

这是 2021 级-2023 级少年班的数试加试题. 感谢所有对这些试题的回忆与整理作出贡献的学长们, 也预祝同学们学业有成.

欢迎加入数学组交流分享群 2.0: 298492073

1 2021 级

1 $f_1 = 1, f_2 = 2, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, 求 $\{f_n\}$ 的通项.

2 $0 < \theta < \pi$, 求证

$$\sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\theta}{k} \leq 1.$$

3 $a, b, c \in \mathbb{C}, a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 0, a^3 + b^3 + c^3 = 3$, 求 $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}$.

4 函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x-1)+f(x+1)}{2} \geq f(x)$, 求证

$$\frac{f(0) + f(n+1)}{2} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k).$$

5 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 满足 $\forall z, w \in \mathbb{C}, f(f(z) + w) = 2z + f(f(w) - z)$, 求证:
 $\exists a \in \mathbb{C}, f(a) = 0$.

6 $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n, \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \prod_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n f_k(x_k)$, 求证 φ 无界.

2 2022 级

1 设 $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+$. 证明:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos k\theta = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}$$

2 设 $M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. 证明: $f: z \mapsto \frac{z}{z+1}$ 是 M 到 M 的双射.

3 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T > 0$ 为 f 的一个周期, $M > 0$. 若

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

证明:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{MT}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4 设 $X \neq \emptyset$, R 是 X 上的一个关系. 证明: 不存在 $y \in X$, 使得

$$\{x \in X : (x, x) \notin R\} = \{x \in X : (x, y) \in R\}.$$

5 设 $a < b < c$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ 为两个初等函数, 且 $f(b) = g(b)$. 设 $F: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ g(x), & x \in (b, c] \end{cases}$$

试问: F 是否一定为 $[a, c]$ 上的一个初等函数?

6 设 A, B 为两个非空有限集, $f: A \rightarrow B$, 设

$$M := \{(a, b) \in A^2 : f(a) = f(b)\}$$

证明:

$$|M| \geq \max\{|A|, \frac{|A|^2}{|B|}\}.$$

3 2023 级

1 设 $A_1 = B_1$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$; $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $\forall n \geq 2$. 求证: B_n 两两不相交且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

2 设可数集 $A, B \subseteq \mathbb{R}$. 求证: $\exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall a \in A$, $x + a \notin B$.

3 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为实数列, 且它们同时单调增加或减少, $M, N \in \mathbb{N}^*$, 求证:

$$\left(\sum_{k=M+1}^{M+N} a_k\right) \left(\sum_{k=M+1}^{M+N} b_k\right) \leq N \sum_{k=M+1}^{M+N} a_k b_k.$$

4 设 f, g 为初等函数, $s = \max\{f, g\}$, $t = \min\{f, g\}$. 求证: s, t 为初等函数.

5 设 $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$. 问 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n + n}$ 是否发散?

6 设 A, B 为两个非空有限集, 映射 $f: A \rightarrow B$. 设集合

$$S = \{(a, a') : f(a) = f(a')\} \subseteq A \times A$$

求证:

$$|S| \geq \max\left\{|A|, \frac{|A|^2}{|B|}\right\}.$$