2024-2025 数学 II

整理：少年班 2302 张杰铭

2025.6.9

1 (10 分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$. 记

$$\omega_n(x_0)=\sup\left\{|f(x)-f(y)|:|x-x_0|<\frac{1}{n},|y-x_0|<\frac{1}{n}\right\},\ n=1,2,\cdots$$

证明：f 在 x_0 点连续当且仅当 $\lim_{n\to+\infty}\omega_n(x_0)=0$.

2 (10 分) 证明如下的单调收敛定理：
设 $a_n\in\mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$, $\{a_n\}$ 有界. 如果 $\{a_n\}$ 单调增，则 $\{a_n\}$ 收敛.

3 (10 分) 证明如下的级数收敛的比率判别法：
设 $a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$, $n=1,2,\cdots$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=l$. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为正项级数且 $l<1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛；如果 $l>1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

4 (10 分) 设 $a_n\in\mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$. 证明：如果 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

5 (15 分) 设 $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\varnothing$. 记

$$d(x)=\inf\{|x-y|:y\in A\},\ x\in\mathbb{R}$$

设 $x_0\in\mathbb{R}$, $d(x_0)>0$. 证明：如果 d 在 x_0 点可导，则 $|d'(x_0)|=1$.

6 (15 分) 设 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$. 若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$, 求 b 的取值范围.

7 (15 分) 设 $x_n,x\in\mathbb{R}^2$, $n=1,2,\cdots$，这里 $\mathbb{R}^2$ 为平面点集。如果 $\lim_{n\to+\infty}|x_n-x|=0$，称 x 是点列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $x=\lim_{n\to+\infty}x_n$. 证明：如果 $u_n,v_n,u,v\in\mathbb{R}^2$, $n=1,2,\cdots$，$u=\lim_{n\to+\infty}u_n$, $v=\lim_{n\to+\infty}v_n$，则 $u\cdot v=\lim_{n\to+\infty}u_n\cdot v_n$.

8 (15 分) 设 $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $a_{ij}\geq 0$, $i,j=1,2,\cdots$，设对于任意的 $i=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛，并且级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛. 证明：对于任意的 $j=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}$ 收敛，级数 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$ 收敛，并且 $\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}\right)$.