > \eta$. 这与 $a_n \in \Gamma$ 矛盾. 于是 ξ 为 $\sup S$.

综合 1° 2° 证毕.

$\square$.



§ 3.1 函数极限及其性质

性质: 唯一性、局部保序性、夹逼性、四则运算 (均与数列类似)。

定理 3.1.5 (Heine 定理) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是: 对任意满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 且 $x_n \neq x_0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 的数列 $\{x_n\}$, 相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

pf. 先证必要性. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta), f(x) \in U(A, \varepsilon)$. 而对 $\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N$ 有 $|x_n - x_0| < \delta$. 即得.

再证充分性: 用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时不收敛于 A .

即: $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \dot{U}(x_0, \delta), |f(x) - A| \geq \varepsilon$. 故可取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, 存在 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 则 $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) 而 $f(x_n) \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) 不成立. $\square$.

定理 3.1.6 (Cauchy 收敛准则) 函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是: 对于任给的 $\varepsilon > 0, \exists X > 0$, s.t. $\forall x', x'' > X, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

pf. 先证必要性. 设 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow +\infty$). 则 $\exists X > 0, \forall x > X, |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 故有 $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon$.

再证充分性. 取 $x_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). 则 $\{f(x_n)\}$ 为基本列, 收敛.

若 $\exists x_n', x_n'' \rightarrow +\infty$, 则使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'')$.

则取 $x_n = \begin{cases} x_{2k-1}', & n=2k-1 \\ x_{2k}'', & n=2k \end{cases}$. 则 $x_n \rightarrow +\infty$ 而 $f(x_n)$ 发散. 这与 $\{f(x_n)\}$ 收敛矛盾! 得证.

注: 在极限未明确给出时, 可用 Heine 定理的另一表述 (定理 3.1.5').

其充分性的证明与此相似



§3.2 连续、间断、反函数与复合函数的连续性.

定义 3.2.4 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且在左端点 a 右连续, 在右端点 b 左连续, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

不连续点 (间断点):

第一类间断点 (跳跃 ~): $f(x^-)$ 与 $f(x^+)$ 存在但不相等.

第二类间断点: $f(x^-)$ 与 $f(x^+)$ 至少一个不存在.

第三类间断点: $f(x^+) = f(x^-)$, 但与 $f(x)$ 不相等或 $f(x)$ 无定义. (可去 ~)

定理 3.2.1 (反函数存在性定理) 若函数 $y = f(x)$, $x \in D_f$ 是严格单调增加 (减少) 的, 则存在它的反函数 $x = f^{-1}(y)$, $y \in R_f$, 并且 $f^{-1}(y)$ 也是严格单调增加 (减少) 的.

证. 对 $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. 于是逆推 ~, 反函数存在. 而对 f $y_1 < y_2$,

$x_1 > x_2$ 与 $x_1 = x_2$ 均不行, 故 $x_1 < x_2$. $\square$.

定理 3.2.2 (反函数连续性定理) 设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调增加, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. 则它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续且严格单调增加.

证. 我们先证 f^{-1} 在 $[\alpha, \beta]$ 上有定义. 即 $\forall r \in (\alpha, \beta)$, $\exists f(x_0) = r$.

设 $S = \{x \mid f(x) < r\}$. 记 $x_0 = \sup S$. 我们证 $f(x_0) = r$. 若 $f(x_0) < r$,

则 $\exists f(x_0) < r$. 则 x_0 不为上界. 若 $f(x_0) > r$. 则 $f(x_0) > r$. x_0 不为最小.

于是 $f(x_0) = r$. 这就说明了 f^{-1} 在 $[\alpha, \beta]$ 有定义. 连续: $\forall \varepsilon > 0$, $f(x_0) = y_0$.

$y_1, y_2 = f(x_0 \pm \varepsilon)$, $f(x_0 \pm \varepsilon)$. 取 $\delta = \min \{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$. 即证. $\square$.



定理 3.2.3 若 $u = g(x)$ 在点 x_0 处连续, $g(x_0) = u_0$. 又 $y = f(u)$ 在点 u_0 连续, 则 $y = f \circ g(x)$ 在点 x_0 连续.

证. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, s.t. $\forall u \in U \cap U_0 \quad \forall |u - u_0| < \eta, \quad |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$.

而 $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall |x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| = |u - u_0| < \eta$. $\square$.

注: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 不能得出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = A$.

反例: $y = f(u) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ 1, & u \neq 0 \end{cases}, \quad u = g(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 而 $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x)$ 不存在.

§3 无穷小与无穷大的阶.

定义 3.3.1 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是 无穷小量 ($o(1)$)

记 $u(x), v(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时是无穷小量.

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$. 即当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x)$ 是关于 $v(x)$ 的高阶无穷小. $u(x) = o(v(x))$

2). $|\frac{u(x)}{v(x)}| \leq A$: 有界. $u(x) = O(v(x))$. $a \leq |\frac{u(x)}{v(x)}| \leq A$: 同阶.

3). $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$. 等价无穷小. $u(x) \sim v(x)$ 或 $u(x) = v(x) + o(v(x))$.

定义 3.3.2 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty (\pm\infty)$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是 无穷大量.

1). $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \infty$. 高阶无穷大.

2). $|\frac{u(x)}{v(x)}| \leq A$: $u(x) = O(v(x))$. $a \leq |\frac{u(x)}{v(x)}| \leq A$: 同阶.

3). $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$. 等价无穷大. $u(x) \sim (v(x))$

等价量: 等价无穷小量或等价无穷大量. 可以在乘除中替换.

常用等价量: ($x \rightarrow 0$ 时) $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^a \sim 1+ax$, $\sin x \sim x$.



§ 3.4 闭区间上的连续函数.

定理 3.4.1 (有界性定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则它在 $[a, b]$ 上有界。

证. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界. 则在 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 与 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 上至少一个无界.

记为 $[a_1, b_1]$. 由此得到 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套. 则 ξ 在所有的闭区间中.

由于 $f(x)$ 在 ξ 处连续, 则 $\exists \delta > 0, M > 0$, s.t. $|f(x)| < M$ 在 $U(\xi, \delta)$ 上成立.

这就是说, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, s.t. $\forall n > N, [a_n, b_n]$ 上有界. 矛盾!

定理 3.4.2 (最值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则它在 $[a, b]$ 上

必能取到最大值与最小值, 即存在 ξ 和 $\eta \in [a, b]$, 对于一切 $x \in [a, b]$ 成立

$$f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta).$$

证. 我们证明存在最大值. 最小值同理. 记 $\beta = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

于是取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ ($n = [\frac{1}{\beta-a}] + 1, \dots$). 则对应地 $\exists x_n$, s.t. $f(x_n) > \beta - \varepsilon_n$.

这些 x_n 组成序列 $\{x_n\}$, 其有界. 由 Bolzano - Weierstrass 定理, 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$.

记 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$). 对应地, $f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \beta$. $\square$.

定理 3.4.3 (零点存在定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$,

则一定存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

证. 设 $f(a) < 0, f(b) > 0$. 又设 $\xi = \sup \{x \mid f(x) < 0\}$. 证 $\xi \in (a, b)$ 且 $f(\xi) = 0$.

首先, $\xi \neq a$, 由于 $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (a, a+\delta), f(x) < \frac{1}{2}f(a)$. 同理 $\xi \neq b$.

故 $\xi \in (a, b)$. 而若 $f(\xi) < 0$: $\exists \xi' > \xi, f(\xi') < 0$. 若 $f(\xi) > 0$, 则 $\exists \xi' < \xi$

作为上界. 均矛盾! $\square$.

推论: 中间值定理 (介值定理).



§ 4.1 微分和导数.

定义 4.1.1 对函数 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0 , 若存在一个只与 x_0 有关, 而与 Δx 无美的数 $g(x_0)$, 使得当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时恒成立关系式 $\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处的微分存在, 或称 $f(x)$ 在 x_0 处可微.

定义 4.1.2 若函数 $y = f(x)$ 在其定义域中的一点 x_0 处极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$.

定理 4.1.1 函数 $y = f(x)$ 在 x 处可微的充分必要条件是它在 x 处可导.

证. 先证必要性. 可微即 $\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x_0)$.

充分性: 可导即 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$ ($\Delta x \rightarrow 0$). 即 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. $\square$.

§ 4.2 单值函数.

§ 4.3: 四则运算, 反函数求导法则.

四则运算, $[c_1 f(x) + c_2 g(x)]' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$.

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

定理 4.3.4 (反函数求导定理) 若函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 严格单调,

可导并且 $f'(x) \neq 0$, 记 $\alpha = \min(f(a+), f(b-))$, $\beta = \max(f(a+), f(b-))$, 则它的

反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 (α, β) 上可导, 并且 $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$.

证. 由反函数存在定理, $f^{-1}(y)$ 在 (α, β) 上连续且严格单调. 由 $\Delta x \neq 0$ 得 $\Delta y \neq 0$.

故 $[f^{-1}(y)]' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(x)}$. $\square$.



§ 4.4: 复合函数求导法则.

定理 4.4.1 (复合函数求导法则) 设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 可导, 而函数

$y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $y = f \circ g(x)$ 在 $x = x_0$ 可导, 并且

$$[f(g(x))]_{x=x_0}' = f'(u_0) g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

证 由于可导等价于可微, 我们得到, 在 $x = x_0$ 附近, $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = o(\Delta x)$:

$$\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = f'(u_0) \Delta u + o(\Delta u). \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x}.$$

$$f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = f'(u_0) \Delta u + o(\Delta u). \quad \text{其中 } \lim_{\Delta u \rightarrow 0} o = 0. \text{ 规定 } o = 0 \text{ (当 } \Delta u = 0 \text{),}$$

$$\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0). \quad \text{则: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0. \text{ 故 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} o = 0.$$

$$\text{故有 } [f(g(x))]_{x=x_0}' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f'(u_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + o \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = f'(u_0) g'(x_0) \quad \square.$$

§ 4.5: 高阶导数.

$$\text{线性性: } [c_1 f(x) + c_2 g(x)]^{(n)} = c_1 f^{(n)}(x) + c_2 g^{(n)}(x).$$

定理 4.5.2 (Leibniz 公式) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 n 阶可导函数, 则它们的积

$$\text{函数也 } n \text{ 阶可导, 且成立公式 } [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

$$\text{证. 用数学归纳法. 当 } n=1 \text{ 时, } [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

$$\text{若当 } n=k \text{ 时成立, 即 } [f(x) \cdot g(x)]^{(k)} = \sum_{k=0}^k C_k^k f^{(k-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

$$\text{则当 } n=m+1 \text{ 时: } [f(x) \cdot g(x)]^{(m+1)} = [f(x) \cdot g(x)]^{(m)'} = \sum_{k=0}^m C_m^k [f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x)]'$$

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k [f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(m-k)}(x) g^{(k+1)}(x)] = f^{(m+1)}(x) g(x) + f(x) g^{(m+1)}(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^m (C_m^k + C_m^{k-1}) \cdot f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k f^{(m+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

由上待证. □



§ 5.1: Fermat 引理, Rolle 定理, Lagrange 中值定理与应用, Cauchy 中值定理.

定义 5.1.1 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上有定义, $x_0 \in (a, b)$, 如果存在点 x_0 的某一个邻域

$O(x_0, \delta) \subset (a, b)$, 使得 $f(x) \leq f(x_0)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点,

$f(x_0)$ 称为相应的极大值. 极大 $\sim$ 和 极小 $\sim$ 统称为极.

定理 5.1.1 (Fermat 引理) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个极值点, 且 $f(x)$ 在 x_0 处导数存在, 则 $f'(x_0) = 0$.

证. 不妨设 x_0 是极大值点. 于是在 $U(x_0, \delta)$ 内, 当 $x < x_0$,

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$; 当 $x > x_0$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. 于是,

$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, $f'_+(x_0) \leq 0$. 故 $f'(x_0) = 0$. $\square$.

定理 5.1.2 (Rolle 定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证. 由定理 3.4.2, f 在 $[a, b]$ 上有最值. 若最大值与最小值均为 $f(a)$.

则 $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) = 0$. 否则, 存在极值点 ξ . 于是 $f'(\xi) = 0$.

定理 5.1.3 (Lagrange 中值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

证. 作辅助函数 $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, 用 Rolle 定理即得.

定理 5.1.4 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导且有 $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上为常数.

证. $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$. 由 x_1, x_2 任意性得证.

定理 5.1.5 (一阶导数与单调性的关系) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在 I 上单调增加的充分必要条件是: 对于任意 $x \in I$ 有 $f'(x) \geq 0$;



特别地, 若对于任意 $x \in I$ 有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加.

证. 充分性: 对于 $x_1 < x_2 \in I$, $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. 即得.

必要性: $\forall x' \neq x \in I$: $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$. $\square$.

定理 5.1.9 (Cauchy 中值定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上

可导, 且对于任意 $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$. 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

证. 作辅助函数. $h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$. 由 Rolle 定理. $\square$

§5.2: L'Hospital 法则.

定理 5.2.1 (L'Hospital 法则) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a, a+d]$ 上可导 (d 是某个正

常数), 且 $g'(x) \neq 0$. 若此时有 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$.

且 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (可以是 ∞), 则成立 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

证. 我们证 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 为有限数的情况. 先证 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$.

此时规定 $f(a) = g(a) = 0$. 在 $(a, a+d)$ 上用 Cauchy 中值定理: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

于是 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. 再证 $g(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow a^+)$.

$$\begin{aligned} \text{取 } x_0 \in (a, a+d]. \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| &= \left| \frac{f(x) - Ag(x)}{g(x)} \right| = \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| \cdot \left| \frac{f(x) - Ag(x)}{g(x) - g(x_0)} \right| \\ &= \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| \cdot \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A + \frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| \leq \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| \cdot \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| + \left| \frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)} \right|. \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \text{ s.t. } \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| < 2, \quad \left| \frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{取 } x_0 = a + \rho. \text{ 于是 } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < 2 \times \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square.$$



§ 5.3 Taylor 公式.

定理 5.3.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域中的任意 x , 成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x)$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足 $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

证. 即证 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n}{(x-x_0)^n} = 0$. 由于 $r_n^{(n)}(x_0) = 0$ 而 $[(x-x_0)^n]^{(n)} \neq 0$.

用 n 次 L'Hospital 法则得证. $\square$.

定理 5.3.2 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 n 阶连续导数, 且在 (a, b) 上有 $n+1$ 阶导数, 设 $x_0 \in [a, b]$ 为一定点, 则对于任意 $x \in [a, b]$ 成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x).$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足 $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 在 x 和 x_0 之间.

证. 证明十分巧妙.

证. 作辅助函数 $g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$, $h(t) = (x-t)^{n+1}$.

于是, $g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$, $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$.

故 $\frac{g(t)}{h(t)} = \frac{g(t) - g(x_0)}{h(t) - h(x_0)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. $r_n(x) = g(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \square$.



§9.1 数项级数.

定理 9.1.1 (级数收敛的必要条件) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则其通项所构成的数列 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

证. 令 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$. $\square$

定理 9.1.2 (线性性) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. α, β 是两个常数. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$

证. 设 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, $T_n = \sum_{i=1}^n b_i$. 于是 $S'_n = \alpha S_n + \beta T_n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \alpha A + \beta B$. $\square$

定理 9.1.3 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛, 且其和不变.

证. 加括号后: $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n_1}) + (x_{n_1+1} + \dots + x_{n_2}) + \dots + (\dots + x_{n_k}) + \dots$

设 $y_k = x_{n_{k-1}+1} + \dots + x_{n_k}$. 于是对于 $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$, 其部分和数列 $\{y_k\}$ 满足:

$y_1 = S_{n_1}$, $y_2 = S_{n_2}$, $\dots$, $y_k = S_{n_k}$, $\dots$. 于是 $\{y_k\}$ 为 $\{S_n\}$ 子列. 收敛. $\square$

注: 反之并不成立, 由于子列收敛不蕴含原数列收敛.

例 9.1.9 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$.

解: 由于 $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$.

取 $x = 2n+1$, $y = 2n-1$, 即得 $\arctan \frac{1}{2n^2} = \arctan (2n+1) - \arctan (2n-1)$.

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan (2n+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

注: 一个有趣的问题. 三角函数类引以裂项.



§ 9.2 上极限与下极限.

定义 9.2.1 在有界数列 $\{x_n\}$ 中, 若存在它的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$.

则称 ξ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个极限点.

定理 9.2.1 设 $E = \{\xi \mid \xi \text{ 是 } \{x_n\} \text{ 的极限点}\}$. 则 $\sup E = \max E$, $\inf E = \min E$.

证. 设 $H = \sup E$. 取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则存在 ~~某~~ 子列 $\{x_{n_k}^{(n)}\}$, 使得其收敛于大于 $H - \varepsilon_n$ 而小于等于 H 的值. 在 $\{x_{n_k}^{(n)}\}$ 中取 x_{k_n} 使 $x_{k_n} > H - 2\varepsilon_n$.

于是 $\{x_{k_n}\}$ 收敛于 H . 即 $H \in E$. 同理 $\inf E \in E$. $\square$.

定义 9.2.2 $H = \max E$ 称为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记为 $H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 下极限同.

定理 9.2.2 设 $\{x_n\}$ 是有界数列, 则 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

证. 设 $\{x_n\}$ 收敛. 则其任一子列都收敛于同一值, 故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

若 $\{x_n\}$ 不收敛, 则存在 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 不收敛于同一值. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ $\square$.

定理 9.2.3 设 $\{x_n\}$ 是有界数列, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = H$ 的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$,

(i) $\exists N \in \mathbb{N}^+$, s.t. $\forall n > N$, $x_n < H + \varepsilon$. (ii) $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $x_n > H - \varepsilon$.

证. 当 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = H$ 时: 反设 (i) 不成立, 则 $\exists \{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \rightarrow H + \varepsilon_0$.

~~反设 (ii) 不成立~~ 对子列 $x_{n_k} \rightarrow H$, 则 (i) 必成立. 当 (i) (ii) 成立时:

若 $x_{n_k} \rightarrow H' > H$. 取 $\varepsilon = H' - H$, 矛盾! 而取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, (ii) 给出 $\exists \{x_{n_k}\} \rightarrow H$ $\square$.

例 9.2.2 本数列 $\{x_n = n^{(-n)}\}$ 的上极限与下极限.

解. 由于 $\{x_{2n}\} \rightarrow +\infty$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

而 $x_n > 0$, 故 $\{x_{n-1}\} \rightarrow 0$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.



§ 9.3 正项级数.

定义 9.3.1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的各项都是非负实数, 即 $x_n \geq 0, n=1, 2, \dots$, 则称此级数为正项级数.

定理 9.3.1 (正项级数的收敛原理) 正项级数收敛的充分必要条件是它的部分和数列有上界.

pf. 由单调有界数列必有极限直接得出.

定理 9.3.2 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两个正项级数, 若存在常数 $A > 0$, 使得 $x_n \leq A y_n, n=1, 2, \dots$, 则

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛;

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也发散.

pf. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列为 $\{s_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和数列为 $\{t_n\}$. 则显见 $s_n \leq A t_n$. 于是: $\{t_n\}$ 有上界 $\Rightarrow \{s_n\}$ 有上界, 及收敛. $\square$.

注: 条件可放宽为 $\exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } \forall n > N, x_n \leq A y_n$.

定理 9.3.2' (比较判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两个正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \quad (0 \leq l \leq +\infty)$, 则:

(1) 若 $0 \leq l < +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛;

(2) 若 $0 < l \leq +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也发散.

所以当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 同时收敛或发散.

pf. (1). 此时当 $n > N$: $\frac{x_n}{y_n} < l+1$. 由定理 9.3.2 即得.

(2). 此时当 $n > N$: $\frac{x_n}{y_n} > \frac{1}{2}$. 于是得. $\square$.



定理 9.3.3 (Cauchy 判别法, 方根判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数, $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$. 则

(1) 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛; (2) 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

(3) 当 $r = 1$ 时, 判别法失效, 即级数可能收敛, 也可能发散.

证. 当 $r < 1$ 时, 取 $q = \frac{1+r}{2}$. 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$ 有 $\sqrt[n]{x_n} < q$.

于是 $x_n < q^n$. 收敛. 当 $r > 1$ 时, 存在无穷多 n , s.t. $\sqrt[n]{x_n} > 1$. 与 $x_n \rightarrow 0$ 矛盾! $\square$

定理 9.3.4 (d'Alembert 判别法, 比率判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ($x_n \neq 0$) 是正项级数.

(1) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = F < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

(2) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

(3) 当 $F \geq 1$ 或 $L \leq 1$ 时, 判别法失效.

证. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = F < 1$. 则 $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1+F}{2}$. 即有

$x_n < x_N \cdot \left(\frac{1+F}{2}\right)^{N-n}$. 于是得收敛. (2) 同理. $\square$

定理 9.3.5 (Raabe 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ($x_n \neq 0$) 是正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = r$.

(1) 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. (2) 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

证. 设 $s > t > 1$. $f(x) = 1 + sx - (1+x)^t$. $f(0) = 0$ 而 $f'(0) = s - t > 0$. 故 $\exists \delta > 0$,

当 $0 < x < \delta$ 时成立 $1 + sx > (1+x)^t$. 故当 $r > 1$ 时, 取 $t > s > 1$. 对充分大 n ,

$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{s}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^t = \frac{(1+n)^t}{n^t}$. 于是 $n^t x_n > (n+1)^t x_{n+1}$. 故 $n^t x_n \leq A$

且 $x_n \leq \frac{A}{n^t}$. 收敛. 当 $r < 1$ 时: $\frac{x_n}{x_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$. 故 $n x_n > d$.

于是 $x_n > \frac{d}{n}$. 发散. $\square$

注: Raabe 判别法可处理 d'Alembert 判别法失效, 但其也会失效.

可以建立更有效的判别法 (如 Bertrand 判别法), 从略.



定理 9.3.6 (积分判别法) 设 $f(x)$ 定义于 $[a, +\infty)$, 并且 $f(x) \geq 0$. 进一步设 $f(x)$ 在任意有限区间上 Riemann 可积. 取一单调无穷数列 $\{a_n\}$: $a = a_1 < a_2 < \dots$ 令 $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx$. 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散于 $+\infty$, 且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx$. 特别地, 当 $f(x)$ 单调减少时, 取 $a_n = n$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与正项级数 $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ ($N = [a] + 1$) 同时收敛或同时发散.

pf. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$. 则 $\forall A > a, \exists n, \text{ s.t. } a_n \leq A \leq a_{n+1}$.

于是 $S_{n-1} \leq \int_a^A f(x) dx \leq S_n$. 故二者同敛散: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \int_a^{+\infty} f(x) dx$.

而当 $f(x)$ 单调减少时: 取 $a_n = n$. 则 $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$. $\square$.

§ 9.4 任意项级数.

定理 9.4.1 (级数的 Cauchy 收敛原理) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛的充分必要条件是:

对任意给定的 ε , 存在 $N \in \mathbb{N}^+$, s.t. $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m| = |\sum_{k=n+1}^m x_k| < \varepsilon$

对一切 $m > n > N$ 成立. ($m = n+1$ 时即 9.1.1)

定义 9.4.1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ ($u_n > 0$), 则称此级数为交错级数.

进一步, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ ($u_n > 0$) 满足 $\{u_n\}$ 单调减少且收敛于 0, 则称这样的交错级数为 Leibniz 级数.

定理 9.4.2 (Leibniz 判别法) Leibniz 级数必定收敛.

pf. $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| = |u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^{p+1} u_{n+p}| \leq |u_{n+1}|$ (倚倚讨论)

而 $u_{n+1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 由 Cauchy 收敛原理得. $\square$.



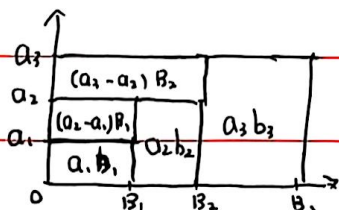
引理 9.4.1 (Abel 变换) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两数列, 记 $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$ ($k=1, 2, \dots$),

$$\text{证: } \sum_{k=1}^p a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

$$\begin{aligned} \text{证: } \sum_{k=1}^p a_k b_k &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^p a_k B_k - \sum_{k=2}^p a_k B_{k-1} = \sum_{k=1}^p a_k B_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k+1} B_k + a_p B_p \\ &= a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k. \quad \square. \end{aligned}$$

注: Abel 变换是离散形式的分部积分.

图示如下:



引理 9.4.2 (Abel 引理) 设 $\{a_k\}$ 单调, $\{B_k\}$ 有界 (M), 则成立 ($B_k = \sum_{i=1}^k b_i$)

$$\left| \sum_{k=1}^p a_k b_k \right| \leq M (|a_1| + 2|a_p|).$$

$$\text{证: 用 Abel 变换: } \sum_{k=1}^p a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

$$\text{故有 } \left| \sum_{k=1}^p a_k b_k \right| \leq M \cdot |a_p| + M \cdot \sum_{k=1}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| \leq M \cdot |a_p| + M (|a_1| + |a_p|) \quad \square.$$

定理 9.4.3 (级数的 A-D 判别法) 若下列条件之一满足, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(1). (Abel 判别法) $\{a_n\}$ 单调有界, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(2). (Dirichlet 判别法) $\{a_n\}$ 单调趋于 0, $\left\{ \sum_{i=1}^n b_i \right\}$ 有界.

证: (1) 若 Abel 判别法条件满足, 设 $|a_n| \leq M$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } \forall n > N \text{ 和 } p \in \mathbb{N}^+, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \varepsilon. \text{ 对 } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \text{ 用 Abel 引理:}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \varepsilon (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 3M\varepsilon.$$

(2). 若 Dirichlet 判别法条件满足, 设 $\left| \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq M, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t.}$

$$\forall n > N \text{ 有 } |a_n| < \varepsilon. \text{ 而 } \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{n+p} b_i \right| \leq 2M. \text{ 用 Abel 引理:}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq 2M (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 6M\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理得证. □.



定义 9.4.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为绝对收敛级数. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为条件收敛级数.

定理 9.4.4 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都发散到 $+\infty$. ($x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$, $x_n^- = \min\{x_n, 0\}$)

证. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛. 于是 $0 \leq x_n^+ \leq |x_n|$, $0 \leq x_n^- \leq |x_n|$. 比较判别法.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^+ - x_n)$ 收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^+ + x_n^-)$ 收敛. 矛盾! $\square$.

定理 9.4.5 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛, 则它的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k}$ 也绝对收敛, 且和不变, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

证. 先证 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为正项级数的情形. 此时 $\forall n \in \mathbb{N}^+$: $\sum_{k=1}^n x_{k_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

于是得 $\sum_{k=1}^{\infty} x_{k_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. 同理得 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_{k_k}$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_k} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

再考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为任意项级数. 此时 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 为收敛的正项级数.

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_k} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{k_k}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_{k_k}^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. $\square$.

定理 9.4.6 (Riemann) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛. 则对任意给定的 a ($-\infty \leq a \leq +\infty$), 必存在更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k} = a$.

证. 由定理 9.4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$. 于是存在: 第 n_1 个 n , 使 $x_{n_1}^+ + x_{n_2}^+ + \dots + x_{n_k}^+ > a$, $x_1^- + \dots + x_{n_1}^- - x_1^- - \dots - x_{m_1}^- < a$, $n_2, m_2, \dots$.

以此类推. 使 0 次出现在 x_i^+ 中. 则每次在 x_i^+ 与 $-x_i^-$ 中恰出现一次.

得到一个 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k}$. 其部分和在 $a + x_{n_k}^+$ 与 $a - x_{m_k}^-$ 之间.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^- = 0$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k} = a$. $\square$.



§10.3 幂级数的收敛半径,

定理 10.3.1 (Cauchy-Hadamard 定理) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < R$ 时绝对收敛,

当 $|x| > R$ 时发散. 其中 $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

证. 令 $u_n = a_n x^n$. 用数项级数的 Cauchy 审敛法, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = A$.

当 $A < 1$ 时收敛. $A > 1$ 时发散. 于是得证.

注: 区间的端点处, 即 $x = \pm R$ 时, 收敛与否应另行判断.

例 10.3.2 考察幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]^n}{n} (x-\frac{1}{2})^n$ 的收敛情况.

解. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}} = 3$. 故 $R = \frac{1}{3}$. 当 $x = \frac{5}{6}$ 时: 原级数为:

$u_n = \frac{[2+(-1)^n]^n}{n \cdot 3^n} = \begin{cases} \frac{1}{(2k-1) \cdot 3^{2k-1}}, & n=2k-1 \\ \frac{1}{2k}, & n=2k \end{cases}$. 发散. $x = \frac{1}{6}$ 亦发散. 收敛域: $(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$

定理 10.3.2 (d'Alembert 判别法) 如果对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = A$,

则此幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{A}$.

证. 使用级数的 d'Alembert 判别法即得证. $\square$.



§ 4.1 复数的概念.

定义1 (域) 设 $\mathbb{F}$ 是一个非空集合, $s, p: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的两个二元运算;

$\forall x, y \in \mathbb{F}$, 记 $s(x, y) = x + y$, $p(x, y) = x \cdot y$; 分别称 s, p 为加法和乘法, 如果

其满足下面的九条性质:

加法、乘法的结合律, 单位元, 逆元, 交换律 以及乘法对加法的左右分配律.

则称有序3元组 $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ 是一个域.

定理1 考虑 $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. 定义 $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, a_2 + b_2)$.

$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. 那么 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 是一个域. (证略)

定义2 称 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 为复数域, 其中的元素称为复数.

定理2 考虑 $\mathbb{C}$ 的子集 $\mathbb{R} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. 设 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x, 0)$, 则

1) $\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$, 2) $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1) \varphi(a_2)$ 3) φ 是双射. (证略)

定义3 称复数 $i = (0, 1)$ 为虚数单位. 对于复数 $z = a + bi = (a, b)$, 称 a 为 z 的

实部, 记为 $a = \operatorname{Re}(z)$; b 为 z 的虚部, 记为 $\operatorname{Im}(z)$. 若 $\operatorname{Im}(z) = 0$, z 为实数;

$\operatorname{Im}(z) \neq 0$, 称 z 为虚数; $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ 且 $\operatorname{Re}(z) = 0$, 称 z 为纯虚数.

§ 4.2 复数的性质.

定义1 (共轭和模) 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则: 1) 称 $a - bi$ 为 $a + bi$ 的共轭, 记为 $\overline{a + bi}$;

2) 称 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为 $a + bi$ 的模 (绝对值), 记为 $|a + bi|$.

定义2 (辐角) 设 z 是非零复数, 在坐标平面上确定点 P . z 的辐角是指以 $x+$ 为

始边, OP 为终边的有向角. $\operatorname{Arg} z$: 所有辐角. $\arg z$: 辐角主值, $[0, 2\pi) \cap \operatorname{Arg} z$



西安交通大学

中国 西安 710049

Xi'an Jiaotong University
Xi'an 710049, P.R. China

定理2 (辐角的性质) 1) 若 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 $\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z$.

2) 若 $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$. $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

3) (De Moivre 公式) 若 $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, 则 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

pf. 我们只证 2) i. 记 $z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = r_2 (\cos \beta + i \sin \beta)$.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta) = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \quad \square$$

定理3 设 $z = r^{1/n} (\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 $r > 0$, 则 z 的 n 次方根恰好有 n 个, 是

$$w_k = r^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

pf. 由代数基本定理, 应有 n 个根, 这 n 个根由 De Moivre 公式恒满足. $\square$

§4.3 复数的几何应用

定义1 (交比) 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面上的四个点, 称

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \quad \text{为 } z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ 的交比.}$$

例3 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面上的四个点, 则

1) z_1, z_2, z_3, z_4 共线 $\iff [z_1, z_2; z_3, z_4]$ 和 $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 都是实数.

2) z_1, z_2, z_3, z_4 共圆 $\iff$ 交比 $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ 为实数且 $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 为虚数.

pf. 考虑辐角关系即可.

§4.4 复数的代数应用

带余除法, 因式定理, 因式分解定理, 部分分式定理.