# 2024-2025 数学 II 第六题和第八题另解

少年班 2307 刘思畅

**六.** (15 分) 设 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$. 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 $b$ 的取值范围.

**解**　显然 $a = -2$.（对此有疑问的请参见张杰铭同学的证明）
代入得

$$f(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x + b(x-1)^3$$

求导并化简，得

$$f'(x) = (x-1)^2(3b + \frac{2}{1-(x-1)^2})$$

令

$$g(x) = 3b + \frac{2}{1-(x-1)^2}$$

下面我们对 $b$ 的取值分类讨论:
(1) 当 $b < -\frac{2}{3}$ 时,

$$g(1) = 3b + 2 < 0$$

显然，$g$ 在 $x = 1$ 处连续，故 $\exists \delta > 0$, 使得

$$g(x) < 0, \forall x \in (1, 1+\delta)$$

故当 $1 < x < 1 + \delta$ 时,

$$f'(x) = (1-x)^2 g(x) < 0$$

令 $t = \max(1 + \frac{\delta}{2}, \frac{3}{2})$. 显然，$1 < t < \max(2, 1+\delta)$. 由 $f(1) = -2$,

$$f(t) < -2$$

因此，$b < -\frac{2}{3}$ 时不满足题目条件.
(2) 当 $b \geq -\frac{2}{3}$ 时,

$$g(1) = 3b + 2 \geq 0$$

显然，$g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上严格单调增.
故当 $1 < x < 2$ 时,

$$g(x) > 0$$

$$f'(x)=(1-x)^2g(x)>0$$

由 $f(1)=-2$,

$$f(x)>-2, \forall x\in(1,2)$$

注意到

$$f(x)=-4-f(2-x)$$

不难验证当 $x\in(0,1)$ 时,

$$f(x)<-2$$

因此，当 $b\geq-\frac{2}{3}$ 时，$f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$.

综上所述，$b$ 的取值范围是 $[-\frac{2}{3},+\infty)$.

**八.** (15 分) 设 $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $a_{ij}\geq 0$, $i,j=1,2,\cdots$，设对于任意的 $i=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛，并且级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛. 证明：对于任意的 $j=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛，并且 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$.

**证明** 我们只证明 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$.（级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛的证明请参见张杰铭同学的文件）

设 $k\in\mathbb{N}^*$. 由极限的四则运算,

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}a_{ij}\right)=\lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{l}a_{ij}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)&=\sum_{j=1}^{k}\left(\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}a_{ij}\right)\\&=\lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{l}a_{ij}\right)\\&=\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\right)\\&=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\right)\\&\leq\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)\end{aligned}$$

故

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)\leq\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$$

同理可得

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)\leq\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$$

□