# 2024-2025 数学 II 解答

少年班 2302 张杰铭

2025.6.9

**1** (10 分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$. 记

$$\omega_n(x_0)=\sup\left\{|f(x)-f(y)|:|x-x_0|<\frac{1}{n},|y-x_0|<\frac{1}{n}\right\},\ n=1,2,\cdots$$

证明：$f$ 在 $x_0$ 点连续当且仅当 $\lim_{n\to+\infty}\omega_n(x_0)=0$.

**证明** 当 $f$ 在 $x_0$ 点连续时：
对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $x,y\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{2},\ |f(y)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{2}$$

于是存在 $N=[\frac{1}{\delta}]$，使得当 $n>N$ 时有

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(y)-f(x_0)|<\epsilon,\ \forall|x-x_0|<\frac{1}{n},|y-x_0|<\frac{1}{n}$$

故 $\epsilon$ 是 $\{|f(x)-f(y)|:|x-x_0|<\frac{1}{n},|y-x_0|<\frac{1}{n}\}$ 的一个上界，这就是说当 $n>N$ 时有 $\omega_n(x_0)\le\epsilon$，于是由极限定义知 $\lim_{n\to+\infty}\omega_n(x_0)=0$.

当 $\lim_{n\to+\infty}\omega_n(x_0)=0$ 时：
我们固定 $y=x_0$，于是对任意 $\epsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^+$，使得当当 $n>N$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)|\le\omega_n(x_0)<\epsilon$$

于是取 $\delta=\frac{1}{N+1}$，则对任意 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$，于是知 $f$ 在 $x_0$ 点连续. □

**2** (10 分) 证明如下的单调收敛定理：
设 $a_n\in\mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$, $\{a_n\}$ 有界. 如果 $\{a_n\}$ 单调增，则 $\{a_n\}$ 收敛.

**证明** 我们用确界存在定理证明这一命题.
由确界存在定理，我们设 $a=\sup\{a_n\}$. 下证 $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$.
事实上，对任意 $\epsilon>0$，由于 $a=\sup\{a_n\}$，存在 $N\in\mathbb{N}^+$ 使得 $a_N>a-\epsilon$. 于是当 $n>N$ 时，我们有

$$a-\epsilon<a_N\le a_n\le a$$

故而 $|a_n-a|<\epsilon$. 由极限定义知 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$. □

**3** (10 分) 证明如下的级数收敛的比率判别法：
设 $a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ n = 1, 2, \cdots,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为正项级数且 $l < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；如果 $l > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

**证明** 当 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为正项级数且 $l < 1$ 时：
由于 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l < 1$，由极限的保序性，存在 $N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+l}{2}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \\ &< \sum_{n=1}^{N} a_n + a_{N+1} + \frac{1+l}{2} a_{N+1} + (\frac{1+l}{2})^2 a_{N+1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n + \frac{2}{1-l} a_{N+1}\end{aligned}$$

故而正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的部分和数列有上界，则收敛.

当 $l > 1$ 时：
容易知道存在 $N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时有

$$|a_{n+1}| \geq |a_n|$$

于是对任意 $n > N$，$|a_n| \geq |a_{N+1}|$，而级数收敛要求 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$，矛盾！

□

**4** (10 分) 设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \cdots$. 证明：如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

**证明** 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛，由 Cauchy 收敛原理，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^+$，使得对任意 $n > N,\ p \in \mathbb{N}^+$，有

$$||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|| < \epsilon$$

于是对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^+$，使得对任意 $n > N,\ p \in \mathbb{N}^+$，有

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq ||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|| < \epsilon$$

这就是说 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. □

**5** (15 分) 设 $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \varnothing$. 记

$$d(x) = \inf\{|x - y| : y \in A\},\ x \in \mathbb{R}$$

设 $x_0 \in \mathbb{R},\ d(x_0) > 0$. 证明：如果 $d$ 在 $x_0$ 点可导，则 $|d'(x_0)| = 1$.

**证明** 我们先给出这样一个引理:
设 $\mathbb{R}$ 的非空子集 $A,B$ 下有界，则

$$\inf A\cup B=\min\{\inf A,\ \inf B\}$$

引理的证明：一方面，对任意 $x\in A\cup B$，我们有 $x\in A$ 或 $x\in B$，即 $x\geq\inf A$ 或 $x\geq\inf B$，于是 $x\geq\min\{\inf A,\ \inf B\}$；
另一方面，不妨设 $\inf A\leq\inf B$. 于是对任意 $\epsilon>0$，存在 $x_0\in A$ 使得 $x_0<\inf A-\epsilon$，于是存在 $x_0\in A\cup B$，$x_0<\inf A-\epsilon=\min\{\inf A,\ \inf B\}-\epsilon$.

回到原题. 记 $d=d(x_0)>0$，于是对任意 $y\in U(x_0,d)$，有 $y\notin A$.
以下讨论中 $x\in U(x_0,d)$. 设

$$S=A\cap(-\infty,x),\ T=A\cap(x,+\infty)$$

我们先证 $\inf\{|x-y|:y\in S\}=x-\sup S$. 一方面，由于对任意 $y\in S$，有 $y\leq\sup S$，则 $|x-y|=x-y\geq x-\sup S$. 另一方面，对任意 $\epsilon>0$，存在 $y_0\in S$ 使得 $y_0>\sup S-\epsilon$，则 $|x-y_0|=x-y_0<x-\sup S+\epsilon$.

故 $\inf\{|x-y|:y\in S\}=x-\sup S$. 同理有 $\inf\{|x-y|:y\in T\}=\inf T-x$. 由于 $A=S\cup T$，我们知道

$$\{|x-y|:y\in A\}=\{|x-y|:y\in S\}\cup\{|x-y|:y\in T\}$$

于是由引理得

$$d(x)=\min\{x-\sup S,\ \inf T-x\}$$

进而有
(1) 当 $x_0=\frac{\sup S+\inf T}{2}$ 时，$d'_-(x_0)=1\neq d'_+(x_0)=-1$，则 $d$ 在 $x_0$ 点不可导；
(2) 当 $x_0<\frac{\sup S+\inf T}{2}$ 时，存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时有 $d(x)=x-\sup S$，从而 $d'(x_0)=1$；
(3) 当 $x_0>\frac{\sup S+\inf T}{2}$ 时，同理有 $d'(x_0)=-1$.
于是便证明了：如果 $d$ 在 $x_0$ 点可导，则 $|d'(x_0)|=1$. □

**6** (15 分) 设 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$. 若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$, 求 $b$ 的取值范围.
**解** 我们先证明 $f(1)=-2$. 由题设知 $f(1)\leq-2$. 假设 $f(1)<-2$，由于 $f$ 连续，则存在 $\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时有 $f(x)<-2$，于是 $f(1+\frac{\delta}{2})<-2$，矛盾！故 $f(1)=-2$. 进而得 $a=-2$. 令 $t=x-1$，于是得

$$f(t)=\ln\frac{1+t}{1-t}-2t+bt^3-2$$

进而命题“$f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$”等价于“$f(t)>0$ 当且仅当 $0<t<1$”.

事实上，令 $g(t)=f(t)-2$，则显见 $g$ 是奇函数. 于是我们只要使 $t>0$ 时有 $f(t)>0$ 即可. 我们以下证明 $b$ 的取值范围是 $[-\frac{2}{3},+\infty)$.
作 $g$ 在 $t=0$ 处带有 Peano 余项的三阶 Taylor 公式：

$$g(t)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{6}g'''(0)+o(t^3)$$

代入并计算得

$$g(t)=(6b+4)t^3+o(t^3)$$

当 $b<-\frac{2}{3}$ 时，我们有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^3}=6b+4<0$$

由极限的保号性，存在 $\delta>0$ 使得当 $0<t<\delta$ 时有 $f(t)<0$. 矛盾!
当 $b=-\frac{2}{3}$ 时，计算知 $g(0)=g'(0)=g''(0)=g'''(0)=0$，而

$$g'''(t)=\frac{2}{(1+t)^3}+\frac{2}{(1-t)^3}-4$$

事实上，由 Hölder 不等式

$$\{[\frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{4}}}]^4+[\frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{4}}}]^4\}^{\frac{1}{4}}\cdot\{[(1+t)^{\frac{3}{4}}]^{\frac{4}{3}}+[(1-t)^{\frac{3}{4}}]^{\frac{4}{3}}\}^{\frac{3}{4}}$$

$$\geq\frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{4}}}\cdot(1+t)^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{4}}}\cdot(1-t)^{\frac{3}{4}}$$

不等式在 $t=0$ 处取等. 化简得到

$$g'''(t)=2[\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{1}{(1-t)^3}-2]>0$$

对任意 $t\in(0,1)$ 成立.
由 Lagrange 中值定理，对任意 $t\in(0,1)$，存在 $\xi\in(0,t)$ 使得

$$g''(t)=\xi g'''(\xi)>0$$

类似地得到对任意 $t\in(0,1)$，$g(t)>0$. 于是 $b=-\frac{2}{3}$ 符合题意.
当 $b>-\frac{2}{3}$ 时，对任意 $t\in(0,1)$，有

$$g(t)=g|_{b=-\frac{2}{3}}(t)+(b+\frac{2}{3})t^3>0$$

综上所述，$b$ 的取值范围是 $[-\frac{2}{3},+\infty)$.

**7** (15 分) 设 $x_n,x\in\mathbb{R}^2$, $n=1,2,\cdots$，这里 $\mathbb{R}^2$ 为平面点集。如果 $\lim_{n\to+\infty}|x_n-x|=0$，称 $x$ 是点列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $x=\lim_{n\to+\infty}x_n$. 证明：如果 $u_n,v_n,u,v\in\mathbb{R}^2$, $n=1,2,\cdots$，$u=\lim_{n\to+\infty}u_n$, $v=\lim_{n\to+\infty}v_n$，则 $u\cdot v=\lim_{n\to+\infty}u_n\cdot v_n$.

**证明** 对任意 $n\in\mathbb{N}^+$，设 $u_n=(u_n^{(1)},u_n^{(2)})$，$v_n=(v_n^{(1)},v_n^{(2)})$. 又设 $u=(u^{(1)},u^{(2)})$，$v=(v^{(1)},v^{(2)})$.

由于 $u=\lim_{n\to+\infty}u_n$，则对任意 $\epsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时有

$$|u_n-u|=\sqrt{(u_n^{(1)}-u^{(1)})^2+(u_n^{(2)}-u^{(2)})^2}<\epsilon$$

于是有

$$|u_n^{(1)}-u^{(1)}|\le\sqrt{(u_n^{(1)}-u^{(1)})^2+(u_n^{(2)}-u^{(2)})^2}<\epsilon$$

这就是说 $\lim_{n\to+\infty}u_n^{(1)}=u^{(1)}$. 同理有 $\lim_{n\to+\infty}u_n^{(2)}=u^{(2)}$. 类似地我们得到 $\lim_{n\to+\infty}v_n^{(1)}=v^{(1)}$，$\lim_{n\to+\infty}v_n^{(2)}=v^{(2)}$. 由极限的运算法则知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}u_n\cdot v_n&=\lim_{n\to+\infty}u_n^{(1)}\cdot\lim_{n\to+\infty}u_n^{(2)}+\lim_{n\to+\infty}v_n^{(1)}\cdot\lim_{n\to+\infty}v_n^{(2)}\\&=u^{(1)}\cdot v^{(1)}+u^{(2)}\cdot v^{(2)}=u\cdot v\end{aligned}$$

$\square$

**8** (15 分) 设 $a_{ij}\in\mathbb{R}, a_{ij}\ge 0, i,j=1,2,\cdots$，设对于任意的 $i=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛，并且级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛. 证明：对于任意的 $j=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛，并且 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$.

**证明** 先证对于任意的 $j=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛.

事实上，我们取定 $j_0$，可以得到

$$\forall k\ge j_0,\ a_{ij_0}\le\sum_{j=1}^{k}a_{ik}$$

由极限的保序性，我们得到

$$a_{ij_0}\le\lim_{k\to+\infty}\sum_{j=1}^{k}a_{ik}=\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ik}$$

由于级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛，由比较判别法知对于任意的 $j=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛.

再证级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛，并且 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$.

设 $f:\mathbb{N}_+^2\to\mathbb{N}_+$，$(i,j)\mapsto\frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2}+i$，我们证明 $f$ 是双射.

先证 $f$ 是单射. 事实上，我们取 $\frac{(i_1+j_1-1)(i_1+j_1-2)}{2}+i_1=\frac{(i_2+j_2-1)(i_2+j_2-2)}{2}+i_2$. 假设 $i_1+j_1\ne i_2+j_2$，则不妨 $i_1+j_1>i_2+j_2$，即得 $i_1+j_1\ge i_2+j_2+1$，于是

$$\begin{aligned}&\frac{(i_1+j_1-1)(i_1+j_1-2)}{2}+i_1\ge\frac{(i_2+j_2)(i_2+j_2-1)}{2}+i_1\\=&\frac{(i_2+j_2-1)(i_2+j_2-2)}{2}+i_2+j_2-1+i_1>\frac{(i_2+j_2-1)(i_2+j_2-2)}{2}+i_2\end{aligned}$$

这与 $\frac{(i_1+j_1-1)(i_1+j_1-2)}{2}+i_1=\frac{(i_2+j_2-1)(i_2+j_2-2)}{2}+i_2$ 矛盾！于是 $i_1+j_1=i_2+j_2$，进而 $(i_1,j_1)=(i_2,j_2)$，这就说明了 $f$ 是单射.

再证 $f$ 是满射. 事实上, $\forall n \in \mathbb{N}_+,\ \exists k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq 2,\ s.t.\ \frac{(k-1)(k-2)}{2} < n \leq \frac{k(k-1)}{2}$.
由于 $\frac{k(k-1)}{2} - n \geq 1$ 且 $\frac{k(k-1)}{2} - n \leq \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-1)(k-2)}{2} = k-1$，我们取

$$i = \frac{k(k-1)}{2} - n,\ j = k - i$$

则 $(i,j) \in \mathbb{N}_+^2$ 且 $f(i,j) = n$. 这就说明了 $f$ 是满射.
回到原题，对任意正整数 $n$，记 $f^{-1}(n) = (i_n, j_n)$. 又记 $a'_n = a_{i_n j_n}$. 由于 $f$ 是双射，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ 是 $\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}\right)$ 的更序级数，则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}\right)$$

同理可得级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}\right)$ 收敛，并且

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}\right)$$

$\square$