【少学组】数学 II 高数部分复习资料

少学组数学 II 资料编写组

2025-05-14

前言

本复习笔记编写工作始于 2025 年 5 月 1 日前后，主要针对于 2024-2025 学年下半学期预科二数学教学计划的改变而编写，即主要针对于工科数学分析的部分内容。**基于陈虎民老师在课堂上的说法（并不一定准确），本部分的考试难度并不会很高，以基础题为主；本资料针对数列、函数极限，一元函数微分学两个章节编写，难度稍高于课堂内容，熟练掌握本资料知识点、习题可保证考试过关**。

本笔记主要包括了工科数学分析中极限与一元函数微分学两个章节的相关知识及习题。其中，极限部分由刘易鑫同学编写，一元函数微分学部分由安平一同学编写，张云泽、王子涵两位同学对复习资料进行审核工作。希望这本复习资料能够有效帮助到同学们的复习，并在期末考试中取得自己满意的成绩。也欢迎同学们对资料中的疏漏之处批评指正。

愿此行，终抵群星。

2025 年 5 月 13 日
少学组数学 II 资料编写组

Contents

第一章 极限

极限是高等数学的核心概念之一，也是微积分理论的基石，这一概念的引入使我们能够更精确地刻画“无限接近”“趋于某值”等动态过程. 无论是数列的极限还是函数的极限，其本质都在于探索变量在某种变化过程中的最终趋势. 本章将主要讨论极限的定义、存在性、相关性质及计算等方面的内容.

1.1 数列极限

1.1.1 数列极限的定义 德国数学家 Weierstrass 最早通过 $\varepsilon - N$ 语言给出了数列极限的严格定义. 需要强调的是，Weierstrass 的极限定义对数列极限中“两个无限”和接近程度“要多小就多小”进行了严格的刻画，同学们需要特别注意这一点以避免概念定义上的错误.

例 1 判断以下说法能否作为数列 a_n 的极限是 A 的定义:

1. 对于无穷多个 $\varepsilon>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时，恒有 $\left|a_n - A\right| < \varepsilon$.

2. 对任给的 $m \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时，恒有 $\left|a_n - A\right| < \dfrac{1}{m}$.

3. 对任给的 $\varepsilon>0$ 和正整数 n, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时，恒有 a_n 使 $\left|a_n - A\right| < \varepsilon$ 成立.

4. 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \geq N$ 时，有无限多项 a_n 使 $\left|a_n - A\right| < \varepsilon$ 成立.

5. 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时，有无限多项 $a_n \in U(A, \varepsilon)$.

解析 在判断数列极限的定义时，有以下几点需要注意：

1. 关于 "ε":ε 是任意给定的, 可以任意小, 但是在给定之后就是一个常数, $|a_n - A| < \varepsilon$ 用来刻画 a_n 与 A 的接近程度.

2. 关于 "N":N 是正整数，由 ε 确定，随 ε 而变，但是对于相同的 ε 的 N 不唯一，故 N 不是 ε 的函数.

3. 关于 "恒有": 它表示从第 N 项后的所有 a_n 都满足不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$，不能只是有限项或者无限项，而应当是全部.

由此，上述例子中只有命题 2 **没有改变极限定义的严格性与唯一性**，可以作为数列 a_n 的极限是 A 的定义.
命题 1："无穷多个 $\varepsilon>0$" 没有限制 ε 无限小，并没有体现出 a_n 无限接近于 A 的过程；
命题 2：可以通过令 $m = [\frac{1}{\varepsilon}]$ 代替 ε ；
命题 3：将 N 在 n 后确定，允许通过对不同的 n 动态调整对应的 N 以掩盖数列的发散行为；
命题 4：仅要求有无限项而非全部，可令数列 $\{a_n\} = (-1)^n$, 显然对于任意的 $n > N$，有无限多项 $n = 2k$ 满足 $|a_n - 1| < \varepsilon$，但该数列极限显然不存在；
命题 5：是数列极限的邻域定义，但同样仅要求有无限项而非全部.

1.1.2 收敛数列的性质

收敛数列具有极限唯一、有界以及保序性和夹逼性，同时也可以在满足一定条件的前提下进行对应的四则运算. 利用这些性质可以辅助计算收敛数列的极限.

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n})$.

解析 部分同学可能会产生将原极限利用四则运算法则转化为 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}) + \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{n^2+n+2}) + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+n+n})$ 的想法，从而求出其极限为 0. 但是需要注意加减法和乘法运算法则**仅对有限项成立**，故随意使用会导致错误. 此处应采用收敛数列的夹逼性求解.
记 $x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n})$，注意到：

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} < x_n < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

且：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2+2n} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}$$

故根据夹逼原理得：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$(间接证明了加减法和乘法运算法则仅对有限项成立).

1.1.3 收敛数列的判定

收敛数列的判定方法主要包括单调有界原理、数列极限归并原理、Weierstrass 定理与 Cauchy 收敛原理. 值得注意的是，这四个定理之间彼此存在逻辑关系，即可用前一个定理推得后面的定理，因此这些判定定理本质上是等价的.

例 3 设 $F(x,y) = \dfrac{f(y-x)}{2x}$, $F(1,y) = \dfrac{y^2}{2} - y + 5$, $x_0 > 0$, $x_1 = F(x_0, 2x_0), \dots, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n), (n = 1, 2, \dots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限.

解析 求出 $F(x,y)$[1]的表达式即可得到数列 x_n 的递推式，再用合适的判定定理证明并求极限即可.

令 $x = 1$，$\dfrac{f(y-1)}{2} = F(1,y) = \dfrac{y^2}{2} - y + 5$，即有：

$$f(y-1) = y^2 - 2y + 10 = (y-1)^2 + 9.$$

从而

$$f(y-x) = (y-x)^2 + 9, \quad F(x,y) = \frac{(y-x)^2 + 9}{2x}.$$

则

$$x_1 = \frac{(2x_0 - x_0)^2 + 9}{2x_0} = \frac{x_0^2 + 9}{2x_0}.$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{9}{x_n}} = 3(\text{有下界}).$$

又

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{9}{x_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{9}{3^2}) = 1.$$

所以由单调有界原理，x_n 单调递减并有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 可令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，并对递推公式两边取极限得：

$$A = \frac{A^2 + 9}{2A} \Rightarrow A = 3 \ (A = -3\text{舍去}).$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

例 4 设 $x_1 = 1$，$x_n = 1 + \dfrac{1}{1 + x_{n-1}}(n = 2, 3, \dots)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限.

解析 不妨先尝试写出数列前几项，$x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3}{2}, x_3 = \dfrac{7}{5}, x_4 = \dfrac{17}{12}, x_5 = \dfrac{41}{29}, x_6 = \dfrac{99}{70}, \dots$，数列不具有单调性，考虑其奇偶子列 $\{x_{2n-1}\}, \{x_{2n}\}$.

不难发现 $x_1 < x_3, x_2 > x_4$，采用第一数学归纳法，假设 $x_{2k-1} < x_{2k+1}, x_{2k} > x_{2k+2}$，

[1] 此处给出的函数 $F(x,y)$ 虽然是二元函数，但在解题过程中可以将其中一个变量视作常数求得关于另一个变量的函数 $F(x, y_0)$，这一思想在以后的偏导数部分有更为重要广泛的应用.

则

$$x_{2k+3}=1+\frac{1}{1+x_{2k+2}}>1+\frac{1}{1+x_{2k}}=x_{2k+1}$$

$$x_{2k+4}=1+\frac{1}{1+x_{2k+3}}<1+\frac{1}{1+x_{2k+1}}=x_{2k+2}$$

即 $\{x_{2n-1}\}$ 单调递增，$\{x_{2n}\}$ 单调递减.
显然 $0<x_n<2$，故 $\{x_{2n-1}\}$，$\{x_{2n}\}$ 都单调有界收敛. 只需证明两个数列极限相等.
设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=b$. 将递推公式两侧分别取 $n=2k-1$ 与 $n=2k$ 并令 $k\to\infty$，得

$$a=1+\frac{1}{1+b},\ b=1+\frac{1}{1+a}$$

解得 $a=b=\pm\sqrt{2}$，故 $\{x_n\}$ 收敛，由 $x_n>0$ 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

1.2 函数极限

1.2.1 函数极限的定义及性质 数列可以视作一个定义在正整数集上的特殊函数 $f{:}\mathbb{N}_+\to\mathbb{R}$, 因此函数的极限和数列极限的定义与性质类似，包括夹逼定理、单调有界原理，Cauchy 收敛定理等都有类似的形式. 不同的是，函数极限中 $f{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，因此其定义更加严格，要求必须左右极限存在且相等.

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-2[x]\right)$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解析 注意到 $[x]$ 为分段函数，且 $x=0$ 为一分段点，故需要计算原函数左右极限.

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-2[x]\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+2\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+2=\lim_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2=2;$$ [2]

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-2[x]\right)&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{\ln 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+0\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left[\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}(\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}+1)\right]}{\ln\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1)\right]}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}+\ln 1+\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}+\ln 1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2+x\ln(1+\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}=2.\end{aligned}$$

故所求极限为 2.

[2] 此处运用了等价无穷小代换 $\ln(1+x)\sim x$

1.2.2 函数极限的运算 函数极限的计算主要包括四则运算与复合函数运算. 但此处额外强调关于求复合函数极限的一点. 需要注意符合函数极限存在的条件以避免错误.

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\big([x]+\frac{1}{x}\big)\pi$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

错解 令 $u=\left([x]+\dfrac{1}{x}\right)\pi$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}u=+\infty$，于是：

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\big([x]+\frac{1}{x}\big)\pi=\lim_{u\to+\infty}\sin u.$$

故原极限不存在.

解析 之所以产生上述错误，是因为极限的复合运算法则中的条件 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 是保证 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 成立的**充分条件**，**而非必要条件**. 因此，仅凭 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$ 不存在不能断定 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$ 也不存在.

实际上，当 $n\le x<n+1$ 时，有 $[x]=n$，从而有：

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\big([x]+\frac{1}{x}\big)\pi=\lim_{x\to+\infty}\sin\big(n+\frac{1}{x}\big)\pi=\lim_{x\to+\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{x}=0$$

1.3 两个重要极限、无穷小量与无穷大量

1.3.1 两个重要极限 两个重要极限的等价形式：

$$\lim_{f(x)\to0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,\ \lim_{f(x)\to\infty}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}=\mathrm{e}.$$

1.3.2 无穷小量与无穷大量 无穷小量与无穷大量是同学们在高等数学学习中的一大重难点，也是对后续的微积分学习有着至关重要作用的概念，需要同学们深刻理解.

例 7 试讨论无界量、发散量与无穷大量之间的关系.

解析 这是初学者极易混淆的三个概念. 在数列中，它们分别指无界数列、发散数列和无穷大（极限为无穷大）数列；而在函数中分别指无界函数、极限不存在的函数和极限为无穷大的函数. 接下来我们将仅以数列情况为例讨论这些概念的联系与区别. 首先给出三个数列的定义：

无界数列 x_n：$\forall M>0$，至少存在其中一项 x_{n0}，使 $|x_{n0}|>M$；

发散数列 x_n：不收敛的数列；

无穷大数列 x_n：$\forall M>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n|>M$.

1. 无界数列与发散数列

由数列收敛的有界性可知，无界数列必定发散，但发散数列不一定无界，如发散数列 $\{(-1)^n\}$ 与 $\{\sin\frac{n\pi}{4}\}$ 均有界.

2. 无界数列与无穷大数列
由定义可知，无穷大数列必定无界，但无界数列不一定是无穷大数列. 因为无穷大数列的定义中要求**恒有** $|x_n| > M$，而无界数列只要求**至少存在其中一项** x_{n0}，使 $|x_{n0}| > M$. 可以构造数列 $1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots, \frac{1}{n}, n, \ldots$，该数列虽然无界，但其偶数项子列收敛于 0，故不是无穷大数列.[3]

3. 发散数列与无穷大数列
由上述内容易见，无穷大数列必然发散，而发散数列不一定是无穷大数列.

上述三类数列之间的关系可如下表示：无穷大数列 $\subseteq$ 无界数列 $\subseteq$ 发散数列

1.3.3 无穷小的比较

在自变量有着相同变化趋势的情况下，有限个无穷小量的和与乘积均为无穷小量，但两个无穷小量的商不一定是无穷小，这也引申出了无穷小量的比较与无穷小的阶的概念.
需要注意，高阶无穷小记号 $o(x^n)$ 仅仅定性地表示其为 x^n 的高阶无穷小，但并没有定量地说明它是 x^n 的几阶无穷小，更不是一个具体的计算表达式，故不能像数学表达式一样进行代数运算，但是仍有：

$$o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)\text{；当}m > n\text{时，}o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^n)$$

$$o(x^n) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})\text{；若}\varphi(x)\text{有界，则}\varphi(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$$

例 8 试确定 a, b, c 的值，使极限等式 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c - \sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2} = 0$ 成立.

解析 原极限等式说明分子是分母的高阶无穷小，由此可以得到几个不同的极限式：

$$\lim_{x\to1} \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c - \sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2} = 0 \tag{1.3–1}$$

$$\lim_{x\to1} [a(x-1)^2 + b(x-1) + c - \sqrt{x^2+3}] = 0 \tag{1.3–2}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c - \sqrt{x^2+3}}{x-1} = 0 \tag{1.3–3}$$

由式（1.3-2）得 $c = 2$，再代入式（1.3-3）得：

$$b = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2}$$

[3] 此处我们还可以得到一定理：数列 x_n 无界的充要条件为该数列存在一无穷大子列

再将 $c=2$，$b=\dfrac{1}{2}$ 代入式（1.3-1）得：

$$\begin{aligned}a=&-\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{x+3-2\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}\\=&\frac{3}{2}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3+2\sqrt{x^2+3})}=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

故 $a=\dfrac{3}{16},b=\dfrac{1}{2},c=2.$[4]

1.3.4 无穷小的等价代换

等价无穷小替换定理：设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$，$\tilde{\alpha}(x)$ 与 $\tilde{\beta}(x)$ 都是在自变量同一变化趋势下的无穷小，若 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x)$，$\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$，并且 $\lim\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也存在，并且有：

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$$

这一定理为同学们大大简化了计算 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式的难度，但是有几点需要格外注意：

1. 等价无穷小代换的本质是利用极限的运算法则，对式子乘一极限为 1 的分式，即 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\alpha(x)}{\tilde{\alpha}(x)}\cdot\lim\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}\cdot\lim\dfrac{\tilde{\beta}(x)}{\beta(x)}$. 因此，只能**对待求极限函数中的无穷小因式进行代换**，不可以对其中用加减号相连接的项分别进行代换！

2. 无穷小的等价代换默认了前提条件 $\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$，回顾等价无穷小的定义注意到，原定义要求 $\tilde{\beta}(x)\neq0$，即存在有 x_0 的某一去心邻域，使得 $\tilde{\beta}(x)$ 在其中**没有零点**，在进行某些等价无穷小代换的时候切忌忽略这一前提条件！

3. 常用的等价无穷小：当 $x\to0$ 时，有：

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\quad x\sim\ln1+x\sim e^x-1\quad(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\quad\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\quad\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3\quad x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$$

例 9 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}$.

错解 由 $x\to0$ 时的等价无穷小代换 $\sin x\sim x$ 得：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

[4] 考虑到此题分子上有无理式，不推荐使用洛必达法则.

解析 答案正确，但是方法错误！对于 $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$，其在 $x_0=0$ 的任一去心邻域内都有零点 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$，因此不能认为 $\sin f(x)$ 与 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的等价无穷小！
正确解法如下：由于当 $x\neq 0$ 时，

$$\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leq\frac{\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|}{|x|}\leq|x|,$$

所以该极限的值为 0.

例 10 证明 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$.

解析

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cdot\cos x}=\frac{1}{2}$$ [5]

例 11 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{\cos 2n\pi x}}{(x-1)(x^x-1)}$.

解析 原题目中 $x\to 1$，故可作变量代换 $t=x-1$ 化作 $t\to 0$ 的情况，再进行等价无穷小代换.
令 $t=x-1$，则：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos 2n\pi t}}{t[(t+1)^{(t+1)}-1]}=-\lim_{t\to 0}\frac{[1+(\cos 2n\pi t-1)]^{\frac{1}{n}}-1}{t[\mathrm{e}^{(t+1)\ln(t+1)}-1]}\\&=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{n}(\cos 2n\pi t-1)}{t(t+1)\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}(2n\pi t)^2}{t^2(t+1)}=2n\pi^2.\end{aligned}$$

注意此处运用的等价无穷小代换：若 $f(x)\to 1$，则 $\sqrt[n]{f(x)}-1=\sqrt[n]{1+[f(x)-1]}-1\sim\dfrac{1}{n}[f(x)-1]$.

1.3.5 等价无穷小代换的本质——Taylor 定理*

对于平面直角坐标系中的一曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的一段，我们可以用该点处的切线 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来代替曲线. 但这一方法适用范围小，精度误差大. 我们想到，能否采用关于 $x-x_0$ 的高阶多项式来拟合曲线？Taylor 公式对此作了解答：

带有 Peano 余项的 Taylor 定理 设函数 f 在 x_0 处 n 阶可微，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

其中，$o((x-x_0)^n)$ 称为 Peano 余项.
有了这一公式，我们可以令 $x_0=0$，从而很容易地写出一些初等函数的表达式：

[5] 这也说明了等价无穷小代换时不可以对其中用加减号相连接的项分别进行代换.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^{n+1}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m+1}),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+2}),\\
\ln x &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^{n+1}),
\end{aligned}$$

仔细观察上面的式子不难发现，右侧多项式的前几项即为原函数的等价无穷小. 由此我们得知，等价无穷小代换**本质上就是精度较低的泰勒公式**.
这也说明了为什么进行等价无穷小代换时，不可以对其中用加减号相连接的项分别进行代换，以例题 10 为例，若对用加减号相连接的项 $\tan x$，$\sin x$ 分别进行代换发现，两者的第一项消去，理论上应当对第二项 (x^3) 进行计算，但等价无穷小代换直接**忽略了这一无穷小量**，也就导致了错误. 而对于乘除法而言，等价无穷小代换**不会消去第一项近似**，等价的无穷小量（即泰勒展开的第一项）总会存在，意味着不需要考虑后面的高阶近似.

1.4　连续函数

1.4.1　函数连续的定义

函数连续要求函数在某一点出左右极限均存在且与该点函数值相等.

例 12　设 f 在 (a,b) 内每一点处的左，右极限都存在，且 $\forall x,y \in (a,b)$，有：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2}[f(x)+f(y)],$$

证明 f 在 (a,b) 内连续.

解析　只需证明函数任一点的左右极限都与函数值相等即可.
$\forall x_0 \in (a,b)$，记 $f(x_0-0)=A^-$，$f(x_0+0)=A^+$. 则只需证明 $A^-=A^+=f(x_0)$ 即可.
对于所给出的不等式，令 $x=x_0$，分别取 $y\to x_0^-$ 与 $y\to x_0^+$，得

$$\begin{cases} A^- \le \dfrac{1}{2}f(x_0)+\dfrac{1}{2}A^-,\\ A^+ \le \dfrac{1}{2}f(x_0)+\dfrac{1}{2}A^+. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A^- \le f(x_0),\\ A^+ \le f(x_0). \end{cases}$$

在所给不等式中，再令 $x = x_0 - h$，$y = x_0 + h$，取 $h \to 0^+$ 得：

$$f(x_0) \le \frac{1}{2}(A^- + A^+).$$

结合两个不等式可知 $A^- = A^+ = f(x_0)$. 由 x_0 的任意性知 f 在 (a, b) 内连续.[6]

1.4.2 函数间断点

函数的连续性是微积分的重要基础，对于不连续的函数的间断点，又分为可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点与振荡间断点. 判断一个非连续函数的间断点类型也是一类常考的重要题型.

例 13 讨论函数 $f(x)$ 的连续性，若有间断点，则指出其类型.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}, & x \le 0, \\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x > 0. \end{cases}$$

解析 函数没有定义的点必然为其间断点，对于分段函数，其分段点也有可能是间断点，需要讨论其左右连续性.

对于函数 $f(x)$，在 $x = 1$ 以及 $x = -k\pi - \dfrac{\pi}{2}(k \in \mathbb{N})$ 处均没有定义，所以这些点都是间断点. 此外，分段点 $x = 0$ 也可能是函数的间断点之一.

1. 在分段点 $x = 0$ 处，$f(+0) = -\sin 1$，$f(-0) = 0$，所以 $x = 0$ 为第一类（跳跃）间断点；
2. $x = 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \sin\dfrac{1}{x^2-1}$ 不存在（有界振荡），所以 $x = 1$ 为第二类（振荡）间断点；
3. $x = -k\pi - \dfrac{\pi}{2}(k \in \mathbb{N})$ 时，$\lim\limits_{x\to -k\pi-\frac{\pi}{2}} \dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x} = \infty$，所以 $x = -k\pi - \dfrac{\pi}{2}$ 为第二类（无穷）间断点；
4. ★ $x = -\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x} = -\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x = -\dfrac{\pi}{2}$ 为第一类（可去）间断点；

[6] 注意到该题中的不等式是凸函数的定义，故该题有等价命题：区间 I 上的凸 (凹) 函数不可能有第一类间断点.

1.4.3 连续函数的运算性质 由函数连续性定义和极限相关性质，可以推导出其四则运算所得函数、复合函数与反函数也同样具有连续性.
此外，由于常函数是连续的，我们可以得到，所有的初等函数在其定义域内的任何区间（即定义区间）上都是连续的，此处不再过多赘述.

1.4.4 闭区间连续函数的性质 闭区间上连续的函数具有许多重要的性质，包括有界性、最大最小值定理、零点存在定理、介值定理与值域定理（非常函数的连续函数在一闭区间上的值域也是一闭区间）等. 这些性质有着极其重要的价值，也是研究微积分理论的重要基础.
例 14 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并有数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$，使得 $f(x_{n+1}) = g(x_n)$，$n = 1,2,3,\ldots$，证明存在一点 $x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x_0) = g(x_0)$.
解析 只需证明函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 在 $[a,b]$ 内有零点，可采用反证法.
假设结论不成立，则连续函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒不为零. 于是 $F(x)$ 恒大于零或恒小于零. 不妨设恒有 $F(x) > 0$，则它在 $[a,b]$ 上的最小值 $m > 0$. 由

$$f(x_{n+1}) = g(x_n) = g(x_n) - f(x_n) + g(x_{n-1}),$$

继续递推得到：

$$f(x_{n+1}) = g(x_n) = [g(x_n) - f(x_n)] + [g(x_{n-1}) - f(x_{n-1})] + \cdots + [g(x_2) - f(x_2)] + g(x_1).$$

$$\begin{aligned} g(x_1) - f(x_{n+1}) &= [g(x_n) - f(x_n)] + [g(x_{n-1}) - f(x_{n-1})] + \cdots + [g(x_2) - f(x_2)] \\ &= F(x_n) + F(x_{n-1}) + \cdots + F(x_2) \geq (n-1)m. \end{aligned}$$

则可推出 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$，这与 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续有界矛盾. 同理，恒有 $F(x) < 0$ 时同样矛盾. 故原命题得证.
例 15 设 $a, b \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足 $f(f(x)) = af(x) + bx$, 证明：$f(x)$ 有唯一的不动点 $x = 0$，即 $f(0) = 0$.
解析 原题即证明方程 $f(x) = x$ 有唯一根 $x = 0$，但题设中没有给出函数的大小关系，因此难以直接使用零点定理判断，故需要利用 a, b 范围构造不等式.
首先证明 f 是一一映射.
注意到 bx 可以取任意值，当 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ 时其值域也为 $\mathbb{R}$，故 f 为 $\mathbb{R}$ 上的满射. 而若 $f(x) = f(y)$，则 $f(f(x)) = f(f(y))$，所以 $bx = by, x = y$. 即 f 是 $\mathbb{R}$ 上的单射. 故 f 是 $\mathbb{R}$ 上连续的一一映射，f 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调.
下面证明 f 有唯一的不动点.
若 $\forall x \in \mathbb{R}$，均有 $f(x) > x$，则：

$$f(f(x)) > f(x) \Rightarrow af(x) + bx > f(x) \Rightarrow f(x) < \frac{bx}{1-a},$$

特别地，有 $f(1) < \dfrac{b}{1-a} < 1$，矛盾.
若 $\forall x \in \mathbb{R}$，均有 $f(x) < x$，则:

$$f(f(x)) < f(x) \Rightarrow af(x) + bx < f(x) \Rightarrow f(x) > \frac{bx}{1-a},$$

特别地，有 $f(-1) > -\dfrac{b}{1-a} > -1$，矛盾.
所以存在唯一的 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $f(x_0) = x_0$，且有:

$$f(f(x_0)) = af(x_0) + bx_0 \Rightarrow x_0 = ax_0 + bx_0 \Rightarrow x_0(1-a-b) = 0 \Rightarrow x_0 = 0.$$

1.4.5 一致连续性 一致连续性是一种要求更强的连续性，它要求对于函数 $f: I \to \mathbb{R}$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x_1, x_2 \in I$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \delta$. 它要求对于 I 中的所有点都能找到一个共同的 δ 使不等式成立，刻画了函数的整体性态. 由此不难发现，函数一致连续是函数连续的充分条件.

例 16 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件:

$$\exists L > 0,\ \text{s.t.} \forall x, y \in (-\infty, +\infty),\ |f(x) - f(y)| \le L|x-y|,$$

证明: f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

解析 类似于函数极限的证明.

$$\forall \varepsilon > 0, \text{取} \delta = \frac{\varepsilon}{L}, \text{则 } |f(x) - f(y)| \le L|x-y| < L \cdot \delta = \varepsilon$$

故满足 Lipschitz 条件的函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

1.5 习题

1. 证明数列收敛并求其极限:
$0 < x_1 < \sqrt{3}, x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$;

2. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 均为正数，且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，$0<x_0<y_0<z_0$，令 $x_{n+1}=\dfrac{1}{\frac{\lambda_1}{x_n}+\frac{\lambda_2}{y_n}+\frac{\lambda_3}{z_n}}$，$y_{n+1}={x_n}^{\lambda_1}{y_n}^{\lambda_2}{z_n}^{\lambda_1 3}$，$z_{n+1}=\lambda_1x_n+\lambda_2y_n+\lambda_3z_n$，试证：

(1) $x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<z_{n+1}<z_n$，其中 $n=0,1,2,\dots$；

(2) $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 三数列收敛至同一值.

3. 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与严格单调数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足（L 为常数）：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=L,$$

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=L$（$\dfrac{0}{0}$ 型斯托尔兹定理特殊形式）.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$;

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}(n\in\mathbb{N}_+)$

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}(n\in\mathbb{N}_+)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\tan x}^{\frac{1}{\tan^2x}}$

6. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)}-x\right]$.

7. 证明 Dirichlet 函数 $\begin{cases}1,x\in\mathbb{Q},\\0,x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 在任何 $x\in\mathbb{R}$ 处的极限都不存在.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x+\mathrm{e}^{3x})-3x}{\ln(\tan x+\mathrm{e}^{5x})-5x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\pi}-\cos x}{\sin x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{b}-(1+cx)^{d}}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln x}\cdot(x^{\frac{1}{x}}-1)$.

9. 求常数 a，使其满足：$1-\prod\limits_{k=1}^{9}\sqrt[k]{\cos kx}=ax^2+o(x^2)(x\to 0)$.

10. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\Big(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}f(x)}-2\Big)=\dfrac{3}{4}$，证明：$f(x)\sim 3x^3(x\to 0)$

11. 设 P 是曲线 $y=f(x)$ 上的动点. 若点 P 沿该曲线无限远离坐标原点时，它到某定直线 L 的距离趋于 0，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的**渐近线**，若直线 L 的斜率 $k\neq 0$，称 L 为**斜渐近线**.

证明：直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜（或水平）渐近线的充要条件为：

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

12. 记 $I_n=\dfrac{\overbrace{\tan\tan\ldots\tan x}^{n\text{个}}-\overbrace{\sin\sin\ldots\sin x}^{n\text{个}}}{\tan x-\sin x}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}I_n$.

13. 试确定常数 α,β,λ，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4(1+x)^3-3}-\alpha-\beta x-\lambda x^2}{x^2}=0$.

***14.** 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+xf(x)}{\tan x-\sin x}=0$. 求 a,b，使 $x\to 0$ 时，$f(x)+2$ 与 ax^b 为等价无穷小.

15. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的所有间断点及其类型.

16. 试确定常数 a,b，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{1}{bx}\ln(1-3x), & x<0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

17. 设 $f\in C[a,b]$，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

其中 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，且 $\lambda_i>0(i=1,2,\ldots,n)$.

18. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，试确定 $f(x)$ 的间断点，并指出其类型.

19. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，试证明存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f(\xi)+\xi=0$.

20. 试证:

(1) 方程 $P_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1=0$ 有唯一正根 $r_n(n=1,2,\ldots)$;

(2) 数列 $\{r_n\}$ 严格单调减，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n$.

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，证明：对于任意的正整数 n，必存在 $x_n\in(0,1)$ 使 $f(x_n)=f(x_n+\dfrac{1}{n})$

22. 设 $f\in C[a,b]$，且 $\forall x\in[a,b],\exists y\in[a,b]$，使 $f(y)=\dfrac{1}{2}\big|f(x)\big|$，证明 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=0$.

23. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，$f(0)=0, f(1)=1, f[f(x)]=x$，证明：$f(x)=x$.

1.6 答案

1. 该题显然需要应用数列的单调有界原理求极限.

解: 设 $0 < x_n < \sqrt{3}$，则显然 $x_{n+1} > 0$，且有：

$$x_{n+1} = 3 - \frac{6}{3+x_n} < 3 - \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0$$

故数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，该数列收敛.

对递推式两边取极限，得：

$A = \dfrac{3+3A}{3+A}$，解得 $A = \sqrt{3}$（$A = -\sqrt{3}$ 舍去）. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

2. **证:**（1）由数学归纳法，并利用加权均值不等式得：

$$0 < x_n < y_n < z_n (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

另外，对于 $n = 0, 1, 2, \ldots$, 有

$$z_{n+1} = \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n + \lambda_3 z_n < \lambda_1 z_n + \lambda_2 z_n + \lambda_3 z_n = z_n$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{x_n} + \frac{\lambda_2}{y_n} + \frac{\lambda_3}{z_n}} > \frac{1}{\frac{\lambda_1}{x_n} + \frac{\lambda_2}{x_n} + \frac{\lambda_3}{x_n}} = \frac{x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = x_n$$

故 $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < z_{n+1} < z_n$.

(2) 从结论 1 可以推知数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增并且以 z_0 为上界，数列 $\{z_n\}$ 严格单调递减并且以 x_0 为下界，故 $\{x_n\}$ 与 $\{z_n\}$ 都收敛，并且有递归式可得：

$$y_n = \frac{1}{\lambda_2}(z_{n+1} - \lambda_1 x_n - \lambda_3 z_n)$$

所以数列 $\{y_n\}$ 也收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$，则由（1）得：

$$x_0 < x \leq y \leq z < z_0$$

在 z_n 的递归定义式中令 $n \to \infty$ 得

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)z = z = \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n + \lambda_3 z_n$ 或 $\lambda_1(z-x) + \lambda_2(z-y) = 0$.

所以 $z - x = z - y = 0$，即 $x = y = z$，故三数列收敛至同一值.

3. 证： 令 $X_n = x_n - Ly_n$，则原式条件可化为:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1} - X_n}{y_{n+1} - y_n} = 0.$$

因此，对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N 使得当 $n > N$ 时

$$-\varepsilon < \frac{X_{n+1} - X_n}{y_{n+1} - y_n} < \varepsilon$$

结合合分比定律得：当 $n > N$ 时，对所有正整数 p 均有:

$$-\varepsilon < \frac{X_{n+p} - X_n}{y_{n+p} - y_n} < \varepsilon$$

令 n 固定，$p \to \infty$ 得:

$$-\varepsilon \le \frac{X_{n+1}}{y_{n+1}} \le \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{y_n} = 0$，化为 x_n 形式即得证.

4. 解：

(1) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2} = \sqrt{2}$

(2) 原式 $= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{2\cos x\cdot\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$

(3)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 1} \frac{2(1+x+x^2) - 3(1+x)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)} \\
&= \lim_{x\to 1} -\frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(4) 令 $\sqrt[n]{1+x} = t$，则 $x = t^n - 1$，$x \to 0$ 时 $t \to 1$.
原式 $= \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t-1}{t^n - 1} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{1}{t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + 1} = \dfrac{1}{n}$

5. 解:

(1) 原式 $= \lim\limits_{x\to n\pi}(-1)^n\dfrac{\sin x - n\pi}{x-n\pi} = (-1)^n.$

(2)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 1}(1-x)\cot\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right] = \lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}\\ &= \lim_{x\to 1}\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]\frac{1-x}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

(3) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left[1+(-2x)\right]^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)} = \mathrm{e}^{-2}.$

(4) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x - \tan x}{\tan x}\right)^{\frac{\tan x}{\sin x-\tan x}\cdot\frac{\sin x - \tan x}{\tan^3 x}}.$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\tan^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^3}{x^3} = -\dfrac{1}{2}.$

所以原式 $= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

6. 解: 令 $x = \dfrac{1}{t}$，则:

$$\text{原式} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt[k]{(1+a_1t)(1+a_2t)\dots(1+a_kt)}-1}{t}.$$

因为

$$(1+a_1t)(1+a_2t)\dots(1+a_kt) = 1+\Big(\sum_{i=1}^k a_i\Big)t + \Big(\sum_{1\le i<j\le k}a_ia_j\Big)t^2+\dots+(a_1a_2\dots a_k)t^k$$

故

$$\sqrt[k]{(1+a_1t)(1+a_2t)\dots(1+a_kt)}-1 = \sqrt[k]{1+\Big(\sum_{i=1}^k a_i\Big)t+o(t)}-1 \sim \frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^k a_i\Big)t+o(t).$$

于是原式 $= \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)t+o(t)}{t} = \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}.$

7. 可以采用反证法进行证明.

证：不妨设对于某个 $a \in \mathbb{R}$，极限 $\lim\limits_{x\to a} D(x) = L$ 存在，那么根据极限的定义，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\setminus\{a\}$ 内有 $\left|D(x)-L\right| < \varepsilon$.
现在考虑 $\varepsilon_0 < \dfrac{1}{2}$. 根据假设，存在 $\delta > 0$ 使得在 $\mathring{U}(a,\varepsilon_0)$ 内有 $\left|D(x)-L\right| < \varepsilon_0$.
由于有理数与无理数在实数中均稠密，故在范围内必然存在有理数 q 和无理数 r 满足条件. 但是 $\left|D(q)-L\right| = \left|1-L\right| < \varepsilon_0$，$L \in (1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$；$\left|D(r)-L\right| = \left|-L\right| < \varepsilon_0$，$L \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. 又因为 $\varepsilon_0 < \dfrac{1}{2}$，故这样的 L 不存在，原假设错误，故原命题得证.

8. 解：

(1)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sin x + \mathrm{e}^{3x}\right) - \ln \mathrm{e}^{3x}}{\ln\left(\tan x + \mathrm{e}^{5x}\right) - \ln \mathrm{e}^{5x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sin x\cdot \mathrm{e}^{-3x}\right)+1}{\ln\left(\tan x\cdot \mathrm{e}^{-5x}\right)+1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot \mathrm{e}^{-3x}}{\tan x\cdot \mathrm{e}^{-5x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x} = 1
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)^{\pi} - \cos x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)^{\pi} - 1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\pi x^2}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \pi + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+ax\right)^{b} - 1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+cx\right)^{d} - 1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{b\cdot ax}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{d\cdot cx}{x} = ab - cd.
\end{aligned}$$

(4) 因为当 $x \to +\infty$ 时，$\dfrac{\ln x}{x} \to 0$，故：

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \cdot (x^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \cdot (\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1.$$

9. 解： 首先有 $(1+t)^u = 1 + ut + o(t)(t \to 0)$，因而当 $k \neq 0, x \to 0$ 时

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{\cos kx} = \sqrt[k]{1 + (\cos kx - 1)} &= 1 + \frac{1}{k}(\cos kx - 1) + o((\cos kx - 1)) \\ &= 1 - \frac{1}{k}(1 - \cos kx) + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot k^2x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{k}{2}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

又由无穷小乘积计算可知：

$$\prod_{k=1}^{9} \sqrt[k]{\cos kx} = 1 - (\sum_{k=1}^{9} \frac{k}{2})x^2 + o(x^2)(x \to 0)$$

移项整理化简后得：

$$1 - \prod_{k=1}^{9} \sqrt[k]{\cos kx} = \frac{45}{2}x^2 + o(x^2)(x \to 0)$$

所以 $a = \dfrac{45}{2}$.

10. 证： 由题中极限可知，当 $x \to 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}$ 是非零无穷小量，并有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\Big(\sqrt{4 + \frac{1}{x}f(x)} - 2\Big) = \frac{3}{4} + o(l) \\ &\qquad\Rightarrow \sqrt{4 + \frac{1}{x}f(x)} - 2 = \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) \\ &\qquad\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{4x}f(x)} - 1 = \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \\ &\qquad\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4x}f(x) \sim \sqrt{1 + \frac{1}{4x}f(x)} - 1 \sim \frac{3}{8}x^2\end{aligned}$$

所以有 $\dfrac{f(x)}{8x} \sim \dfrac{3}{8}x^2(x \to 0)$，故 $f(x) \sim 3x^3(x \to 0)$.

11. 证:

(1) 充分性: 当 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ 时, 曲线 $f(x)$ 上任一点到直线 L 的距离 d 为:

$$d=\frac{\left|f(x)-kx-b\right|}{\sqrt{k^2+1}}$$

因为

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)\Rightarrow\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$$

所以

$$d=\frac{\left|f(x)-kx-b\right|}{\sqrt{k^2+1}}=0$$

(2) 必要性: 假设直线 $y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 的斜渐近线, 则当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 上一点 $P(x,f(x))$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离趋于 0. 即

$$\lim_{x\to+\infty}d=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|f(x)-kx-b\right|}{\sqrt{k^2+1}}$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$$

接下来由 b 的表达式推 k, 有:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-kx}{x}=\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{f(x)}{x}-k\Big)=0\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

因此:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

12. 解: 注意到:

$$\overbrace{\tan\tan\ldots\tan x}^{k\text{个}}-\overbrace{\tan\tan\ldots\tan x}^{(k-1)\text{个}}\sim\frac{1}{3}\overbrace{\big(\tan\tan\ldots\tan x\big)^3}^{(k-1)\text{个}}\sim\frac{1}{3}x^3$$

$$\overbrace{\sin\sin\ldots\sin x}^{k\text{个}}-\overbrace{\sin\sin\ldots\sin x}^{(k-1)\text{个}}\sim-\frac{1}{6}\overbrace{\big(\sin\sin\ldots\sin x\big)^3}^{(k-1)\text{个}}\sim-\frac{1}{6}x^3$$

为了凑出上面的形式, 我们考虑 I_k-I_{k-1}.

$$I_k-I_{k-1}=\frac{\overbrace{\tan\tan\ldots\tan x}^{k\text{个}}-\overbrace{\tan\tan\ldots\tan x}^{(k-1)\text{个}}}{\tan x-\sin x}-\frac{\overbrace{\sin\sin\ldots\sin x}^{k\text{个}}-\overbrace{\sin\sin\ldots\sin x}^{(k-1)\text{个}}}{\tan x-\sin x}$$

进行上述等价无穷小代换，得：

$$\lim_{x\to 0}(I_k - I_{k-1}) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1.$$

所以

$$\lim_{x\to 0} I_n = \sum_{k=2}^{n}\lim_{x\to 0}(I_k - I_{k-1}) + \lim_{x\to 0} I_1 = (n-1)+1 = n.$$

13. 解：将 $x=0$ 直接代入分子可得 $\alpha=1$，则原题函数可等价为：

$$\lim_{x\to 0}\frac{4(1+x)^3-3-(1+\beta x+\lambda x^2)^2}{\left(\sqrt{4(1+x)^3-3}+1+\beta x+\lambda x^2\right)x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(12-2\beta x)x+(12-\beta^2-2\lambda)x^2+o(x^2)}{2x^2} = 0$$

所以有：

$$12-2\beta=0, 12-\beta^2-2\lambda=0$$

所以题中极限成立当且仅当 $\alpha=1, \beta=6, \lambda=12$.

14. 解: 因为当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + xf(x)}{\tan x-\sin x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+xf(x)}{x^3} = 0.$$

将 $\sin 2x$ 用泰勒公式展开得 $\sin 2x = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)$，代入上式得：

$$f(x) = \frac{-\sin 2x + o(x^3)}{x} = -2+\frac{4}{3}x^2+o(x^2) \Rightarrow f(x)+2 \sim \frac{4}{3}x^2 (x\to 0)$$

所以 $a=\dfrac{4}{3}, b=2$.

15. 解：根据原函数定义域判断出所有可能的间断点 $x=0,\pm 1$.

（1）$x=0$ 时

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{-x(x^2-1)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{-(x+1)} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1} = 1$$

所以 $x=0$ 为第一类（跳跃）间断点.
（2）$x=1$ 时
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$
所以 $x=1$ 为第一类（可去）间断点.
（3）$x=-1$ 时
$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-x}{-x(x^2-1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{-(x+1)}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-x}{-x(x^2-1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{-(x+1)}=-\infty$$
所以 $x=-1$ 为第二类（无穷）间断点.

16. 解： 讨论 $x=0$ 时的函数左右极限与函数值即可.
因为
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{x}=a,$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{bx}\ln(1-3x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{bx}\cdot(-3x)=\frac{-3}{b}.$$
令 $a=\dfrac{-3}{b}=f(0)$，得 $a=2,b=-\dfrac{3}{2}$.

17. 证: 由于 $f\in C[a,b]$，故 f 在 $[a,b]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，且对于任意的 $x_i\in(a,b)$，有:
$$\lambda_i m\le\lambda_i f(x_i)\le\lambda_i M$$
所以
$$\lambda m\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\le\lambda M$$
$$m\le\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\le M$$
又因为 $f\in C[a,b]$，故至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$.

18. 解:

$$f(x)=\lim_{t\to x}\big(\frac{\sin t}{\sin x}\big)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim_{t\to x}\big(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\big)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}$$

注意到所有的 $x=k\pi$ 都为该函数可能的间断点.
(1) $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\dots)$ 时
注意讨论 x 和 $\sin x$ 的做有极限情况下的正负性，以 $x=-\pi$ 为例:

$$\lim_{x\to-\pi^-}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{-\infty}=0(x<0,\sin x>0)$$

$$\lim_{x\to+\pi^-}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{+\infty}=+\infty(x<0,\sin x<0)$$

类似讨论所有的 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\dots)$，不难发现其均一侧极限为 0，另一侧极限为 $+\infty$，所以所有的 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\dots)$ 为第二类（无穷）间断点.
(2) $x=0$ 时

$$\lim_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}$$

所以 $x=0$ 为第一类（可去）间断点.（此题目建议同学们用软件画出函数图像辅助理解）

19. 证: 令 $F(x)=f(x)+x$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f(x)=o(x)\Rightarrow F(x)=f(x)+x\to+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f(x)=o(x)\Rightarrow F(x)=f(x)+x\to-\infty.$$

又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f(\xi)+\xi=0$.

20. 证: (1) 显然 $P_n(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，并满足

$$P_n(0)=-1,P_n(+\infty)=\lim x\to+\infty P_n(x)>0$$

故由连续函数的介值定理，$P_n(x)=0$ 有唯一的正根 r_n.
(2) 因为

$$P_{n+1}(r_n)=r_n^{n+1}+P_n(r_n)=r_n^{n+1}+0>0P_{n+1}(r_{n+1})$$

且 $P_{n+1}(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故

$$r_n > r_{n+1}(n=1,2,\dots).$$

所以 $\{r_n\}$ 是一个严格单调递减的数列且有下界 0，极限存在.
由于 $P_n(r_n)=0$，有

$$(r_n^n+r_n^{n-1}+\cdots+r_n+1)-2=0\text{或}\frac{1-r_n^{n+1}}{1-r_n}=2.$$

取极限 $n\to\infty$，由夹逼定理 $0<r_n^{n+1}\le r_2^{n+1}$，得 $\dfrac{1}{1-r}=2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=r=\dfrac{1}{2}$.

21. 证：采用反证法：
若对 $\forall x\in(0,1)$，均有 $f(x)>f(x+\dfrac{1}{n})$. 则取 $x_k=\dfrac{k}{n}\big(k=0,1,2,\dots,\dfrac{n-1}{n}\big)$，得：

$$f(0)>f(\frac{1}{n})>f(\frac{2}{n})>\cdots>f(1).$$

这与已知条件矛盾，同理，不可能恒有 $f(x)>f(x+\dfrac{1}{n})$，所以必然存在 $x_n\in(0,1)$ 使 $f(x_n)=f(x_n+\dfrac{1}{n})$.

22. 证：因为 $f(x)\in C[a,b]$，所以 $\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=\min\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$.
（1）若 $f(x_0)=0$，则 $\xi=x_0$ 即为所求;
（2）若 $f(x_0)>0$，则 $\exists y_0\in[a,b]$，使

$$f(y_0)=\frac{1}{2}\big|f(x_0)\big|=\frac{1}{2}f(x_0)<f(x_0)$$

与 $f(x_0)=\min\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$ 矛盾.
（3）若 $f(x_0)<0$，则 $\exists y_0\in[a,b]$，使

$$f(y_0)=\frac{1}{2}\big|f(x_0)\big|>0.$$

由介值定理，在 x_0 和 y_0 之间必存在 ξ，使 $f(\xi)=0$.
所以，综上所述，$\exists\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=0$.

23. 证： 首先证明 $f(x)$ 是一一映射. 因为当 $f(x)=f(y)$ 时，$f(f(x))=f(f(y))$，即 $x=y$，故 f 为一单射.
又由于函数连续，且 $f(0)=0, f(1)=1$，故 f 为一满射.
所以 f 为一一映射，且 $f(x)$ 严格单调递增.
令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(0)=0, g(1)=0$，现在只需证明在 $(0,1)$ 上 $g(x)\equiv 0$.
假设有 $c\in(0,1)$ 使 $g(c)\neq 0$.
(1) 若 $g(c)>0$，则 $f(c)>c$. 由于 $f(x)$ 严格单调递增，$f(c)<f(f(c))=c$，矛盾.
(2) 若 $g(c)<0$，则 $f(c)<c=f(f(c))$. 由于 $f(x)$ 严格单调递增，有 $c<f(c)$，也矛盾.
故 $\forall x\in(0,1)$，$g(x)=0$，即 $f(x)=x$.

第二章 一元函数微分学及其应用

2.1 导数

2.1.1 导数的定义

导数的实质是函数在某一点处增量比的极限：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

对这个式子的几点说明：

1. 函数在某点可导在该点一定连续.（反过来不一定成立）

2. 函数可导是局部性质，只能对函数定义域的某一个点来讨论，不能说整个函数是可导的.

3. 所有的常见函数的导数公式都是由此极限推出来的，求此极限是判断一点导数是否存在以及求这一点导数的最基本也是最常用的方法，遇到判断函数在某点是否可导，直接列写这个极限就可.

4. 导数刻画了函数在某一点上的变化率.

不过这个定义也存在一些可能混淆的地方，比如下例：

例 1 由下列哪个极限存在可以得到函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导.

1. $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$

3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-2h\right)}{h}$

4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}$

解析　导数存在即上面的极限存在，而极限存在的要求其左右极限均存在（即从两个方向趋近 x_0 的极限都存在）并且相等.

1. 不能说明. 由于 $h\to 0_+$, 故只知道在 x_0 点处其从右边趋近于 x_0 的极限是存在的，无法判断 x_0 点极限存在. 事实上，1 选项定义的是 x_0 处的**右导数**. 这个时候导数存在，也可以说成是左右导数均存在且相等.

2. 不能说明. 可以看出，这个式子的分子是取的关于 x_0 点对称的两个点的函数值，其对 x_0 点处函数的取值没有任何要求，这个时候，即使 f 在 x_0 处的取值使得 x_0 处不连续，也不影响 2 这个极限的存在，比如这个函数:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处不连续（第二类间断点），因而在 $x=0$ 处必不可导. 但极限 2 却存在. 事实上，我们有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0+\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(\Delta x)^2}-\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=0.$$

3. 不能说明. 极限 3 同极限 2

4. 此为定义式，成立，故选择 4.

例 2　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{2n}}$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内:

1. 处处可导

2. 恰有一个不可导点

3. 恰有两个不可导点

4. 至少有三个不可导点

解析

$$f(x)=\begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ |x|^2=x^2 & |x|>1 \end{cases}$$

在 $x=-1$ 处

$$\begin{aligned} \text{左导数} f'_-(-1) &= \lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1}\frac{|x|^2-1}{x+1}-\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1}{x+1}-\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1^-}(x-1) \\ &= -2 \\ \text{右导数} f'_+(-1) &= \lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1^+}\frac{1-1}{x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

因为 $f_-^f(-1)\neq f'_+(-1)$ ，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不可导, 同理可知，在 $x=1$ 处左右导数也不相等，故选 3.
由说明 3，我们看几个由定义求导数的例子：

例 3 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 求 $f'(0)$

解析 直接使用导数的定义求解

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} \\ &= 0 \\ \therefore f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

例 4 设 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $\varphi'(1)=1$ ，又 $f(x)$=$\varphi(1+2x)-\varphi(1-3x)$ ，试求 $f'(0)$

解析　根据定义

$$
\begin{aligned}
\therefore f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(1+2x)-\varphi(1-3x)}{x} \qquad \because f(0)=0\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(1+2x)-\varphi(1)+\varphi(1)-\varphi(1-3x)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\varphi(1+2x)-\varphi(1)}{x}+\frac{\varphi(1)-\varphi(1-3x)}{x}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[2\cdot\frac{\varphi(1+2x)-\varphi(1)}{2x}+3\cdot\frac{\varphi(1-3x)-\varphi(1)}{-3x}\right]\\
&= 5\varphi'(1)=5
\end{aligned}
$$

这个例子可以看出，在求导数的过程中，可以通过已知的导数值来凑项，将极限式拆成两个能极限式分别求值. 例四也可以用同样的办法做出来：

例 5　设 $f'(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$ ，求 $f'(1)$.

解析　因为

$$
\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{2x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}\\
&= \frac{1}{2}f'(1)=-1
\end{aligned}
$$

所以 $f'(1)=-2$.

由说明 4，导数可以用在许多和变化率相关的实际应用中，例如经济学中的边际效益，曲线切线的斜率等等，这里不再举例.

2.2 导数的计算

2.2.1 求导公式

初等函数的导数公式:

$$
\begin{array}{ll}
(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} & (\sin x)' = \cos x \\
(a^x)' = a^x \ln a & (\cos x)' = -\sin x \\
(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x & (\tan x)' = \sec^2 x \\
(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} & (\cot x)' = -\csc^2 x \\
(\ln x)' = \dfrac{1}{x} & (\sec x)' = \sec x \tan x \\
(\csc x)' = -\csc x \cot x & (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \\
(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} &
\end{array}
$$

同样也可以推出双曲函数的导数，这里不要求记忆

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x \quad y = \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(1 < x < +\infty)$$

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(1 < x < +\infty)$$

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

函数的和差积商求导：

设$u(x), v(x)$ 在点x 处均可导，则

$1^\circ (u \pm v)' = u' \pm v'$

$2^\circ (uv)' = u'v + uv' \quad (Cv)' = Cv'$

$3^\circ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \quad \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

复合函数求导:

$$\text{设} y=f(u) \text{ 在} u_0 \text{ 可导}, u=\varphi(x) \quad u_0=\varphi\left(x_0\right) \text{ 在} x_0 \text{ 可导}$$

$$\text{则：复合函数} y=f[\varphi(x)] \text{ 在} x_0 \text{可导，且} y_x'=y_u'\cdot u_x' \text{ 或} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

反函数求导:

如果函数 $x=\varphi(y)$ 可导，且导数 $\varphi'(y)\neq 0$ ，那么它的反函数 $y=f(x)$ 也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

需要注意的是，初等函数在其定义域内并不一定可导，例如 $y=\sqrt{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续不可导.

例 6 请计算下面几组函数的一阶导数

$$(1) y=x^{a^{a}}+a^{x^{a}}+a^{a^{x}} \qquad (6) y=\frac{2\csc x}{1+x^2}$$

$$(2) y=3\mathrm{e}^x\cos x+\frac{2x}{x+1} \qquad (7) y=\frac{10^x-1}{10^x+1}$$

$$(3) y=2^{\tan^2\frac{1}{x}} \qquad (8) y=x^2\mathrm{e}^x\sin x$$

$$(4) y=\left(1+x^2\right)^{\sin x} \qquad (9) y=\arcsin x+\arccos x$$

$$(5) y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x} \qquad (10) y=\ln\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)$$

解析

$(1) y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot a x^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

对于这种指数较为复杂的情况，可以先把指数整体看作一个函数，用复合函数求导法则先对外面的函数求导，在乘上对指数上函数的求导.

(2)

$$\begin{aligned} y' &= (3\mathrm{e}^x\cos x)'+\left(\frac{2x}{x+1}\right)' \\ &= 3\left[(\mathrm{e}^x)'\cos x+\mathrm{e}^x(\cos x)'\right]+\frac{(2x)'(x+1)-2x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= 3\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)+\frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

注意在计算的过程中不断化简.

(3)

$$
\begin{aligned}
y &= 2^u u = v^2 \quad v = \tan w \quad w = \frac{1}{x} \\
y' &= 2^{\tan^2 \frac{1}{x}} \ln 2 \cdot \left(\tan^2 \frac{1}{x}\right)' \\
&= 2^{\tan^2 \frac{1}{x}} \ln 2 \cdot 2\left(\tan \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\tan \frac{1}{x}\right)' \\
&= 2^{\tan^2 \frac{1}{x}} \ln 2 \cdot 2\left(\tan \frac{1}{x}\right) \cdot \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' \\
&= 2^{\tan^2 \frac{1}{x}} \ln 2 \cdot 2\left(\tan \frac{1}{x}\right) \cdot \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln(x^2+1)} \cdot [\cos x \ln(1+x^2) + \sin x \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x] \\
&= (1+x)^{\sin x} \cdot [\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2}]
\end{aligned}
$$

遇到底数较为复杂的情况，可以通过上面这样的变化把底数转化到指数上去

(5)

$$
\begin{aligned}
y' &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(-2\csc x \cot x) \cdot (1+x^2) - 2\csc x \cdot (2x)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{-2\csc x(1+x^2)\cot x - 4x\csc x}{(1+x^2)^2} \\
&= -\frac{2\csc x[(1+x^2)\cot x + 2x]}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(10^x \ln 10)(10^x+1) - (10^x-1)(10^x \ln 10)}{(10^x+1)^2} \\
&= \frac{2 \cdot 10^x \ln 10}{(10^x+1)^2}
\end{aligned}
$$

(8)

$$y' = 2x\mathrm{e}^x \sin x + x^2\mathrm{e}^x sinx + x^2\mathrm{e}^x \cos x$$

(9)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\ln\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} \end{aligned}$$

例 7 设严格单调函数 $y = f(x)$ 有二阶连续导数，其反函数为 $x = \varphi(y)$ ，且 $f(1) = 1, f'(1) = 2, f''(1) = 3$ ，求 $\varphi''(1)$.

解析

$$\begin{aligned} \varphi''(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-f''}{f'^2} \cdot \frac{1}{f'} \\ &= -\frac{f''}{f'^3} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

2.2.2 高阶导数

$$\text{二阶导数: } (y')' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

$$n \text{ 阶导数: } x^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

高阶导数的和差与一阶相同，且函数乘积的高阶导数满足莱布尼茨公式.

$$\text{Leibniz 公式} \quad (\boldsymbol{uv})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \boldsymbol{u}^{(n-k)} \boldsymbol{v}^{(k)}$$

这个公式的形式类似于函数的二项式展开, 这里举一例来说明:

例 8 $y = \mathrm{e}^x \sin x$, 求$y^{(n)}$

解析 将 $u^{(k)}=\mathrm{e}^x, v^{(n-k)}=\sin\left(x+\dfrac{(n-k)\pi}{2}\right)$ 代入莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$ ，可得：

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= (\mathrm{e}^x\sin x)^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{e}^x\cdot\sin\left(x+\frac{(n-k)\pi}{2}\right) \\
&= \mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x+\frac{(n-k)\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

下面这些常见函数的高阶导数也请大家熟悉.

1. $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$
2. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$
3. $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\quad(\alpha\in R, x>0)$
4. $(\ln(1+x))^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

例 9 求$y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$ 的n 阶导数. $(n=0,1,2,\cdots)$

解析

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{4}{(x+3)(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3} \\
\therefore y' &= \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)} \\
&= (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right), (n=0,1,\cdots)
\end{aligned}
$$

到这里导数相关的知识点基本已经介绍完毕了，不过想要熟练掌握还需要更多的习题，下面我们就利用导数的定义，计算方法来解决这些题目.

2.2.3 导数相关大题 （综合）

例 10 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ ，其中 g 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$

1. 求 a ，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；
2. 求 $f'(x)$ ；
3. 讨论 $f'(x)$ 的连续性

解析

1. 利用连续的定义
$a=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{g(x)-1}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x}\right)=g'(0)$（导数定义）

2. $x\neq 0 f'(x)=\dfrac{x(g(x)+\sin x)-(g(x)-\cos x)}{x^2}$
$x=0 f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}\left(g''(0)+1\right)$

3. $x\neq 0, f'(x)$ 连续，
$x=0,\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(g'(x)+\sin x)-g(x)+\cos x}{x^2}$
$=g''(0)+1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-xg'(0)+g(x)-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\left(g''(0)+1\right)=f'(0)$

在 2 的计算中用到了**洛必达法则（L'Hôpital's Rule）**，在使用时需注意以下几点：

1. 分子分母的极限必须同时为 0（或同时为无穷）

2. 分子分母在 x 的邻域内可导

3. 求导之后比值是一个定值 a，如果求导之后分子分母仍满足 $\dfrac{0}{0}$ 型，则可以继续使用洛必达法则，直到比值为定值停止.

4. 如果洛必达法则求出一个式子极限不存在，并不能说明它的极限真的不存在，只能证明用洛必达法则求不出这个极限值，应尝试其它方法.

例 11 设$f(x)$ 在点$x=1$ 附近有定义，且在点$x=1$ 可导，, $f(1)=0, f'(1)=2$
求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{x^2+x\tan x}$.
解析

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}\\&=f'(1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 12 设$f(x)$ 在x 处可导，a,b 为非零常数，求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+ah\right)-f\left(x_0-bh\right)}{h}$
解析
由于函数可导，我们直接在 x_0 处使用导数定义：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+ah\right)-f\left(x_0-bh\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f\left(x_0+ah\right)-f\left(x_0\right)}{h}+\frac{f\left(x_0\right)-f\left(x_0-bh\right)}{h}\right)=a+b$$

例 13　设 $f(x)$ 在 x_0 处可导,正项数列 α_n,β_n 的极限为 0 ,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(x_0+\alpha_n\right)-f\left(x_0-\beta_n\right)}{\alpha_n+\beta_n}$

解析　原式可以化为: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(x_0+\alpha_n)-f\left(x_0\right)}{\alpha_n}\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}+\dfrac{f\left(x_0\right)-f\left(x_0-\beta_n\right)}{\beta_n}\cdot\dfrac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right)$

这里注意，如果直接越过 $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}$ $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}$ 项，使用导数定义的话，会得到:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}(f'(x_0)\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}+f'(x_0)\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n})\\&=f'(x_0)\end{aligned}$$

虽然结果是正确的，但是这确是一种很常见的错误证明方法. 原因是求极限必须要对整个式子求，不能先对其中一部分求，再把求出的结果带进去对整个求，这样相当于求了两次极限.

正确的做法需要用到微分将函数展开:

$$f\left(x_0+\alpha_n\right)=f\left(x_0\right)+f\left(x_0\right)\alpha_n+o\left(\alpha_n\right)$$

$$f\left(x_n-\beta_n\right)=f\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)\beta_n+o\left(\beta_n\right)$$

带入原式得: $=f'\left(x_0\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{o\left(\alpha_n\right)}{\alpha_n}\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{o\left(\beta_n\right)}{\beta_n}\cdot\dfrac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}=f'\left(x_0\right)$

2.3　隐函数参数方程求导

2.3.1 隐函数求导法　前面研究的函数都可以表示为 $y=f(x)$ 的形式，其中 $f(x)$ 是 x 的解析式，称之为显函数. 在实际问题中，常常碰到这样一类函数，它的因变量 y 与自变量 x 间的对应法则是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的. 如果存在一个定义在某区间上的函数 $y=f(x)$ ，使 $F(x,f(x))\equiv 0$ ，那么称 $y=f(x)$ 为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数. 此时我们说由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数存在.

如果方程中 y 是 x 由该方程确定的隐函数，将它代入方程，并利用链式法则对方程两端关于 x 求导就可以确定隐函数的导数，我们举例来说明:

例 14　求由方程 $y^5+2y^3-y+x=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

解析　方程两端关于 x 求导得:

$$5y^4y'+6y^2y'-y'+1=0$$

从而解得

$$y'=-\frac{1}{5y^4+6y^2-1}$$

借助这种方法，我们也可以计算隐函数的高阶导数，如下例:

例 15　求由方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶导数.

解析　注意到 y 是 x 的函数，两端同时对 x 求导得

$$e^y y' + xy' + y = 0$$

$$y' = -\frac{y}{e^y + x}$$

为了求出隐函数的二阶导数，将方程两端再对 x 求导，注意到 $y' = f'(x)$ 仍是 x 的函数，得

$$e^y (y')^2 + e^y y'' + xy'' + y' + y' = 0$$

$$y'' = -\frac{e^y (y')^2 + 2y'}{e^y + x}$$

代入 $x=0$, 解出 $y''|_{x=0} = \frac{1}{e^2}$

2.3.2 对数求导法 是一种利用隐函数求导法求显函数导数的方式，先对 $y = f(x)$ 两边取对数 (或加绝对值后两边取对数), 然后利用隐函数的求导方法求出导数. 下面举两例说明:

例 16 设 $y = x^{\sin x}(x>0)$ ，求 y'

解析 等式两边取对数，得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$ ，上式两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

类似于这样的幂指型函数（底数指数上都有变量 x），可以采用对数求导法.

例 17 $y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$, 求 y'

解析 先将函数变形为 $y = \left(\frac{x-5}{(x^2+2)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{5}}$

，根据对数运算法则 $\ln y = \frac{1}{5}\left[\ln(x-5) - \frac{1}{3}\ \ln\left(x^2+2\right)\right]$

两边对 x 求导

等式左边 $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$

等式右边 $\frac{1}{5}[\ln(x-5)]' = \frac{1}{5} \times \frac{1}{x-5}\ \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{3}\ln\left(x^2+2\right)\right]' = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{2x}{x^2+2}$

$y' = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}} \times \frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-5} - \frac{2x}{3\left(x^2+2\right)}\right]$

由此可知，含有较多乘除，开方，乘方运算的函数也可以使用对数求导法.

2.3.3 参数方程求导法

若 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 可确定 y 与 x 间的函数关系，称此函数为由此参数方程所确定的函数. 设函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,

$$\therefore y=\psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$$

再设函数 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi(t)\neq 0$ ，由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad 即 \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

故在求参数方程的导数时，对 $y(t), x(t)$ 两个函数分别求导再相比即可, 如下例:

例 18 $\begin{cases} x=\dfrac{2at}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}$ (a 为常数);

解析

$$x'(t)=\frac{2a\left(1+t^2\right)-2at(2t)}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$y'(t)=\frac{6at\left(1+t^2\right)-3at^2(2t)}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6at}{2a-2at^2}=\frac{3t}{1-t^2}$$

$$代入\ t=2,\ 得\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=-2$$

在参数方程求导的题目中，我们还会经常遇到极坐标方程，也可以当作参数方程来求导，这里举一例:

例 19 设曲线 Γ 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所确定，试求该曲线上任意一点的切线斜率，并将所得公式用于求心形线 $r=a(1-\cos\theta)(a>0)$ 上任一点的斜率.

解析 由极坐标与直角坐标转换

$x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$

根据参数方程求导 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta, \quad \dfrac{dy}{d\theta}=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta$

所以切线斜率 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$
带入心型线可得：先求导 $r'(\theta)=a\sin\theta$
代入公式：$\dfrac{a\sin\theta\cdot\sin\theta+a(1-\cos\theta)\cos\theta}{a\sin\theta\cdot\cos\theta-a(1-\cos\theta)\sin\theta}$
斜率为 $\dfrac{\cos\theta-\cos2\theta}{\sin2\theta-\sin\theta}$

2.4 微分

2.4.1 微分的概念 设有函数 $f:U(x_0)\rightarrow\mathbf{R}$ 若存在一个关于 Δx 的线性函数 $L(\Delta x)=a\Delta x(a\in\mathbf{R}$ 为与 Δx 无关的常数)，使

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+o(\Delta x)$,

则称 f 在 x_0 处可微，并称 $a\Delta x$ 为 f 在 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}f(x_0)=a\Delta x$. 若函数用 $y=f(x)$ 表示，则可记作 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=a\Delta x$ 、、这一点放在几何上更好理解, 函数 y=f(x) 在 x_0 处的微分在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处切线上点的纵坐标对应于横坐标改变量 Δx 的改变量, 这也是微分的几何意义.
微分的定义式有的时候可以直接带入题目中进行使用，具体可参考例 13.
微分的运算法则以及一些常见函数的微分与前面给出的导数基本类似，只是形式上略有区别，这里不再赘述.

2.4.2 微分形式不变性 设有可微函数 y=f(u) ，若 u 是自变量，根据微分的定义，则有

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$$

.

若 u 又是另一个变量 x 的可微函数 $u=g(x)$ ，则由链式法则易知，复合函数 $y=f(g(x))$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$$

因为 $g'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ ，所以无论 u 是自变量还是另一个变量的函数，函数 $y=f(u)$ 的微分都保持同一形式，这一性质称为微分形式不变性，它是复合函数求导法则在微分中的反映. 由此，复合函数的微分既可以利用链式法则求出导数再乘 $\mathrm{d}x$ 得到，也可以利用微分形式不变性，下面举一例子说明：
例 20 求函数 $y=\sin(2x+1)$ 的微分.
解析 令 $u=2x+1$

$$\mathrm{d}y=\cos u\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\cdot2\mathrm{d}x=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x$$

2.4.3 微分近似计算

当 $|\Delta x|=|x-x_0|$ 很小时,

$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

此式表明，用微分近似代替改变量 Δy ，实质上就是在 x_0 附近（微小局部）用线性函数 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 近似代替非线性函数 $y=f(x)$, 这种思想也叫局部线性化，它可以用来计算函数在某点的近似值，如下面的例子:

例 21 求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解析 为计算 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值，取 $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$\sqrt[3]{x}\approx\sqrt[3]{x_0}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}(x-x_0)$$

$$x_0=1,x=1.02$$

$$\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\times 0.02\approx 1.0067$$

2.5 微分中值定理

2.5.1 极值

设有函数 $f(x):I\to R,x_0\in I$. 若存在 $\delta>0$ ，使得对于 $\forall x\in U(x_0,\delta)\subset I$ ，都有

$$f(x)\leq f(x_0)\quad(f(x)\geq f(x_0))$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大（小）值. 极大和极小值统称为极值. x_0 称为极值点.

2.5.2 费马引理

若函数 $f(x):(a,b)\to R\ x_0\in(a,b)$ 取得极值且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=0$

注意，费马引理仅适用于函数在这一点可导的情况，函数在不可导点也可能取到极值(按照极值的定义)，例如: $y=|x|$ 在 $x=0$ 处.

2.5.3 三个中值定理

(注意成立条件)

罗尔（Rolle）定理如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$ ，那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ ，使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零，即 $f'(\xi)=0$

拉格朗日（Lagrange）中值定理如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ ，使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立.

柯西（Cauchy）中值定理如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均不为零，那末在 (a,b) 内至少有一点

$\xi(a<\xi<b)$ ，使等式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 成立.

例 22 证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

解析 设 $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉氏定理的条件，

$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),(0<\xi<x)$

$\because f(0)=0,f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 由上式得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又 $\because 0<\xi<x\Rightarrow 1<1+\xi<1+x\Rightarrow\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$,

$\therefore\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$, 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

例 23 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ ，使 $f'(\xi)=\mathbf{2}\xi[f(1)-f(0)]$

解析 结论可变形为：$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\dfrac{f'(x)}{(x^2)}\right| x=\xi$. 设$g(x)=x^2$,

则 $f(x),g(x)$ 在 [0,1] 上满足柯西中值定理的条件，$\therefore$ 在（0，1）内至少存在一点 ξ ，有 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$ 即$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

例 24 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，且$f(a)=f(b)=1$ ，试证存在$\xi,\eta\in(a,b)$ ，使$\mathrm{e}^{\eta-t}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$

解析 设 $F(x)=e^xf(x)$ ，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$y=e^x$ 在 R 上连续可导，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导.

由拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$ ，使得 $F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)$

已知 $f(a)=f(b)=1$ ，则 $F(a)=e^af(a)=e^a,F(b)=e^bf(b)=e^b$ ，且 $F'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]$ ，所以 $e^b-e^a=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)](b-a)$

设 $g(x)=e^x,g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$

因为 $g'(x)=e^x$ ，所以 $e^b-e^a=e^\xi(b-a)$

代入上面式子，整理即可得到结论.

此例说明，**构造函数** $F(x)$ 是此类证明的关键步骤，本题中用到的函数是这类问题的经典函数，读者可以进行积累.

下面这个例子中的构造也经常用到：

例 25 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内上连续，在 (a,b) 内可导，若 $\mathbf{0}<\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ ，则在 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 内存在一点 ξ ，使 $af(b)-bf(a)=[f(\xi)-\xi f'(\xi)](a-b)$

解析 构造函数 $F(x)=xf(x)$, 其余证明同上题目.

例 26 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$ ，证明：在 $[0,1]$ 存在两点 x_1 , x_2 ，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$

$\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$\therefore \exists \eta$ 使得 $f(\eta)=\dfrac{1}{2}$
由拉格朗日中值定理:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{f(\eta)-f(0)}{\eta}=f'(x_1) & x_1\in(0,\eta)\\ \dfrac{f(1)-f(\eta)}{1-\eta}=f'(x_2) & x_2\in(\eta,1)\end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$$

2.6 习题

1 设$y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$, 求$dy$.

2 设函数$y=y(x)$ 由方程$e^y+6xy+x^2-1=0$ ，求$y'(0)$.

3 设函数$y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4 设函数$f(x)=\begin{cases}e^{2x}+b & x\le 0\\ \sin ax & x>0\end{cases}$ ，问a,b 为何值时，$f(x)$ 在$x=0$ 处可导？并求$f'(x)$.

5 设$y^x=e^{x+y}$, 求$\mathrm{d}y$.

6 设$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$, 求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ ，证明:(1) $\exists\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,使得 $f(\xi)=\xi$ 2 $\forall\lambda\in R$ $\exists\eta\in(0,\xi)$,使得 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$.

2.7 答案

1 $\mathrm{d}y = \left(\arctan x + \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \arctan x \mathrm{d}x$

2 $y'e^y + 6\left(y + xy'\right) + 2x = 0 \quad y' = \dfrac{-2x-6y}{6x+e^y}$ 又$y(0)=0 \quad \therefore y'(0) = 0$

3 $\dot{x} = 3t^2+9 \quad \dot{y} = 2t-2 \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{2t-2}{3t^2+9} \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{2t-2}{3t^2+9}\right)'/\dot{x} = \dfrac{-6t^2+12t+18}{\left(3t^2+9\right)^3}$

4

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \sin ax = 0 \quad \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} e^{2x}+b = b+1 \quad \therefore b+1 = 0 \Rightarrow b = -1$

$f(0) = 0 \quad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin ax}{x} = a$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2 \quad \therefore a = 2 \quad f'(0) = 2$

当 $x > 0$ 时，$f'(x) = 2\cos 2x$ ；当 $x < 0$ 时，$f'(x) = 2e^{2x}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2\cos 2x & x > 0 \\ 2e^{2x} & x \le 0 \end{cases}$$

5 $\ln y^x = \ln e^{x+y} \Rightarrow x\ln y = x + y \Rightarrow \ln y + \dfrac{x}{y}y' = 1 + y' \Rightarrow \mathrm{d}y = \dfrac{y(\ln y - 1)}{y-x}\mathrm{d}x$

6 $\dot{x}=2t,\dot{y}=-\sin t$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t}\right)'/\dot{x}=-\frac{1}{4}\frac{t\cos t-\sin t}{t^3}=$
$\frac{2}{\pi^3}$

7 （1）令 $F(x)=f(x)-x$ $\because F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$ $F(1)=f(1)-1=$
$-1<0$ $F\left(\frac{1}{2}\right)$ $[0,1]$ $(0,1)$ 上可导 $\therefore \exists\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ $F(\xi)=0$ $f(\xi)=\xi$
（2）令 $G'(x)=[f'(x)-\lambda f(x)+\lambda x-1]\,e^{-\lambda x}$ $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$ $G(0)=f(0)=$
0 $G(\xi)=e^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]=0$ 由罗尔定理知：$\exists\eta\in(0,\xi)$ $G'(x)=0$
$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$