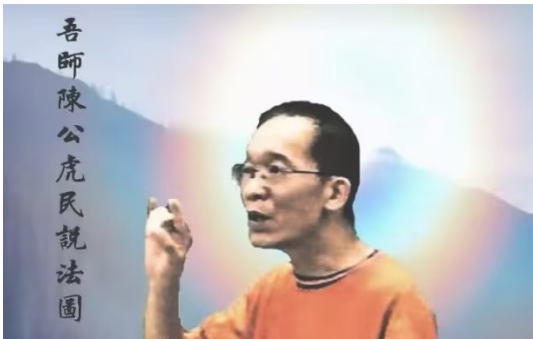




数学 II 课堂笔记

整理人：电气钱 2601/少年班 2407 蒋尚宇

组织：长安小师赛
时间：July 21, 2026
版本：1.3



前言



笔者认为工夫在平时有一定的道理，因为期末周可能考试排得十分紧密，导致没有太多时间复习数学。从本人经验来看，复习的大部分时间都是在背诵命题的证明过程。如果能熟记重点命题的证明，仅就针对预科二课程考试来看，取得高分并不困难，但想取得满分还是需要一定的数学思维。

本人数学功底较弱，但是通过熟练的背诵，把最后一题放掉之后拿到了 96 分。所以，如果想取得更好的综合成绩，而不是追求在数学上的提升，我认为还是应该把重心放在语文上。

——蒋尚宇



图 1: 藏巴拉上师

本笔记由蒋尚宇在数学 II 课程学习期间的课堂手写笔记整理而成，内容涵盖数列极限、连续函数、导数、微分中值定理、高阶导数、Taylor 展式、函数的单调性与极值、凸函数及 Lipschitz 连续等，并收录了部分作业与课堂讲解。整理这份笔记，一方面是为了保存自己的学习记录，另一方面也希望为之后修读本课程的学弟学妹提供一份便于预习、复习和查阅的参考资料，减少重复整理资料所花费的时间。

本笔记主要依据数学 II 课程的课堂板书、教师讲解和个人记录编写。电子化过程中，我们对部分符号、格式和章节顺序进行了统一。但本笔记并非官方讲义，也不能替代教材、课堂学习和独立练习。不同学期、不同教师的授课安排、作业要求和考试范围可能有所变化，具体内容应以当学期任课教师的通知为准。

数学课程中的许多内容，仅仅记住结论往往是不够的。一个定理在什么条件下成立、证明过程中为什么要进行某一步构造、遇到类似问题时如何想到相应的方法，通常比最终得到的公式更为重要。因此，本笔记在整理课堂内容的同时，也尽量保留了证明过程、推导思路、典型例题和部分课堂补充说明，希望它不仅是一份期末复习资料，也能够帮助读者重新梳理课程的逻辑结构。

建议大家使用本笔记时，先独立思考，再参考其中的证明和解答。对于定理，不仅要记住结论，还应理解其成立条件、证明思路以及适用范围；对于作业和例题，应尽量先自行完成，再对照笔记检查和订正。文末所附期末试卷为考后回忆整理，大家可以借助这张试卷了解 26 年的考试难度水平，从而更好的进行期末复习。

尽管整理过程中进行了检查，笔记中仍可能存在公式录入错误、条件遗漏、符号混用或证明不够严谨之处。若发现问题，欢迎注明版本、页码、章节和具体修改建议，通过少学组与编辑人联系。也希望后续使用者能够共同补充、校对和完善这份资料。

感谢藏巴拉上师的讲授，也感谢所有参与校对和提出建议的同学。愿这份笔记能为大家的学习提供一些帮助，也希望大家都能得偿所愿，进入心仪的专业。

目录

整理说明	i	第六章 第二次作业	59
第一章 数列极限	1	第七章 高阶导数	63
1.1 基本极限与平均值	1	7.1 高阶导数的定义	63
1.2 练习	3	7.2 高阶导数的运算法则	65
1.3 Stolz 定理与递推数列	4	7.3 微分中值定理习题	68
第二章 连续函数	7	第八章 Taylor 展式	71
2.1 连续性的定义与基本性质	7	第九章 第三次作业	76
2.2 紧致性、极值与介值定理	10	第十章 函数的单调性与极值	81
2.3 连续函数的反函数	14	10.1 极值点与极值	83
2.4 间断点与单边极限	19	第十一章 凸函数	88
2.4.1 左极限和右极限	19	第十二章 Lipschitz 连续	92
2.4.2 不连续点类型	22	第十三章 第四次作业	96
2.5 单调函数的极限	26	第十四章 凸函数的进一步性质	103
第三章 第一次作业	35	14.1 凸函数判别法	104
第四章 导数	44	第十五章 第五次作业	112
4.1 导数的定义	45	附录 A 数学 II 期末试卷 (2026)	120
4.2 导数的增量表示	48		
4.3 求导法则	49		
第五章 微分中值定理	54		
5.1 中值定理及其应用	54		

第一章 数列极限

1.1 基本极限与平均值

1. $|a| > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0$ 。
2. $|a| > 1$ ($a > 1$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ 。

证: 记 $a = 1 + h$ 。

$$a^n = (1 + h)^n > \frac{1}{2}n(n-1)h^2.$$

故

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2} \rightarrow 0.$$

由夹逼定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ 。

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ 。

证: 记 $n^{1/n} = 1 + h_n$, $h_n > 0$ 。

$$n = (1 + h_n)^n \geq \frac{1}{2}n(n-1)h_n^2 \quad (h_n \rightarrow 0).$$

于是 $0 \leq h_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ 。

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1$ 。

另解:

$$1 \leq n^{1/n} \leq (1 \cdots \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n})^{1/n} \leq \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1.$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ 。

证: $a = 1$ 时, 结论显然。

$a > 1$ 时, 记 $a^{1/n} = 1 + h_n$, $h_n \geq 0$ 。

只需证: $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ 。

由 $a^{1/n} = 1 + h_n \Rightarrow a = (1 + h_n)^n \geq nh_n$,

即 $0 \leq h_n \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0$ 。

由夹逼定理, $h_n \rightarrow 0$ 。

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1$ 。

$0 < a < 1$ 时, 记 $b = \frac{1}{a}$, 则 $b > 1$ 。

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b^{1/n}} = 1.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ 。

另解: $a > 1$ 时,

$$1 \leq a^{1/n} = (1 \cdots 1 \cdot a)^{1/n} \leq \frac{n-1+a}{n} \rightarrow 1.$$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, 其中 $a > 1$, k 为正整数。

证:

$$\frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \right)^k.$$

这时 $\sqrt[k]{a} > 1$, 由 2 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} = 0.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ 。

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$, $a > 1$ (2 题另解)。

证: 令 $x_n = \frac{n}{a^n}$, 则

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} x_n.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$, 得 $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, $\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} < 1$ 。

即 $n \geq N$ 时 $x_{n+1} < x_n$ 。又 $x_n > 0$, 故 $\{x_n\}$ 单调有界。

$\{x_n\}$ 极限存在。记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = \frac{1}{a} A \Rightarrow A = 0$ 。

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, 其中 $\alpha > 0$, $a > 1$ 。

存在正整数 $k > \alpha$,

$$0 \leq \frac{n^\alpha}{a^n} \leq \frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0.$$

由 5 可得: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ 。

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$, 其中 $c > 0$ 。

$\exists m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq c$ 。

这时

$$\frac{c^n}{n!} = \frac{c}{1} \frac{c}{2} \cdots \frac{c}{m} \frac{c}{m+1} \cdots \frac{c}{n}.$$

记 $\frac{c}{1} \frac{c}{2} \cdots \frac{c}{m} = M$, 则

$$0 \leq \frac{c^n}{n!} \leq \frac{cM}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

9. (柯西命题) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

① 当 a 为有限数时: 设 $\varepsilon > 0$ 。

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 故 $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 使 $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_1$ 。

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{1}{n} [(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)] \right|.$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*$, 使

$$\frac{1}{n} [|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a|] < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 。

故

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &\leq \frac{1}{n}(|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|) \\ &\quad + \frac{1}{n}(|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|) \\ &< \varepsilon + \frac{n-N}{n}\varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$ 。

② 当 a 不为有限数时:

1° $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 。

设 $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 使

$$a_n > M, \quad \forall n \geq N_1.$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*$, 使

$$\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_{N_1}) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq N_2.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_N) + \frac{1}{n}(a_{N+1} + \cdots + a_n) > \frac{n-N}{n}M.$$

$\exists N_3 \in \mathbb{N}^*$, 使 $\frac{n-N}{n} > \frac{1}{2}$, $\forall n \geq N_3$ 。

故 $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > \frac{1}{2}M$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$ 。

2° $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 同理可证。

1.2 练习

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{1/n}$ 。

$$1 < (n+1)^{1/n} < (2n)^{1/n} = 2^{1/n}n^{1/n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n}n^{1/n} = 1.$$

由夹逼定理得: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{1/n} = 1$ 。

又: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/(n+1)}$ 。

$$1 < n^{1/(n+1)} < n^{1/n} \rightarrow 1.$$

由夹逼定理得: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/(n+1)} = 1$ 。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n})$ 。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 由柯西命题得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}) = 1.$$

(3) $\{x_n\}$ 满足

$$n \sin \frac{1}{n} < x_n < (n+1) \sin \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n x_k.$$

由已知

$$\frac{\sin(1/n)}{1/n} < x_n < \frac{\sin(1/(n+1))}{1/(n+1)}.$$

由 $\frac{\sin(1/n)}{1/n} \rightarrow 1$, 可由夹逼定理得 $\lim x_n = 1$.

由柯西命题:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n x_k = 1.$$

10. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = AB.$$

证明 结论: $a_n \rightarrow a \iff a_n = a + \alpha_n$, α_n 为无穷小量。

令 $a_n = A + \alpha_n$, $b_n = B + \beta_n$, 其中 α_n , β_n 为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量。

$$\begin{aligned} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} &= AB + A \frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}{n} \\ &\quad + B \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \\ &\quad + \frac{\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_n \beta_1}{n}. \end{aligned}$$

由柯西命题:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_1 + \dots + \beta_n}{n} = 0.$$

故只需证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_n \beta_1}{n} = 0.$$

因为 $\lim \alpha_n = 0$, 故 $\exists M > 0$, $|\alpha_n| < M$ ($\forall n$).

从而

$$0 \leq \frac{|\alpha_1 \beta_n + \dots + \alpha_n \beta_1|}{n} \leq \frac{M}{n} (|\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_n|).$$

由 $\lim |\beta_n| = 0$, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\beta_1| + \dots + |\beta_n|}{n} = 0$.

1.3 Stolz 定理与递推数列

1. 设 $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = AB.$$

证: 若 $\lim a_n = A \Rightarrow a_n = A + \alpha_n$, 其中 $\alpha_n \rightarrow 0$; 同理令 $b_n = B + \beta_n$.

$$\left| \frac{a_1 b_n + \dots + a_n b_1}{n} - \frac{b_n + b_{n-1} + \dots + b_1}{n} A \right| \leq M \frac{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|}{n} \rightarrow 0.$$

2. **Stolz 定理.**

(1) 若 $\{y_n\}$ 递增且 $\lim y_n = +\infty$, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \quad (a \text{ 为有限数或 } \pm \infty),$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$ 。

(2) 若 $y_n \downarrow 0$, 且 $x_n \downarrow 0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$ 。

证明 (有限 a): 记

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a + \alpha_n, \quad \alpha_n \rightarrow 0.$$

对 $n > N$,

$$x_n = x_N + \sum_{k=N+1}^n (a + \alpha_k)(y_k - y_{k-1}).$$

因而

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \left| \frac{x_N - ay_N}{y_n} \right| + \frac{1}{y_n} \sum_{k=N+1}^n |\alpha_k|(y_k - y_{k-1}).$$

当 n 充分大时右端小于 2ε , 故结论成立。

3. $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + \frac{a}{x_n^3})$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 并求其值

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right) \geq \sqrt[4]{a}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{x_n^3} - x_n \right) = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{3a}{x_n^4} \right) < 0$$

$f(\sqrt[4]{a}) = 0 \Rightarrow x > \sqrt[4]{a}$ 时, $f(x) < 0$

故 $\{x_n\}$ 单调递减. 又由 $x_n > 0$, 故 $\{x_n\}$ 极限存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 故 $A = \frac{1}{4} \left(3A + \frac{a}{A^3} \right) \Rightarrow A = \sqrt[4]{a}$

。或 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{a}{x_n^4} \right) \leq 1$

故 $x_{n+1} \leq x_n$

则单调有界

4. Stolz 定理的几个推论、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ 都存在

(1) 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ (柯西命题)

(2) 若 $\{x_n\}$, $\{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\}$ 收敛且 $x_n > 0$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \quad \text{极限都为 } a$$

(3) 减比法比减根法适用更广若 $x_n > 0$. 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{2^2-1} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\frac{2^2}{2^3-1} \right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1} \right)^{\frac{1}{2}}$

取对: $\ln x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{2^2-1} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}$

$y_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\ln \frac{2}{2^2-1} + \cdots + 2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \right) \rightarrow x_n$

由 Stolz 定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1} - 2^{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} = \ln \frac{1}{2}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$

5. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} (n = 1, 2, \dots)$ 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

取上极限: $\overline{\lim} a_{n+1} = \overline{\lim} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+\underline{\lim} a_n}$ 取下极限: $\underline{\lim} a_{n+1} = \underline{\lim} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+\overline{\lim} a_n}$ 设上极限为 M , 下极限为 N . 则有:

$$\begin{cases} M = \frac{1}{1+N} \\ N = \frac{1}{1+M} \end{cases} \quad \text{代入解得: } M = N = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在, 为 } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

第二章 连续函数

2.1 连续性的定义与基本性质

定义 2.1

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in A$ 。如果对任意 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

称 f 在 x_0 点连续。



注

f 在 x_0 点连续意味着: 自变量 x 接近 x_0 时, f 在 x_0 点的函数值接近 f 在 x_0 点的函数值, 而且要多接近有多接近。

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, 设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果 $\forall x \in A$, f 在 x 点连续, 称 f 连续, 或 f 连续函数。其记号:

$$C(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ 连续}\}.$$

例题 2.1 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = c$, 则 $f \in C(\mathbb{R})$ 。

证明 设 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = 1$, 则 $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, $\forall |x - x_0| < \delta$ 。

例题 2.2 设 $f(x) = kx + b$, $x \in \mathbb{R}$, 其中 $k, b \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, 则 $f \in C(\mathbb{R})$ 。

证明 设 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon/|k|$,

$$|f(x) - f(x_0)| = |kx - kx_0| = |k||x - x_0| < \varepsilon.$$

例题 2.3 $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$ 。

证明 设 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$ 。

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| < \varepsilon.$$

例题 2.4 单位阶跃函数, 证明其在 $x = 0$ 处不连续:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & |x| > 0. \end{cases}$$

反证: 设其在 $x = 0$ 处连续。设 $\varepsilon = 1/2$, 则 $\exists \delta > 0$, 使 $|f(\delta/2) - f(0)| = 1 > 1/2$, 矛盾。

命题 2.1

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, 设 $c > 0$, 下列叙述等价:

(i) f 在 x_0 点连续;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - f(x_0)| < c\varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$



证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 令 $\varepsilon_0 = c\varepsilon$ 。

(ii) $\Rightarrow$ (i): 设 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使 $|f(x) - f(x_0)| < c\varepsilon_0$ 。令 $\varepsilon_0 = \varepsilon/(2c)$, 则 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$, 故 f 在 x_0 点连续。

命题 2.2

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, 设 $\delta_0 > 0$. 下列叙述等价:

- (i) f 在 x_0 点连续;
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \delta_0$, 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$



证明 (i) $\Rightarrow$ (ii), 取 $\delta < \delta_0$; (ii) $\Rightarrow$ (i) 直接成立。

在某点 x_0 处的值与 A 在 x_0 处的极限无关, 但和 x_0 是否为 A 的聚点有关。

命题 2.3

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

- (i) 如果 x_0 不是 A 的聚点, 则 f 在 x_0 处连续;
- (ii) 如果 x_0 是 A 的聚点, f 在 x_0 点连续 $\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



证明 (i) 取邻域使 $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$.

(ii) 正向由连续定义; 反向把去心邻域条件与 $x = x_0$ 时的 $|f(x_0) - f(x_0)| = 0$ 合并。

命题 2.4

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, 下列叙述等价:

- (i) f 在 x_0 点连续;
- (ii) 如果 $x_n \in A$, $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.



注 由命题 4, 我们可以将函数极限转化为数列极限。这是转换极限的一种常用方法。

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 由连续定义与 $x_n \rightarrow x_0$ 得 $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 反证。若 f 在 x_0 不连续, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使任意 $\delta > 0$ 都可取 $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ 且 $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. 令 $\delta = 1/n$, 选得 $x_n \in A$, 则 $x_n \rightarrow x_0$, 但 $f(x_n)$ 不趋于 $f(x_0)$, 矛盾。

定义 2.2

设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, 定义 $f|_A: A \rightarrow Y$, $f|_A(x) = f(x)$, $x \in A$, 称 $f|_A$ 为 f 在 A 上的限制。

**命题 2.5**

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$, $x_0 \in B$. 如果 f 在 x_0 点连续, 则 $f|_B$ 在 x_0 点连续。

**推论 2.1**

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, 则 $f|_B$ 连续。

**命题 2.6**

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, 设 $\varepsilon > 0$. 则 f 在 x_0 点连续当且仅当 $f|_{A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$ 在 x_0 点连续 ($0 < \delta < \varepsilon$).

**定义 2.3**

设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$. 如果存在 $M \in \mathbb{R}$, 使

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in B,$$

称 f 在 B 上有界; 如果 f 在 A 上有界, 称 f 有界。



定义 2.4 (续)

设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$, 如果存在 $M \in \mathbb{R}$, 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in B$, 称 f 在 B 上有界; 若在 A 上有界, 称 f 有界。

**定义 2.5**

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$. 如果存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界, 称 f 在 x_0 点局部有界。

**命题 2.7 (局部有界性)**

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$. 如果 f 在 x_0 点连续, 则存在 $\delta > 0$, 使 f 在 $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界。



证明 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 $\delta > 0$, 使 $|f(x) - f(x_0)| < 1$. 故 $|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1$.

命题 2.8 (保号性)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$, f 在 x_0 处连续, 设 $a \in \mathbb{R}$.

- (i) 如果 $f(x_0) > a$, 则存在 $\delta > 0$, 使 $f(x) > a, \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;
- (ii) 如果 $f(x_0) < a$, 则同理存在邻域使 $f(x) < a$.



证明 (i) 取 $\varepsilon = [f(x_0) - a]/2$, 则

$$\frac{a - f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{a + f(x_0)}{2},$$

从而 $f(x) > [a + f(x_0)]/2 > a$. (ii) 同理。

命题 2.9 (四则运算)

设 $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$, f, g 在 x_0 点连续, 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

- (i) $\alpha f + \beta g$ 在 x_0 点连续;
- (ii) fg 在 x_0 点连续;
- (iii) 如果 $g(x) \neq 0, \forall x \in A$, 则 f/g 在 x_0 连续。



证明 i 分别取 δ_1, δ_2 , 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 估计

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(x_0) - \beta g(x_0)| \leq |\alpha| |f(x) - f(x_0)| + |\beta| |g(x) - g(x_0)|.$$

证明 ii 由连续性 & 局部有界性, 设 $|g(x)| \leq M$, 则

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)|.$$

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| = |f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))|$$

$$\leq |f(x)|\varepsilon + |g(x_0)|\varepsilon \leq \varepsilon(M + |g(x_0)|).$$

故 fg 连续。

证明 iii 设 f, g 在 x_0 处连续. 由 $g(x_0) \neq 0$, 在某邻域内 $|g(x)|$ 有正下界 m , 于是

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right| \leq \frac{1}{|g(x)|} |f(x) - f(x_0)| + \frac{|f(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|} |g(x) - g(x_0)|.$$

故 f/g 在 x_0 连续。

另证：引理：命题 3, f 在 x_0 点连续 $\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

命题 10 (i) (ii) (iii) 可由极限四则运算证明。

推论 2.2

设 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, 设 $f, g \in C(A)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

(i) $\alpha f + \beta g \in C(A)$;

(ii) $fg \in C(A)$;

(iii) 若 $g(x) \neq 0, \forall x \in A$, 则 $f/g \in C(A)$ 。



命题 2.10 (复合函数的连续性)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A, y_0 = f(x_0)$ 。如果 f 在 x_0 点连续, g 在 y_0 点连续, 则 $g \circ f$ 在 x_0 点连续。



证明 设 $\varepsilon > 0$ 。因为 g 在 y_0 点连续, 存在 $\delta_0 > 0$, 使 $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$; 因为 f 在 x_0 点连续, 存在 $\delta > 0$, 使 $|f(x) - f(x_0)| < \delta_0$ 。于是

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

例题 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}.$$

例题 2.6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + C_n^1 mx + C_n^2 (mx)^2 + O(x^2) - 1 - C_m^1 nx - C_m^2 (nx)^2 - O(x)}{x^2} \\ = \frac{mn^2 - m^2n}{2}. \end{aligned}$$

2.2 紧致性、极值与介值定理

定理 2.1

单调有界必收敛。



定理 2.2

(致密性定理) 有界数列必有收敛的子列。



证明 定理 1 $\Rightarrow$ 定理 2

设 $\{x_n\}$ 有界。

① 若 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 数列 $\{x_n\}_{n \geq k}$ 有最大项, 则记 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 的最大项为 x_{n_1} ,

则 $\{x_n\}_{n > n_1}$ 的最大项, 记其为 x_{n_2} , 此时有 $n_1 < n_2$, 且 $x_{n_1} \geq x_{n_2}$

$\vdots$

$\{x_n\}_{n > n_k}$ 仍有最大项, 记其为 $x_{n_{k+1}}$, 此时有 $n_k < n_{k+1}$, 且 $x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$ 。

所得数列有界单调减少。

由定理 1: 该数列收敛。

② 若 $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $\{x_n\}_{n \geq k}$ 没有最大项, 记 $x_{n_1} = x_{k+1}$ 。

此时找到而后, x_{n_1} 后面必有某一项大于 x_{n_1} , 记此项为 x_{n_2} 。

此时有 $n_1 < n_2$, $x_{n_2} > x_{n_1}$ 。

⋮

如此做下去可得: $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$ 。

所得该数列为单调增子列。

由定理 1: 该数列收敛。

定理 2 $\Rightarrow$ 定理 1

不妨设 $\{x_n\}$ 为单调数列。

假设 $\{x_n\}$ 有收敛子列, 记为 $\{x_{n_k}\}$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$ 。

设 $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*$, $\exists \xi - \varepsilon < x_{n_k} < \xi + \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$ 。

取 $N = n_{k_0+1}$, 对于任意 $n > N$,

$\exists n_{k_1}, n_{k_2} \geq N$, 且 $n_{k_1} < n < n_{k_2}$ 。

又数列单调增,

故 $\xi - \varepsilon < x_{n_{k_1}} < x_n < x_{n_{k_2}} < \xi + \varepsilon$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 。

定义 2.6

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 。如果

$$\min\{x, y\} < z < \max\{x, y\},$$

我们称 z 介于 x, y 之间。

由定义不难看出, z 介于 x, y 之间 $\iff z$ 介于 y, x 之间。

命题 2.11

设 $x, y, u, z \in \mathbb{R}$ 。如果 z 介于 x, y 之间, 则 z 介于 x, u 之间或 z 介于 u, y 之间。

证明 设 $x \leq y$, 则 $x < z < y$ 。

如果 $u \leq z$, 则 $u \leq z < y$;

如果 $u \geq z$, 则 $x < z \leq u$ 。

同理可证当 $x > y$ 时同样成立。

定义 2.7

设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果存在 $x_0 \in A$, 使得

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in A,$$

称 f 有最大值, 称 $f(x_0)$ 为 f 的最大值, 并记 $f(x_0) = \max f$;

如果 $\exists x_0 \in A$, 使得:

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in A,$$

称 f 有最小值, 称 $f(x_0)$ 为 f 的最小值, 并记 $f(x_0) = \min f$ 。

定理 2.3

设 $f \in C([a, b])$, 则 f 有最大值和最小值。

证明 (i) 首先证明 f 有上界。

假设 f 没有上界, 则 $\exists x_n \in [a, b], n = 1, 2, \dots$, 使得

$$f(x_n) > n, \quad \forall n = 1, 2, \dots.$$

由上式: $f(x_n) \rightarrow +\infty$ 。

又因为 $\{x_n\}$ 有界, 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 。

设 $x_{n_k} \rightarrow x_0$, 则 $x_0 \in [a, b]$ 。

因为 f 连续, 所以 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ 。

又因为 $f(x_n) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$, 矛盾!

故下假设不成立, f 有上界。

同理可证 f 有下界。

(ii) 下面证明 f 有最大值。记 $M = \sup f \in \mathbb{R}$ 。

下面证明存在 $x_0 \in [a, b], \ni$

$$M = f(x_0),$$

则 $f(x_0) = \max f$ 。

因为 $M = \sup f$, 存在 $x_n \in [a, b], n = 1, 2, \dots$, 使得

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M, \quad \forall n = 1, 2, \dots.$$

由夹逼定理: $f(x_n) \rightarrow M$ 。因为 $\{x_n\}$ 有界, 必有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 。

设 $x_{n_k} \rightarrow x_0, x_0 \in [a, b]$ 。因为 f 连续, 所以 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ 。

因为 $f(x_n) \rightarrow M$, 所以 $f(x_{n_k}) \rightarrow M$, 因此 $f(x_0) = M$ 。

这样我们就证明了 f 有最大值。

(iii) 下面证明 f 有最小值。

因为 $f \in C([a, b])$, 所以 $-f \in C([a, b])$ 。

由 (ii) 得: $\exists x_0 \in [a, b], \ni$

$$-f(x_0) = \max(-f) = -\min f,$$

故 f 有最小值。

右侧另证: 设不然 $\xi \in I, \exists f(\xi) > M$ 。

故 $f(x) < M, \forall x \in [a, b]$ 。

令

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

由于 $f(x)$ 有界, 故 $g(x)$ 有界, 设为 G 。

故

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq G,$$

故

$$M - f(x) \geq \frac{1}{G},$$

即

$$f(x) \leq M - \frac{1}{G} < M,$$

与 M 为上确界矛盾。

定理 2.4 (介值定理)

设 $f \in C([a, b])$, 记 $m = \min f$, $M = \max f$. 如果 $m \leq \alpha \leq M$, 则存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = \alpha$. 

注 由定理 3: 如果 $m < M$, 则 $\text{Rgf} = [m, M]$.

证明

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足:

(1) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n = 1, 2, \dots$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 称闭区间套。

这时存在唯一的 ξ , 使得: $\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ 。

设 $f(a_1) = m$, $f(b_1) = M$, 且不妨 x_1, x_2 ;

$a_1 = \min\{x_1, x_2\}$, $b_1 = \max\{x_1, x_2\}$ 。

则 $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, α 介于 $f(a_1), f(b_1)$ 之间。

记 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, 则 α 介于 $f(a_1), f(c_1)$ 之间或 α 介于 $f(c_1), f(b_1)$ 之间。如果 α 介于 $f(a_1), f(c_1)$ 之间, 记 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$; 否则

记 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, 则 α 介于 $f(a_1), f(c_1)$ 之间或 α 介于 $f(c_1), f(b_1)$ 之间。如果 α 介于 $f(a_1), f(c_1)$ 之间, 记 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$; 否则

记 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$, 则 α 介于 $f(a_2), f(b_2)$ 之间。

重复上述过程, 我们得到一系列闭区间 $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, 它们满足:

(i) $[a, b] \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n = 1, 2, \dots$;

(ii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$;

(iii) α 介于 $f(a_n), f(b_n)$ 之间, $n = 1, 2, \dots$ 。

由 (i) $\{a_n\}$ 单调增有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $a_n \rightarrow x_0$, $x_0 \in [a, b]$ 。

由 (ii) 可以得出 $b_n \rightarrow x_0$ 。

下面证明: $f(x_0) = \alpha$ 。因为 f 连续, 所以 $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$, $f(b_n) \rightarrow f(x_0)$ 。

设 $\varepsilon > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 使

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad |f(b_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

故

$$|\alpha - f(x_0)| \leq \max\{|f(a_n) - f(x_0)|, |f(b_n) - f(x_0)|\} < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

故 $f(x_0) = \alpha$ 。证毕。

推论 2.3

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是区间, $f \in C(I)$, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ 。若 $f(x_1) < \alpha < f(x_2)$, 则 $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$, 使 $f(x_0) = \alpha$ 。 

证明 记 $g = f|_{[x_1, x_2]}$, 则 $g \in C([x_1, x_2])$ 。由定理 5,

$$\min g \leq g(x_1) < \alpha < g(x_2) \leq \max g.$$

由介值定理, $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$, 使得 $g(x_0) = \alpha$, 即 $f(x_0) = \alpha$ 。

推论 2.4

设 $f \in C([a, b])$, 如果 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$ 。 

证明 因为 $f(a)f(b) < 0$, 所以 $\min f < 0 < \max f$ 。由介值定理, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = 0$ 。

又因为 $f(a), f(b) \neq 0$, 所以 $x_0 \in (a, b)$ 。证。

例题 2.7 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ 。证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

下证: $\{a_{2n}\}$ 单增, $\{a_{2n+1}\}$ 单减。

数学归纳法:

$$a_1 > a_2, \quad a_2 < a_3.$$

假设 $a_{2k+1} < a_{2k-1}, a_{2k} > a_{2k-2}$, 则

$$a_{2k+1} = \frac{1}{1+a_{2k}} < \frac{1}{1+a_{2k-2}} = a_{2k-1},$$

$$a_{2k+2} = \frac{1}{1+a_{2k+1}} > \frac{1}{1+a_{2k-1}} = a_{2k}.$$

又 $0 < a_n < 1$,

故 $\{a_{2n}\}, \{a_{2n+1}\}$ 都收敛。

记 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = x, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = y$ 。

$$\begin{cases} a_{2k} = \frac{1}{1+a_{2k-1}}, \\ a_{2k+1} = \frac{1}{1+a_{2k}}, \end{cases}$$

两边同时取极限。

解得: $x = y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

两个子列收敛于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

2.3 连续函数的反函数

设 f 是定义在区间 I 上的严格单调的函数, 则 $f: I \rightarrow \text{Rgf}$ 有反函数 $f^{-1}: \text{Rgf} \rightarrow I$ 。

下面证明, 如果 f 连续, 则 Rgf 也是区间, 并且 f^{-1} 也连续。

首先证明两个预备结论。

命题 2.12

设 $-\infty < a < b < +\infty$, 则 $\forall x_0 \in (a, b), \exists \varepsilon > 0$, 使 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$ 。

证明 令

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{b-x_0}{2}, & a = -\infty, b \in \mathbb{R}, \\ \frac{x_0-a}{2}, & a \in \mathbb{R}, b = +\infty, \\ \min \left\{ \frac{b-x_0}{2}, \frac{x_0-a}{2} \right\}, & a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

则 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$ 。证。

命题 2.13

设 $-\infty < a < b < c < +\infty$, $f \in C([a, b])$, $g \in C([b, c])$, 并且 $f(b) = g(b)$ 。

定义 $h: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ g(x), & x \in [b, c]. \end{cases}$$

则 $h \in C([a, c])$ 。



证明 设 $x_0 \in (a, b)$, $\exists \varepsilon > 0$, 使 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$ 。

则 $h(x) = f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 。

因为 f 在 x_0 点连续, h 在 x_0 点连续。同理若 $x_0 \in (b, c)$, 则 h 在 x_0 点连续。

下面证明 h 在 b 点连续。 $\exists \delta > 0$, 使 $b - \delta > a$, $b + \delta < c$ 。

设 $\varepsilon > 0$ 。因为 f, g 在 b 点连续, $\exists 0 < \delta_1, \delta_2 < \delta$, 使

$$|h(x) - h(b)| = |f(x) - f(b)| < \varepsilon, \quad \forall b - \delta_1 < x < b,$$

$$|h(x) - h(b)| = |g(x) - g(b)| < \varepsilon, \quad \forall b < x < b + \delta_2.$$

因此

$$|h(x) - h(b)| < \varepsilon, \quad \forall b - \delta_1 < x < b + \delta_2.$$

这就证明了 h 在 b 点连续, 故 h 连续。

命题 2.14

设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in C((a, b))$ 严格单调, 记

$$c = \inf f, \quad d = \sup f.$$

则

(i) $-\infty \leq c < d \leq +\infty$, $\text{Rgf} = (c, d)$;

(ii) 设 $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(f(x)) = x, \quad x \in (a, b),$$

则 $g \in C((c, d))$ 。



证明 (i) 不妨设 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ 。因为 f 严格单调, 所以上确界满足

$$c \leq f(x_1) < f(x_2) \leq d.$$

这表明 $c < d$ 。

下面证明 $\text{Rgf} = (c, d)$ 。设 $x \in (a, b)$, 则 $\exists \varepsilon > 0$, 使 $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset (a, b)$ 。

因为 f 严格单调, 所以

$$c \leq f(x - \varepsilon) < f(x) < f(x + \varepsilon) \leq d.$$

因此 $f(x) \in (c, d)$, 故 $\text{Rgf} \subset (c, d)$ 。

设 $y \in (c, d)$, 即 $y > c$ 。故 $\exists x_0 \in (a, b)$, 使 $y > f(x_0)$ 。

同理, 因为 $y < d$, $\exists x_1 \in (a, b)$, 使 $y < f(x_1)$ 。

故 $f(x_0) < y < f(x_1)$ 。因为 f 单调增, 我们可设 $x_0 < x_1$ 。

由介值定理, $\exists x \in (x_0, x_1)$, $y = f(x)$, 故 $\text{Rgf} \supset (c, d)$ 。

故 $\text{Rgf} = (c, d)$ 。

(ii) 设 $y_0 \in (c, d)$ 。下面证 g 在 y_0 点连续。

$\forall x_0 = g(y_0)$, 则 $\exists \varepsilon > 0$, 使 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$ 。

设 $\varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$ 。

则 $[x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1] \subset (a, b)$ 。因为 f 单调增,

$$f(x_0 - \varepsilon_1) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon_1).$$

令

$$\delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon_1), f(x_0 + \varepsilon_1) - y_0\}.$$

这是一个正数。则

$$f(x_0 - \varepsilon_1) < y_0 - \delta \leq y \leq y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon_1).$$

若 $|y - y_0| < \delta$, 则

$$f(x_0 - \varepsilon_1) < y < f(x_0 + \varepsilon_1).$$

因为 f 严格单调, 故 g 严格单调。

故 $x_0 - \varepsilon_1 < g(y) < x_0 + \varepsilon_1$,

即 $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ 。

这就证明了 g 在 y_0 点连续。

命题 2.15

设 $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C([a, b))$ 严格单调, 记

$$c = f(a), \quad d = \sup f.$$

则

(i) $c < d \leq +\infty$, $\text{Rgf} = [c, d)$;

(ii) 设 $g: [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(f(x)) = x, \quad x \in [a, b),$$

则 $g \in C([c, d))$ 。



证明 (i) $a < x < b$ 。因为 f 严格单调, 所以下式成立:

$$c = f(a) < f(x) \leq \sup f,$$

因此 $c < d$ 。

定义 $F: (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} x - a + c, & x < a, \\ f(x), & a \leq x < b. \end{cases}$$

则 F 连续且严格单调, 且

$$\inf F = -\infty, \quad \sup F = \sup f = d.$$

由命题 3, $\text{Rg } F = (-\infty, d)$ 。因此

$$\text{Rgf} = \text{Rg } F \setminus \text{Rg } F|_{(-\infty, a)} = [c, d).$$

(ii) 定义 $G: (-\infty, d) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G(F(x)) = x, \quad \forall x \in (-\infty, b).$$

由命题 3, G 连续。因此 $g = G|_{[c, d)}$ 连续。

命题 2.16

设 $-\infty \leq a < b < +\infty$, $f \in C((a, b])$ 严格单调, 记

$$c = \inf f, \quad d = f(b).$$

则

(i) $-\infty \leq c < d$, $\text{Rgf} = (c, d]$;

(ii) 设 $g: (c, d] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in (a, b],$$

则 $g \in C((c, d])$ 。



证明 (i) 设 $a < x < b$, 故有 $c = \inf f \leq f(x) < f(b) = d$, 则 $c < d$ 。

定义 $F: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & a < x \leq b, \\ x - b + d, & x > b. \end{cases}$$

可知 $F(x)$ 单调递增, $\inf F = c$, $\sup F = +\infty$ 。

故 $\text{Rg } F = (c, +\infty)$, 有 $\text{Rg } F|_{(a, b]} = (c, d]$ 。

故 $\text{Rgf} = \text{Rg } F \setminus \text{Rg } F|_{(b, +\infty)} = (c, d]$ 。

(ii) 定义 $G: (c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 。

由命题 3, $G(F(x)) = x$, $\forall x \in (a, +\infty)$, 故 G 连续。

则 $g = G|_{(c, d]}$ 连续。

命题 2.17

设 $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C([a, b])$ 严格单调, 记

$$c = f(a), \quad d = f(b).$$

则

(i) $c < d$, $\text{Rgf} = [c, d]$;

(ii) 设 $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in [a, b],$$

则 $g \in C([c, d])$ 。



证明 (i) 由于 f 单调递增, 故 $c = f(a) < f(b) = d$ 。由介值定理, $\exists x_0 \in [a, b]$,

$$c = f(a) \leq f(x_0) \leq f(b) = d,$$

故 $\text{Rgf} = [c, d]$ 。

(ii) 定义 $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b, \\ x - b + d, & x > b. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b, \\ x - b + d, & x > b. \end{cases}$$

由于 F 连续且单调递增, 由于

$$F(a) = c, \quad \sup F = +\infty,$$

由命题 4, $\text{Rg} F = [c, +\infty)$ 。定义 $G : [c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G(F(x)) = x, \quad \forall x \in [c, +\infty),$$

由命题 4, G 连续, 因此 $G|_{[c, d]}$ 连续。

命题 2.18

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 严格单调, 设 $g : \text{Rgf} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in I,$$

则 g 与 f 同向:

(i) 如果 f 单调增, g 递增;

(ii) 如果 f 单调减, g 递减。



证明 对于 (ii), 若 f 单调减, 则 $-f$ 单调增。记 $h : \text{Rg}(-f) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(-f(x)) = x, \quad \forall x \in I.$$

由 (i) $\text{Rg}(-f)$ 为区间, h 连续。因为

$$\text{Rgf} = \{-y : y \in \text{Rg}(-f)\},$$

$$g(y) = h(-y), \quad \forall y \in \text{Rgf},$$

所以 g 与 f 同向, g 连续。

定理 2.5

f 在 $[a, b]$ 严格单调且连续, 则 f^{-1} 在其定义域内 $[f(a), f(b)]$ 或 $[f(b), f(a)]$ 连续。



证明 不妨设 f 单调增。

设 $y_0 \in (f(a), f(b))$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$, 则 $x_0 \in (a, b)$ 。

设 $\varepsilon > 0$, 则 $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$,

$$0 < |x - x_1| < \varepsilon, \quad 0 < |x - x_2| < \varepsilon.$$

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad \text{则 } y_1 < y_0 < y_2.$$

$$\text{令 } \delta = \min \left\{ \frac{y_2 - y_0}{2}, \frac{y_0 - y_1}{2} \right\}$$

故 $y \in U(y_0, \delta)$, $x = f^{-1}(y) \in [x_1, x_2]$ 。

故 $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

定理 2.6

若 $f \in C([a, b])$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界且取得最大值。



证明 记 $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, 下面证 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = M$ 。

若不然, 则对一切 $x \in [a, b]$, $f(x) < M$ 。

令

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \quad x \in [a, b].$$

则 $g(x) \in C([a, b])$, 且 $g(x) > 0$ 。

可得 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有上界, 记为 $g(x) \leq G$, $G > 0$ 。

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq G.$$

可得

$$f(x) \leq M - \frac{1}{G}.$$

因此 M 不是上确界。

2.4 间断点与单边极限

2.4.1 左极限和右极限

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, 如果 x_0 在 f 不连续, 我们称 x_0 为 f 的不连续点或间断点。

定义 2.8

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点。设 $a \in \mathbb{R}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0),$$

称 a 是 f 在 x_0 点的左极限。

由定义: a 是 f 在 x_0 点的左极限, 意味着 $f(x)$ 在向左趋于 x_0 时极限为 a 。

• f 在 x_0 点的左极限实质上就是 $f|_{A \cap (-\infty, x_0)}$ 在 x_0 点的极限, 因此如果 f 在 x_0 点有左极限, 左极限是唯一的。我们用 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 表示 f 在 x_0 点的左极限, 我们也经常简单记 $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 。

注意: $f(x_0^-)$ 不表示 f 在 x_0 处所取的值。



定义 2.9

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点。设 $a \in \mathbb{R}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta),$$

称 a 是 f 在 x_0 点的右极限。

由定义: a 是 f 在 x_0 点的右极限, 意味着 $f(x)$ 在向右趋于 x_0 时极限为 a 。

• f 在 x_0 点的右极限实质上就是 $f|_{A \cap (x_0, +\infty)}$ 在 x_0 点的极限, 因此如果 f 在 x_0 点有右极限, 右极限是唯一的。我们用 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 表示 f 在 x_0 点的右极限, 我们也经常简单记 $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 。



例题 2.8 设

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

则 $H(0^-) = 0, H(0^+) = 1$ 。

左右极限又称为被称为单边极限, 单边极限和 f 在 x_0 点极限有如下关系。

命题 2.19

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 既是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点, 也是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点。

设 $a \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{当且仅当} \quad f(x_0^-) = f(x_0^+) = a.$$



命题 2.20

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 既是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点, 也是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点。

设 $a \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$$



注 x_0 是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点, 且是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点, 可得 x_0 是 A 的聚点, 反之不然。

证明

$\Rightarrow$ 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 。故设 $\varepsilon > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in \{A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \setminus \{x_0\}.$$

由于 x_0 是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点, 故 $\exists 0 < \delta_1 < \delta$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta_1, x_0).$$

同理 $\exists 0 < \delta_2 < \delta$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta_2).$$

故

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$$

$\Leftarrow$ 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$, 且 x_0 是 A 的聚点。设 $\varepsilon > 0$, 故 $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta_1, x_0),$$

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta_2).$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap \{x_0 - \delta, x_0 + \delta\} \setminus \{x_0\}.$$

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 。

命题 2.21

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in A$, x_0 既是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点, 也是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点, 则 f 在 x_0 点连续当且仅当

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0).$$



证明 $\Rightarrow$ 由于 f 在 x_0 点连续, 设 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

由于 x_0 既是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点, 也是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点,

故 $\exists 0 < \delta_1, \delta_2 < \delta$, 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta_1, x_0) \implies f(x_0^-) = f(x_0),$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta_2) \implies f(x_0^+) = f(x_0).$$

$\Leftarrow$ 由于 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$, 由命题 1 可得 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 f 在 x_0 点连续。

注 类似地我们还可以定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

定义 2.10

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点。若 $\forall M > 0$,

$\exists \delta > 0$, 使得:

**定义 2.11**

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点。若 $\forall M > 0$,

$\exists \delta > 0$, 使得:

$$f(x) > M, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0),$$

我们记 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ 。如果 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使

$$f(x) < -M, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0),$$

我们记 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ 。

**2.4.2 不连续点类型****定义 2.12**

设 $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ 。如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$, 称 x_0 为 A 的内点。



例题 2.9 设闭区间 $[a, b]$, $\forall a < x < b$, x 是区间上的内点; $x = a$ 或 $x = b$ 不是内点。

(1) f 在 x_0 点有极限, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq x_0$ 。

我们称 x_0 是 f 的可去不连续点; “可去”意味着:

定义

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{x_0\}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & x = x_0, \end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在 x_0 点连续。

(2) f 在 x_0 点有左极限和右极限, 但是 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 我们称 x_0 为 f 的跳跃不连续点。

(3) f 在 x_0 点左极限或右极限不存在, 我们称 x_0 为 f 的第二类不连续点。

命题 2.22

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 既是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点, 也是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$$

**证明**

$\Rightarrow$ 设 $M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使

$$f(x) > M, \quad \forall x \in \{A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \setminus \{x_0\}.$$

则

$$f(x) > M, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0),$$

$$f(x) > M, \quad \forall x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta).$$

即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ 。

$\Leftarrow$ 设 $M > 0, \exists \delta_1 > 0$, 使

$$f(x) > M, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta_1, x_0).$$

设 $M > 0, \exists \delta_2 > 0$, 使

$$f(x) > M, \quad \forall x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta_2).$$

故取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 有

$$f(x) > M, \quad \forall x \in \{A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \setminus \{x_0\}.$$

故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ 。

例题 2.10 设 $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

证明 设 $M_1 > 0, \delta_1 = \frac{1}{M_1} > 0$ 。

故

$$f(x) = \frac{1}{x} > M_1, \quad \forall x \in (0, \delta_1).$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ 。设 $M_2 > 0, \delta_2 = -\frac{1}{M_2} > 0$ 。

故

$$f(x) = \frac{1}{x} < -M_2, \quad \forall x \in (\delta_2, 0).$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ 。

设

例题 2.11

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

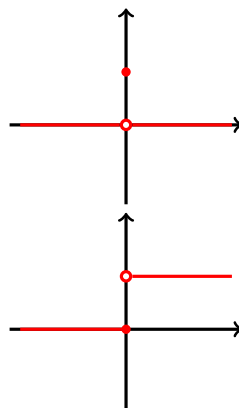
则 $x = 0$ 为 f 的可去不连续点。

设

例题 2.12

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

则 $x = 0$ 是 H 的跳跃不连续点。

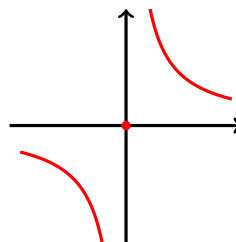


设

例题 2.13

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 $x = 0$ 是 f 的本性不连续点。



例题 2.14 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{A}$.

证明

$A = 0$ 时: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\left| \sqrt[3]{f} - \sqrt[3]{A} \right| = \frac{|f - A|}{\left| \sqrt[3]{f^2} + \sqrt[3]{fA} + \sqrt[3]{A^2} \right|} < \frac{|f - A|}{A^{2/3}}.$$

由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\left| \sqrt[3]{f} - \sqrt[3]{A} \right| < \frac{|f - A|}{A^{2/3}} < A^{2/3} \varepsilon.$$

由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\left| \sqrt[3]{f} - \sqrt[3]{A} \right| < \frac{|f - A|}{A^{2/3}} < A^{2/3} \varepsilon.$$

例题 2.15

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{实际上说明了 } \sqrt[n]{1+x} \text{ 在 } x=0 \text{ 点} \cdots \cdots$$

证明

证明时:

$$(\sqrt[n]{1+x})^n - 1 = (\sqrt[n]{1+x} - 1) [(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \cdots + \sqrt[n]{1+x} + 1].$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \cdots + \sqrt[n]{1+x} + 1} = \frac{1}{n}.$$

例题 2.16

两个重要极限

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

证明

(i)

$$S_{\triangle AOC} < S_{\text{扇形}AOB} < S_{\triangle AOB}.$$

故

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

故

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

由于 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 故只需考虑 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时的情形。

故只需证 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 。

又

$$0 < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{2} \rightarrow 0.$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 。

则由夹逼定理可得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(ii) $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1}}{1 + \frac{1}{[x] + 1}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) = e.$$

变量代换:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x)^{1/x} = e.$$

记 $x = \frac{1}{t}$, 则 $t \rightarrow 0^+$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} (1 + t)^{1/t} = e$ 。

例题 2.17 3 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$ 。如果在 t_0 的某个邻域内, $g(t) \neq x_0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f[g(t)] = a.$$

证明 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 知: 设 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

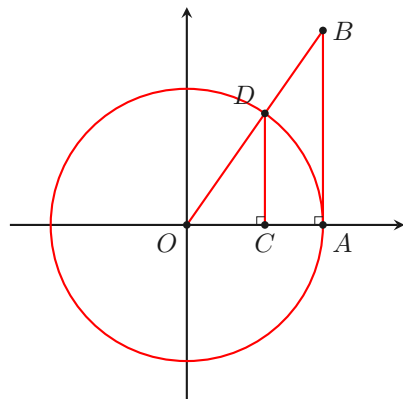
$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

对此 δ , $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |t - t_0| < \delta_1$ 时, 有:

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

对此 δ , $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |t - t_0| < \delta_1$ 时, 有:

$$0 < |g(t) - x_0| < \delta.$$



故有:

$$|f[g(t)] - a| < \varepsilon, \quad \forall 0 < |t - t_0| < \delta_1.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{1/t} = \ln e = 1.$$

即:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \Rightarrow t \rightarrow 0 \text{ 时 } \ln(1+t) \sim t.$$

4. $x \rightarrow x_0$ 时, $f \sim f_1$, $g \sim g_1$. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}$ 存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1}.$$

证明

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{g_1}{g}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \frac{1}{\cos x})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

2.5 单调函数的极限

单调极限:

定义 2.13

设 $a, A \in \mathbb{R}$, 并设 $f(x)$ 在 $(a - \delta, a)$ 有定义。

如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使 $a - \delta < x < a$, 都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 从左趋于极限

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A.$$

如果趋近无界, 记 $\sup B = +\infty$ 。



定义 2.14

设 $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 在 $(a - \delta, a)$ 有定义。如果 $\forall E > 0$,

$\exists \delta > 0$, $\exists a - \delta < x < a$ 时, 都有

$$f(x) > E,$$

则称 $x \rightarrow a^-$ 时, $f(x)$ 趋于 $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty.$$

单调函数的单侧极限存在



定理 2.7

设 f 在开区间 $(a - \eta, a)$ 上递增 (减), 则

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup_{(a-\eta, a)} f(x) \quad \left(\inf_{(a-\eta, a)} f(x) \right).$$

(1) 设 $f(x)$ 在区间 $(a, a + \eta)$ 上单调 (减), 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{(a, a+\eta)} f(x) \quad \left(\sup_{(a, a+\eta)} f(x) \right).$$



证明 a. (1) $f(x)$ 在 $(a - \eta, a)$ 上递增时。

① 若

$$\sup_{x \in (a-\eta, a)} f(x) = +\infty,$$

则 $\forall E > 0$, $\exists x_E \in (a - \eta, a)$, 使

$$f(x_E) > E.$$

设 $\delta = a - x_E$, 则 $\forall x \in (a - \delta, a)$,

$$f(x) > f(x_E) > E.$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty = \sup_{x \in (a-\eta, a)} f(x).$$

② 若

$$\sup_{x \in (a-\eta, a)} f(x) = A < +\infty,$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x_\varepsilon \in (a - \eta, a)$, 使

$$A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq A.$$

记 $\delta = a - x_\varepsilon$, 则 $\forall x \in (a - \delta, a)$ 时,

由单调性: $A \geq f(x) > f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$ 。

故 $|f(x) - A| < \varepsilon$, $\forall x \in (a - \delta, a)$ 。

即

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A = \sup_{x \in (a-\eta, a)} f(x).$$

b. $f(x)$ 在 $(a, a + \eta)$ 上递增时。

① 若

$$\inf_{x \in (a, a+\eta)} f(x) = -\infty,$$

则 $\forall E > 0$, $\exists x_E \in (a, a + \eta)$, 使

$$f(x_E) < -E.$$

取 $\delta = x_E - a > 0$, $\forall x \in (a, a + \delta)$,

故 $f(x) < f(x_E) < -E$ 。

即

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty = \inf_{x \in (a, a+\eta)} f(x).$$

② 若

$$\inf_{x \in (a, a+\eta)} f(x) = A \in \mathbb{R},$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_E \in (a, a + \eta)$, 使

则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_E \in (a, a + \eta)$, 使

$$f(x_E) < A - \varepsilon.$$

故 $\forall x \in (a, x_E)$, 有

$$A \leq f(x) < f(x_E) < A - \varepsilon.$$

记 $\delta = x_E - a$ 。

则

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta).$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A = \inf_{(a, a+\eta)} f(x).$$

c. $f(x)$ 在 $(a - \eta, a)$ 上递减时。

① 若 $\inf f(x) = -\infty$, 则 $\forall E > 0$, $\exists x_E \in (a - \eta, a)$, 使

$$f(x_E) < -E.$$

记 $\delta = a - x_E$, 故

$$f(x) < f(x_E) < -E, \quad \forall x \in (a - \delta, a).$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty = \inf_{(a-\eta, a)} f(x).$$

② 若 $\inf f(x) = A \in \mathbb{R}$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_E \in (a - \eta, a)$, 使

$$f(x_E) < f(x) + \varepsilon.$$

故

$$A \leq f(x) < f(x_E) < f(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in (x_E, a).$$

记 $\delta = a - x_E > 0$ 。

故

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a - \delta, a).$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A = \inf_{(a-\eta, a)} f(x).$$

d. $f(x)$ 在 $(a, a + \eta)$ 上单调递减时。

①

$$\sup_{(a, a+\eta)} f(x) = +\infty.$$

$\forall E > 0$, $\exists x_E \in (a, a + \eta)$, 使 $f(x_E) > E$ 。

记 $\delta = x_E - a > 0$ 。

故

$$f(x) > f(x_E) > E, \quad \forall x \in (a, a + \delta).$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty = \sup_{(a, a+\eta)} f(x).$$

② 若

$$\sup_{(a, a+\eta)} f(x) = A \in \mathbb{R},$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_E \in (a, a + \eta)$, 使

$$f(x_E) > A - \varepsilon.$$

故有 $A \geq f(x) > f(x_E) > A - \varepsilon$, $\forall x \in (a, x_E)$ 。

记 $\delta = x_E - a > 0$ 。

则

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta).$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A = \sup_{(a, a+\eta)} f(x).$$

命题 2.23

设 $-\infty < a < b < +\infty$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增, 设 $x_0 \in (a, b)$, 则

(i) $\sup_{(a, x_0)} f \in \mathbb{R}$, 并且

$$f(x_0^-) = \sup_{(a, x_0)} f;$$

(ii) $\inf_{(x_0, b)} f \in \mathbb{R}$, 并且

$$f(x_0^+) = \inf_{(x_0, b)} f.$$



证明

(i) 因为 f 单调增, 所以

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

因此 $\sup_{(a, x_0)} f \leq f(x_0)$ 。设 $x_1 \in (a, x_0)$, 则

$$f(x_1) \leq \sup_{(a, x_0)} f \leq f(x_0).$$

这就证明了 $\sup_{(a, x_0)} f \in \mathbb{R}$ 。

设 $\varepsilon > 0$,

$$f(x_1) \leq \sup_{(a, x_0)} f \leq f(x_0).$$

这就证明了 $\sup_{(a, x_0)} f \in \mathbb{R}$ 。

设 $\varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in (a, x_0)$, 使

$$\sup_{(a, x_0)} f - \varepsilon < f(x_1).$$

令 $\delta = x_0 - x_1$, 设 $x_0 - \delta < x < x_0$ 。因为 f 单调增, 所以 $f(x_1) \leq f(x)$, 相比

$$\sup_{(a, x_0)} f - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq \sup_{(a, x_0)} f.$$

所以

$$\left| f(x) - \sup_{(a, x_0)} f \right| < \varepsilon, \quad \forall x_0 - \delta < x < x_0.$$

故

$$f(x_0^-) = \sup_{(a, x_0)} f.$$

命题 2.24

设 $-\infty < a < b < +\infty$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增。

(i) 设 $x_0 \in (a, b)$, 则

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

(ii) 设 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1^+) \leq f(x_2^-).$$



证明 (i) 由于 $x_0 \in (a, b)$ 且 f 单调增,

$$\sup_{(a, x_0)} f = f(x_0^-) \leq f(x_0),$$

$$\inf_{(x_0, b)} f = f(x_0^+) \geq f(x_0).$$

故

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

证明 (ii) 取 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 。

由于 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增,
则

$$f(x_1^+) = \inf_{(x_1, b)} f \leq f(x),$$

$$f(x_2^-) = \sup_{(a, x_2)} f \geq f(x).$$

故 $f(x_1^+) \leq f(x_2^-)$ 。

下面证明：单调函数不连续点的集合至多可数。在本证明中，我们使用到最后论证中所说的相交问题。

命题 2.25

设 $S \subset 2^{\mathbb{R}}$, $S \neq \emptyset$, $\forall I \in S$, I 为开区间, 并且

$$I \cap J = \emptyset, \quad \forall I, J \in S, I \neq J,$$

则 S 可数集。

关系称为开区间内分离的可数集合。



证明 设 $I = (a, b)$, 其中 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ 。我们用 $l(I)$ 表示区间 I 的长度, 即

$$l(I) = \begin{cases} b - a, & a, b \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & a = -\infty \text{ 或 } b = +\infty. \end{cases}$$

Claim 1: 设 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow S$ 为单射。如果存在 $M, \varepsilon > 0$, 使得

$$I \subset (-M, M), \quad l(I) \geq \varepsilon, \quad \forall I \in S,$$

则

$$n \leq \frac{2M}{\varepsilon}.$$

证 Claim 1: 因为

$$f(i) \cap f(j) = \emptyset, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j,$$

$$f(i) \subset (-M, M), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

所以

$$n\varepsilon \leq \sum_{i=1}^n l(f(i)) \leq l((-M, M)) < 2M.$$

故可得: $n \leq \frac{2M}{\varepsilon}$ 。

Claim 2: 如果存在 $M, \varepsilon > 0$, 使得

$$I \subset (-M, M), \quad l(I) \geq \varepsilon, \quad \forall I \in S,$$

则 S 为有限集。

证 Claim 2: 记

$$K = \{n \in \mathbb{N}^* : \text{存在单射 } f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow S\}.$$

因为 $S \neq \emptyset$, 所以 $1 \in K$, 因此 $K \neq \emptyset$ 。由 Claim 1, K 有上界, 因此 K 有最大元, 记 $N = \max K$ 。则存在单射 $f: \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow S$ 。因为 $N = \max K$, 所以 f 为满射, 因此 S 为有限集。

Claim 3: 如果

$$l(I) < +\infty, \quad \forall I \in S,$$

则 $\mathcal{S}$ 为可数集。

证 Claim 3: 任取开区间 $(a, b) \in \mathcal{S}$, 则 $l(a, b) \in \mathbb{R}$, 记

$$\mathcal{S}_n = \left\{ I \in \mathcal{S}; I \subset (a - n, b + n), l(I) \geq \frac{b - a}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

设 $\mathcal{S}_n \neq \emptyset, n = 1, 2, \dots$, 并且 $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{S}_n$, 由 Claim 2, $\mathcal{S}_n$ 为有限集, $n = 1, 2, \dots$

所以 $\mathcal{S}$ 为可数集。□

记:

$$\mathcal{S}_1 = \{I \in \mathcal{S}; l(I) < +\infty\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{I \in \mathcal{S}; l(I) = +\infty\}$$

如果 $\mathcal{S}_1 \neq \emptyset$, 由 Claim 3, $\mathcal{S}_1$ 为可数集; 如果 $\mathcal{S}_2 \neq \emptyset$,

由于 $\mathcal{S}_2$ 中的开区间互不相交, $\mathcal{S}_2$ 中最多有两个, 所以 $\mathcal{S}_2$ 为有限集。

则 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ 为可数集。

定理 2.8

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 单调, 记

$$D = \{x \in I: f \text{ 在 } x \text{ 点不连续}\}.$$

(i) 如果 $x_0 \in D$, 则 x_0 为 f 的跳跃不连续点;

(ii) 如果 $D \neq \emptyset$, 则 D 为可数集。



证明 我们考虑 f 单调增。

(i) 设 $x_0 \in I$ 。由命题 1、命题 2, 得 f 存在左右极限, 且

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

如果 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, 则

$$f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+),$$

因此 f 在 x_0 点连续。

故如果 $x_0 \in D$, 一定有

$$f(x_0^-) < f(x_0^+),$$

因此 x_0 为 f 的跳跃不连续点。

(ii) 设 $x \in D$, 由 (i) 知: $f(x^-) < f(x^+)$ 。令

$$\mathcal{S} = \{(f(x^-), f(x^+)) : x \in D\}.$$

因为 $D \neq \emptyset$, 所以 $\mathcal{S} \neq \emptyset$ 。

设 $x, y \in D$, $x < y$, 由命题 2:

$$f(x^+) \leq f(y^-),$$

因此

$$(f(x^-), f(x^+)) \cap (f(y^-), f(y^+)) = \emptyset.$$

所以由命题 3, $\mathcal{S}$ 为可数集。令

$$g: D \rightarrow \mathcal{S},$$

$$g(x) = (f(x^-), f(x^+)), \quad x \in D.$$

显然, g 为满射; 由可得, g 为单射, 所以 g 为双射。

因为 $\mathcal{S}$ 为可数, 所以 D 为可数集。

假设 f 单调减。

(i) 设 $x_0 \in I$ 。由命题 1、2 得: f 存在左右极限, 且

$$f(x_0^+) \leq f(x_0) \leq f(x_0^-).$$

若 $f(x_0^+) = f(x_0^-)$, 故 $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$, 即 f 在 x_0 点连续。因此 $x_0 \notin D$ 。

故当 $x \in D$ 时, 一定有 $f(x^+) < f(x^-)$, 即 x_0 为 f 的跳跃不连续点。

(ii) 由于 $D \neq \emptyset$, 故设 $x \in D$ 。由 (i) 知: $f(x^+) < f(x^-)$ 。

即 x_0 为 f 的跳跃不连续点。

(ii) 由于 $D \neq \emptyset$, 故设 $x \in D$ 。由 (i) 知: $f(x^+) < f(x^-)$ 。

记

$$\mathcal{S} = \{(f(x^+), f(x^-)) : x \in D\}.$$

由于 $D \neq \emptyset$, 所以 $\mathcal{S} \neq \emptyset$ 。

设 $x, y \in D$, $x < y$ 。由命题 2 可知:

$$f(x^+) \geq f(y^-),$$

故

$$(f(x^+), f(x^-)) \cap (f(y^+), f(y^-)) = \emptyset.$$

即由命题 3, $\mathcal{S}$ 为可数集。

设 $g: D \rightarrow \mathcal{S}$,

由定义显然可知 g 为满射, 又由 (ii) 知 g 为单射。

故 g 为双射。

因此 D 为可数集。证。

另一种证明方法:

1. $f \uparrow, x \in [a, b]$

假设 x_0 是间断点, 则 $\exists \varepsilon_0, \exists$

$\forall x_0$ 的邻域, 都存在取值 $f(x)$ 满足

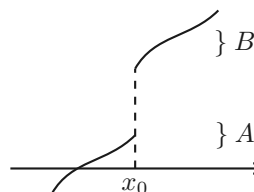
$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 \quad (*)$$

先考虑 x_0 的右侧邻域, 即 f 取值: $B = \{f(x) \mid x > x_0\}$

因其有下界 $f(x_0)$, 故有下确界 β 。 ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$)

同理: $A = \{f(x) \mid x < x_0\}$ 有上确界 α ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$)

(1) 下证 $\beta - \alpha > 0$



若 $\beta - \alpha = 0$, 则 $\beta = \alpha = f(x_0)$, 由于 β 是 B 的下确界

则存在 $x_1 > x_0$, 使得: $f(x_1) < f(x_0) + \varepsilon_0$

因此: $x_0 < x < x_1$ 中, 都有 $f(x) \leq f(x_1) < f(x_0) + \varepsilon_0$

与 (*) 式矛盾.

2. 假设 $f(x) \in (\alpha, \beta)$, 若存在 $x > x_0$, 则有 $f(x) > f(x_0)$

如此一来: $f(x) \geq \beta$ (β 是 B 的下确界). 矛盾.

同理: 若 $x < x_0$. 矛盾.

3. 不同间断点 x_0, x_1 , 所做出的开区间 $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ 不相交.

4. $D = \{x \mid x \text{ 是 } f(x) \text{ 的间断点}\}$, 所有间断点生成的开区间互不相交. 在每个开区间内取 1 个有理数标志该区间

于是得到从 D 到有理数集为单射.

因为有理数集可数

故 D 是可数集.

第三章 第一次作业

1. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ 。

证明 如果 x_0 为 A 的聚点, 则 f 在 x_0 点连续

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

证明

$\Rightarrow$ 由于 f 在 x_0 点连续, 设 $\varepsilon > 0$ 。

故 $\exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

故 $\forall x \in \{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \setminus \{x_0\}$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

成立。

故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

$\Leftarrow$ 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 设 $\varepsilon > 0$ 。

故 $\exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \setminus \{x_0\}.$$

由于 $x = x_0$ 时, $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, 故 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

故 f 在 x_0 点连续。

2. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ 。下列叙述是等价的:

(i) f 在 x_0 连续;

(ii) 如果 $x_n \in A$, $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow x_0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii)

由 (i) 知, 设 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

设子列 $\{x_n\}$, $x_n \in A$, $n = 1, 2, \dots$, 满足 $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ 。

即 $x_n \rightarrow x_0$ 。

故 $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 使

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n \geq N.$$

$\forall n \geq N$ 有:

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

假设 f 在 x_0 不连续, 故 $\exists \varepsilon > 0$, 使

$$\forall \delta > 0, \text{ 有 } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

设 $x_n \in A$, $\delta = \frac{1}{n}$, 故 $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$,

即

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}.$$

由夹逼准则得: $x_n \rightarrow x_0$.

由 (ii) 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

这与

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

矛盾!

故 f 在 x_0 连续。

3. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0)$ 。如果 f 在 x_0 点连续, g 在 y_0 点连续, 则 $g \circ f$ 在 x_0 点连续。

证明 设 $\varepsilon > 0$ 。因为 g 在 y_0 点连续, 存在 $\sigma > 0$, 使得

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon, \quad \forall y \in B \cap (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma).$$

因为 f 在 x_0 点连续, 故 $\exists \delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \sigma, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

由于 $y_0 = f(x_0)$ 且 $f(x) \in B \cap (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$, 总有 $g \circ f: A \cap \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。

故

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

即

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon.$$

故 $g \circ f$ 在 x_0 点连续。

4. 设 $f \in C([a, b])$, 证明 f 有最大值和最小值。

证明 先证 f 有界。

反证法: 假设 f 无上界, 则 $f(x) \rightarrow +\infty$ 。

故 $\exists \{x_n\}$, $x_n \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$, 使

$$f(x_n) \geq n, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

又由于 x_n 有界, 故 $\exists \{x_{n_i}\}$, 使得 $\{x_{n_i}\}$ 收敛。

不妨设 $x_{n_i} \rightarrow x_0$ 。

故 $f(x_{n_i}) \rightarrow f(x_0)$, 与 $f \rightarrow +\infty$ 矛盾。

故 f 有上界。

同理可证得 f 有下界, 故 f 有界。

由于 f 有界, 设 f 有上、下确界记为 M, m 。

下证: $\exists x_0 \in [a, b]$, 使

由于 f 有界, 设 f 有上、下确界记为 M, m 。

下证: $\exists x_0 \in [a, b]$, 使

$$f(x_0) = M.$$

由于 M 为上确界, 故设 $\varepsilon > 0$, $\exists x_n \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$, 使

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M.$$

由夹逼定理可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M.$$

故 $\{f(x_n)\}$ 收敛。

由于 $x_n \in [a, b]$ 有界, 故有一个收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \rightarrow x_0$ 。

由于 $f(x_n) \rightarrow M$, 故 $f(x_{n_k}) \rightarrow M$ 。

则 $f(x_0) = M$, 即 f 有最大值。

又设 f 有下确界 m 。

故 $-f$ 有上确界 $-m$ 。

可得 $-f$ 取得最大值为 $-m$,

则 f 取得最小值 m 。

即证明了 f 有最大值和最小值。

5. 介值定理:

设 $f \in C([a, b])$, 记 $m = \min f$, $M = \max f$ 。如果 $m \leq a \leq M$, 则存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得

$$f(x_0) = a.$$

证明

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{l_n\}$, $a_n, b_n \in [a, b]$, $l_n = b_n - a_n$, $l_n \in \mathbb{R}$, $\forall n = 1, 2, \dots$ 。

由于 $f \in C([a, b])$, 且 $m = \min f$, $M = \max f$,

故 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使

$$f(x_1) = M, \quad f(x_2) = m.$$

记 $a_1 = \min\{x_1, x_2\}$, $b_1 = \max\{x_1, x_2\}$, 则 $a_1 < b_1$ 。

取 $c_1 = \frac{b_1 + a_1}{2}$ 。

若 $f(c_1) = a$, 则 $\exists x_0 = c_1$, 使 $f(x_0) = a$ 。

若 $f(c_1) \neq a$,

① $f(c_1) > a$, 则 $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$;

② $f(c_1) < a$, 则 $b_2 = b_1$, $a_2 = c_1$ 。

这样有 $a_2 \leq \max\{a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\} \leq b_2$ 。

故可得 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, $a \in [f(a_2), f(b_2)]$ 。

这样有 $a_2 \leq \max\{a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\} \leq b_2$ 。

故可得 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, $a \in [f(a_2), f(b_2)]$ 。

$\vdots$

重复上述操作, 可得

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \cdots \subset [a_1, b_1],$$

$$a \in [f(a_n), f(b_n)].$$

由上可得: $\{a_n\}$ 单调增又有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛。

记

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0,$$

故 $b_n \rightarrow a_n$, 则 $b_n \rightarrow x_0$ 。

设 $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 使

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

$$|f(b_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

故

$$|a - f(x_0)| \leq \min\{|f(a_n) - f(x_0)|, |f(b_n) - f(x_0)|\} < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

即 $f(x_0) = a$ 。

6. 设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in C((a, b))$ 单调增, 记

$$c = \inf f, \quad d = \sup f.$$

则

(i) $-\infty \leq c < d \leq +\infty$, $\text{Rgf} = (c, d)$;

(ii) 记 $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(f(x)) = x, \quad x \in (a, b),$$

则 $g \in C((c, d))$ 。

证明

(i) 任取 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ 。

由于 $c = \inf f$, $d = \sup f$, 且 f 单调增,

故

$$c = \inf f \leq f(x_1) < f(x_2) \leq \sup f = d,$$

即 $c < d$ 。

下证 $\text{Rgf} = (c, d)$ 。

设 $x_0 \in (a, b)$ 。

故 $\exists \varepsilon > 0$, 使

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b).$$

故

$$c = \inf f \leq f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon) \leq \sup f = d.$$

由于 x_0 的任意性可得 $\text{Rgf} \subset (c, d)$ 。

设 $y_0 \in (c, d)$, 记 $\varepsilon = y_0 - c$ 。

由于 $c = \inf f$,

设 $y_0 \in (c, d)$, 记 $\varepsilon = y_0 - c$ 。

由于 $c = \inf f$,

故 $\exists x_1 \in (a, b)$, 使

$$f(x_1) > \inf f + \varepsilon = y_0.$$

同理 $\exists x_2 \in (a, b)$, 使

$$f(x_2) < y_0.$$

由介值定理可知 $\exists x \in (\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\})$, 使

$$f(x) = y_0.$$

故 $(c, d) \subset \text{Rgf}$ 。

综上有: $\text{Rgf} = (c, d)$ 。

(ii) 设 $x_0 \in (a, b)$, $g(f(x_0)) = x_0$ 。

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b),$$

故

$$f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) \in (c, d).$$

由于 f 单调增, 故

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon).$$

记

$$\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}.$$

由于 $g \circ f$ 单调增, 故 g 单调增,

则 $\forall f(x) \in (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta)$, 有

$$g(f(x_0 - \varepsilon)) < g(f(x)) < g(f(x_0 + \varepsilon)),$$

即

$$x_0 - \varepsilon < g(f(x)) < x_0 + \varepsilon.$$

即

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

故 g 连续。

7. 证明: 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 既是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点, 也是 $A \cap (x_0, +\infty)$ 的聚点。设 $a \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff f(x_0^-) = f(x_0^+) = a.$$

证明 $\Rightarrow$ 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 设 $\varepsilon > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

故有:

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

因此 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = a$ 。

$\Leftarrow$ 设 $\varepsilon > 0$, 由于 $f(x_0^-) = a$, 故 $\exists \delta_1 > 0$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0).$$

又由于 $f(x_0^+) = a$, 故 $\exists \delta_2 > 0$, 使

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_2).$$

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_2).$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 。

则 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, 有

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

8. 设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 是 $A \cap (-\infty, x_0)$ 的聚点。用否定语言叙述

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

不成立。

解 存在一个 $M_0 > 0$, 使得 $\forall \delta > 0$, 都有 $x \in A$, 且满足

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad f(x) \leq M_0.$$

命题 3.1

9. 设 $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增, 设 $x_0 \in (a, b)$, 则

(i) $\sup_{(a, x_0)} f \in \mathbb{R}$, 并且

$$f(x_0^-) = \sup_{(a, x_0)} f;$$

(ii) $\inf_{(x_0, b)} f \in \mathbb{R}$, 并且

$$f(x_0^+) = \inf_{(x_0, b)} f.$$



证明 (i) 由于 $x_0 \in (a, b)$, 故 $\exists \varepsilon > 0$, 使

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b).$$

又由于 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增,

故 $\forall x \in (a, x_0)$,

$$\sup_{(a, x_0)} f \leq f(x_0) \leq f(x_0 + \varepsilon).$$

故 $\sup f \in \mathbb{R}$ 。

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in (a, x_0)$, 使

$$f(x_1) > \sup f - \varepsilon.$$

记 $\delta = x_0 - x_1 > 0$ 。

故 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 有

$$\sup f \geq f(x) > f(x_1) > \sup f - \varepsilon.$$

即

$$|f(x) - \sup f| < \varepsilon.$$

故

$$f(x_0^-) = \sup f.$$

(ii) 由于 $x_0 \in (a, b)$, 故 $\exists \varepsilon > 0$, 使

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b).$$

又由于 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增,

故 $\forall x \in (x_0, b)$,

$$\inf_{(x_0, b)} f \geq f(x_0) > f(x_0 - \varepsilon).$$

故 $\inf f \in \mathbb{R}$ 。

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in (x_0, b)$, 使

故 $\inf f \in \mathbb{R}$ 。

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in (x_0, b)$, 使

$$f(x_1) < \inf f + \varepsilon.$$

记 $\delta = x_1 - x_0$.

故 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 有

$$\inf f \leq f(x) < f(x_1) < \inf f + \varepsilon.$$

即

$$|f(x) - \inf f| < \varepsilon.$$

故

$$f(x_0^+) = \inf f.$$

10. 证明: 设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增。

(i) 设 $x_0 \in (a, b)$, 则

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

(ii) 设 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1^+) \leq f(x_2^-).$$

证明

(i) 由题 9,

$$f(x_0^-) = \sup_{(a, x_0)} f, \quad f(x_0^+) = \inf_{(x_0, b)} f.$$

由于 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调增,

故 $\forall x \in (a, x_0)$, 有 $f(x) \leq f(x_0)$, 故 $\sup_{(a, x_0)} f \leq f(x_0)$ 。

同理可得 $\inf_{(x_0, b)} f \geq f(x_0)$ 。

即

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

(ii) 取 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\delta = \frac{x_2 - x_1}{2}$ 。

由于单增:

故 $\forall x \in (x_1, x_1 + \delta)$, 有

$$f(x_1^+) = \inf_{(x_1, b)} f \leq f(x_0).$$

$\forall x \in (x_2 - \delta, x_2)$, 有

$$f(x_2^-) = \sup_{(a, x_2)} f \geq f(x_0).$$

故

$$f(x_1^+) \leq f(x_0) \leq f(x_2^-).$$

11. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 单调, 记

$$D = \{x \in I : f \text{ 在 } x \text{ 点不连续}\}.$$

证明 如果 $x_0 \in D$, 则 x_0 为 f 的跳跃不连续点。

证明

不妨设 f 单调递增。设 $x_0 \in I$ 。

由于 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 单调，故左、右极限皆存在，记为 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 。

不妨设 f 单调递增，设 $x_0 \in I$ 。

由于 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 单调，故左、右极限皆存在，记为 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 。

由题 9 可得：

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$,

故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0).$$

则 $f(x)$ 在 x_0 点连续， $x_0 \notin D$ 。

故若 $x_0 \in D$ ，则必有

$$f(x_0^-) < f(x_0^+).$$

故 x_0 为跳跃不连续点。

第四章 导数

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

由 (1) (2) 可得:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

也可得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

例题 4.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_b(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln b} = \frac{1}{\ln b}.$$

由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

令 $t = \ln(1+x)$, 有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

例题 4.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln b} - 1}{x \ln b} \ln b = \ln b.$$

例题 4.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^u - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{u \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u \ln(1+x)}{x} = u.$$

例题 4.4 $a > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ 可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{a^n} = 0.$$

即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时,

$$0 < \frac{(n+1)^k}{a^n} < \varepsilon.$$

取 $n < N+1$, 则 $n > N$ 时, 类似:

$$0 < \frac{x^k}{a^x} < \frac{[x]^k}{a^{[x]}} < \frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}} < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

4.1 导数的定义

定义 4.1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ 。如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 我们称 f 在 x_0 点可导, 并把

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

称 $f'(x_0)$ 为 f 在 x_0 点的导数。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ 差商}.$$

我们有时把 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in I \setminus \{x_0\}$, 称 f 在点 x_0 的差商。



定义 4.2

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $A \subset I$, $A \neq \emptyset$ 。如果 $\forall x \in A$, f 在 x 点可导, 我们称 f 在 A 上可导。



例题 4.5

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x^n + C_n^1(\Delta x)x^{n-1} + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

例题 4.6

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^\alpha \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} \\ &= x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1 + \Delta x/x)} - 1}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

$\alpha \in (0, 1)$ 时:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^\alpha - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{\alpha-1} = +\infty.$$

故 f 在 $x = 0$ 点不可导。

定义 4.3

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果对于任意 $x \in I$, f 在 x 点可导, 我们称 f 可导。并定义函数 $f': I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f \text{ 在 } x \text{ 点的导数}, \quad x \in I.$$

称 f' 为 f 的导函数, 简称导数。



注 如果 f' 的定义域是 I , 我们用 x 表示 f 的自变量, 类似地记

$$f' = \frac{df}{dx}, \quad f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

命题 4.1

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 是区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in I \cap J$ 。如果存在 $\varepsilon > 0$, 使

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \cap J,$$

并且

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

则 f 在 x_0 点可导当且仅当 g 在 x_0 点可导, 并且当 f 在 x_0 点可导时, $f'(x_0) = g'(x_0)$ 。

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \cap J,$$

并且

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

则 f 在 x_0 点可导当且仅当 g 在 x_0 点可导, 并且当 f 在 x_0 点可导时, $f'(x_0) = g'(x_0)$ 。



证明 由于 f 在 x_0 点可导, 故

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

极限存在。

又有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

因此极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 所以 g 在 x_0 点可导, 且

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

定义 4.4

设 $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$ 。如果存在 $\varepsilon > 0$, 使 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$, 称 x 为 A 的内点。

若 $\forall x \in A$, x 都是 A 的内点, 称 A 为开集。

**例题 4.7**

(a) 设 $A = [a, b]$, 则 $\forall x \in (a, b)$, x 是 A 的内点, a, b 不是 A 的内点。

(b) 设 A 为开区间, 则 A 为开集。

(c) 设 $A = \mathbb{R} \setminus \{k\alpha : k \in \mathbb{Z}\}$, 则 A 为开集。

定义 4.5

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 为左端点或右端点, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 我们称 f 在 x_0 点左可导, 并把

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

称 $f'_-(x_0)$ 在 x_0 点的左导数; 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 我们称 f 在 x_0 点右可导, 并记

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

称 $f'_+(x_0)$ 为 f 在 x_0 点的右导数。



命题 4.2

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 为 I 的内点, 设 $a \in \mathbb{R}$, 则

$$f'(x_0) = a \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a.$$



证明 记

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

则

$$f'(x_0) = a \iff \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \iff g(x_0^-) = g(x_0^+) = a \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a.$$

例题 4.8 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x \leq 0, \\ \beta x, & x > 0. \end{cases}$$

则

$$f'_-(0) = \alpha, \quad f'_+(0) = \beta.$$

因此 f 在 x_0 点可导当且仅当 $\alpha = \beta$ 。

命题 4.3

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ 。如果 f 在 x_0 点可导, 则 f 在 x_0 点连续。



证明 由于 f 在 x_0 点可导, 故极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在。记

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}.$$

设 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

即

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon|x - x_0|.$$

由于 $|x - x_0| < \delta$, 故

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon\delta,$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (\varepsilon\delta + |f'(x_0)|)\varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

故 f 在 x_0 点连续。

另一种证明:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 f 在 x_0 点连续。

连续是可导的必要条件。

例题 4.9 设:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

因为 H 在 $x = 0$ 点不连续, 所以 H 在 $x = 0$ 点不可导。

例题 4.10 设

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

则 f 连续, 但 f 在 $x = 0$ 点不可导。

注 连续的函数, 可导函数比连续函数要求“光滑”。

4.2 导数的增量表示

命题 4.4

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ 的内点。 f 在 x_0 点可导, 当且仅当存在 $h: I \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 x_0 点连续, $h(x_0) = 0$, 使得:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0), \quad x \in I.$$

证明 令

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}, & x \in I \setminus \{x_0\}, \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

则 $h(x_0) = 0$, 并且

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0), \quad x \in I.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 = h(x_0),$$

所以 h 在 x_0 点连续。

由命题 4 可有如下定义。

推论 4.1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 为 I 的内点。 f 在 x_0 点可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0.$$



证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0) = 0.$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0.$$

注 推论 5 意味着, 在点附近, $f(x)$ 近于一次函数。

定义 4.6

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 为 I 的内点, f 在 x_0 点可导。我们称函数

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

为 f 在 x_0 点的切线。



4.3 求导法则

命题 4.5

(四则运算)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, f, g 在 x_0 点可导, 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

(i)

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0);$$

(ii)

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

(iii) 如果

$$g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I,$$

则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 点可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$



证明

(i) 由于

$$\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} = \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I.$$

(ii) 由于

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I.$$

对 (i) (ii) 由极限的四则运算可证。

(iii) 由于

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right). \end{aligned}$$

由极限四则运算法则可得。

命题 4.6

(复合求导法则)

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in I$, f 在 x_0 点可导, $y_0 = f(x_0)$, g 在 y_0 点可导, 则 $g \circ f$ 在 x_0 点可导, 并且

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$



证明 $\exists h: J \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 y_0 点连续, 并且 $h(y_0) = 0$, 使得

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + h(y)(y - y_0), \quad y \in J.$$

则

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)(f(x) - f(x_0)) + h(f(x))(f(x) - f(x_0)), \quad x \in I.$$

因此:

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= g'(y_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(y_0)f'(x_0) + h(f(x_0))f'(x_0). \\ &= g'(y_0)f'(x_0) + h(f(x_0))f'(x_0). \end{aligned}$$

由于 $h(y_0) = 0$, 故

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

命题 4.7

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $\varphi: I \rightarrow J$ 为双射, $\psi: J \rightarrow I$ 为 φ 的反函数。设 $x_0 \in I$, $y_0 = \varphi(x_0)$ 。如果 φ 在 x_0 点可导, $\varphi'(x_0) \neq 0$, ψ 在 y_0 点连续, 则 ψ 在 y_0 点可导, 并且

$$\psi'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}.$$



证明 因为 φ 在 x_0 点可导, $\exists h: I \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 x_0 点连续且 $h(x_0) = 0$, 使

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0), \quad x \in I.$$

$$y - y_0 = (\varphi'(x_0) + h(\psi(y)))(\psi(y) - \psi(y_0)), \quad y \in J.$$

由于

$$\lim_{y \rightarrow y_0} h(\psi(y)) = h(\psi(y_0)) = h(x_0) = 0.$$

故 $\exists \varepsilon > 0$, 使

$$|h(\psi(y))| \leq \frac{1}{2} |\varphi'(x_0)|, \quad \forall y \in J \cap (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon),$$

且

$$\varphi'(x_0) + h(\psi(y)) \neq 0.$$

所以:

$$\frac{\psi(y) - \psi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\varphi'(x_0) + h(\psi(y))}, \quad \forall y \in J \cap (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \setminus \{y_0\}.$$

等式两边同时取极限有:

$$\psi'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}.$$

另证:

设 $y = \varphi(x)$ 在 x_0 的某邻域上严格单调且连续。

如果 $\varphi(x)$ 在 x_0 可导, $\varphi'(x_0) \neq 0$, 则反函数 $x = \psi(y)$ 在 $y_0 = \varphi(x_0)$ 处可导, 并且

$$\psi'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)} = \frac{1}{\varphi'(\psi(y_0))}.$$

证明

$x = \psi(y)$ 严格单调。

于是当 $y \rightarrow y_0$, 则 $y \neq y_0$ 时, $\psi(y) \neq \psi(y_0)$, 且 $\psi(y) \rightarrow \psi(y_0)$ 。

因而

$$\begin{aligned} \psi'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\psi(y) - \psi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{\varphi(\psi(y)) - \varphi(\psi(y_0))}{\psi(y) - \psi(y_0)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\varphi'(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\varphi'(\psi(y_0))}. \end{aligned}$$

推论 4.2

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, 记

$$C^1(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ 可导且 } f' \text{ 连续}\}.$$

$$C^1(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ 可导且 } f' \text{ 连续}\}.$$

如果 $f \in C^1(I)$, 我们称 f 连续可微。



推论 4.3 (反函数求导公式)

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $\varphi: I \rightarrow J$ 为双射, $\psi: J \rightarrow I$ 为 φ 的反函数。如果 $\varphi \in C^1(I)$, 并且

$$\varphi'(x) \neq 0, \quad \forall x \in I,$$

则 $\psi \in C^1(J)$, 且

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi'(\psi(y))}, \quad \forall y \in J.$$



注 我们注意在推论 4 中, 我们对 φ 的反函数 ψ 没有任何假设。

例题 4.11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2.$$

例题 4.12

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1}) - n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})} \\ &= \frac{1}{mn} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(x+x^2+\cdots+x^{n-1}) - n(x+x^2+\cdots+x^{m-1})}{1-x}. \end{aligned}$$

令 $t = 1 - x$, 可得:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{mn} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m[1 + (1-t) + (1-t)^2 + \cdots + (1-t)^{n-1}] - n[1 + (1-t) + (1-t)^2 + \cdots + (1-t)^{m-1}]}{t} \\ &= \frac{1}{mn} [-m(C_n^1 + \cdots + C_{n-1}^1) + n(C_m^1 + C_{m-1}^1)] \\ &= \frac{1}{mn} \left[-m \frac{n(n-1)}{2} + n \frac{m(m-1)}{2} \right] = \frac{m-n}{2}. \end{aligned}$$

例题 4.13

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x} - e^{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\tan x - \sin x}{e^{\tan x} - e^{\sin x}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\sin x}} \frac{\tan x - \sin x}{e^{\tan x - \sin x} - 1} = \frac{1}{2}.$$

微分中值定理:

微分中值定理:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

例题 4.14

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(1 + x^{1/m} + x^{2/m} + \cdots + x^{(m-1)/m})}{(1 + x^{1/n} + x^{2/n} + \cdots + x^{(n-1)/n})(x-1)} = \frac{n}{m}.$$

第五章 微分中值定理

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos x.$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

5.1 中值定理及其应用

首先证明如下的 Fermat 引理:

定理 5.1

(Fermat 引理)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f 在 x_0 点取得最大值或最小值。如果 f 在 x_0 点可导, 则 $f'(x_0) = 0$ 。



证明

(i) 设 f 在 x_0 点取得最小值, 记

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

则

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0^-) = g(x_0^+).$$

$\exists \varepsilon > 0$, 使 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$ 。因为

$$g(x) \leq 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

所以 $g(x_0^-) \leq 0$ 。因为

$$g(x) \geq 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$

所以 $g(x_0^+) \geq 0$ 。又因为 $g(x_0^-) = g(x_0^+)$,

故

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

(ii) 设 f 在 x_0 点取得最大值, 则 $-f$ 在 x_0 点取得最小值。

由 (i):

$$(-f)'(x_0) = -f'(x_0) = 0,$$

故 $f'(x_0) = 0$ 。

最小值处直接有:

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

$$g(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

$$g(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

故 $f'(x_0) = 0$ 。

定理 5.2

(Rolle 定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, f 在 (a, b) 上可导。如果 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = 0.$$



注 Rolle 定理告诉我们: 如果函数端点处有相同的函数值, 则 f 一定有水平的切线。

证明

因为 f 连续, 存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得

$$f(x_1) = \max f, \quad f(x_2) = \min f.$$

如果 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 f 为常数, 则 $f'(\xi) = 0$ 。

如果 $f(x_1) \neq f(a)$, 则 $f(x_1) > f(a)$, 即 $x_1 \in (a, b)$ 。由 Fermat 引理, $f'(x_1) = 0$ 。

如果 $f(x_2) \neq f(a)$, 则 $f(x_2) < f(a)$, 即 $x_2 \in (a, b)$ 。由 Fermat 引理, $f'(x_2) = 0$ 。

定理 5.3

(Lagrange 中值定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, f 在 (a, b) 上可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Remarks:

(i) Rolle 定理是 Lagrange 中值定理的特殊情形;

(ii) Lagrange 中值定理告诉我们: f 在区间 (a, b) 上的平均变化率等于 f 在区间内的某一点的瞬时变化率;

(iii) 从几何上看 Lagrange 中值定理告诉我们, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 f 在这一点处的切线与连接两个端点的割线平行。

证明

令

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a), \quad x \in [a, b].$$

构造函数 $h(x)$, 使 $h(a) = h(b) = 0$ 。

则 $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上可导,

$$h(a) = h(b) = 0,$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad x \in (a, b).$$

由 Rolle 定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $h'(\xi) = 0$ 。

即

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

例题 5.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{e^{\tan x} - e^{\sin x}} = \frac{1}{2}.$$

由于 $\tan x > \sin x$, 且 $\tan x \rightarrow 0$ 、 $\sin x \rightarrow 0$,

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\xi_1}} (\tan x - \sin x)}{e^{\xi_2} (\tan x - \sin x)} = \frac{1}{2}.$$

例题 5.2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = 4.$$

定理 5.4

(Cauchy 中值定理)

设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, f, g 在 (a, b) 上可导,

$$g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

则 $g(b) \neq g(a)$, 并且存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$



证明

由 Lagrange 中值定理, $g(b) \neq g(a)$ 。记

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x), \quad x \in [a, b].$$

则 $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, h 在 (a, b) 上可导,

$$h(a) = h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b).$$

由 Rolle 定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $h'(\xi) = 0$ 。即

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

又因为 $g'(\xi) \neq 0$, $g(b) - g(a) \neq 0$, 所以

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

右侧另证：构造

$$h'(x) = g'(x)(f(b) - f(a)) - f'(x)(g(b) - g(a)) = 0,$$

$$\begin{cases} h(a) = g(a)(f(b) - f(a)) - f(a)(g(b) - g(a)), \\ h(b) = g(b)(f(b) - f(a)) - f(b)(g(b) - g(a)). \end{cases}$$

由 Rolle 定理可知。

例题 5.3

一、设 $f(x)$ 可导，试证在 $f(x)$ 两个零点之间，必有 $f(x)$ 的零点。

证明

令 $F(x) = e^x f(x)$, $f(x)$ 的零点为 x_1, x_2 。

即 $F(x_1) = e^{x_1} f(x_1) = 0$,

$$F(x_2) = e^{x_2} f(x_2) = 0.$$

由 Rolle 定理，存在 ξ ，使得

$$F'(\xi) = (e^x f(x) + e^x f'(x))|_{x=\xi} = 0.$$

即 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ 。零点为 ξ 。

例题 5.4

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, 1, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, x \in [0, 1], \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ 。

证明 任取 $\varepsilon > 0$ 。

对于有理数这一类，满足 $R(x) \leq \varepsilon$ 。

任取 $\varepsilon > 0$ 。

对于无理点 x 一定满足 $R(x) \leq \varepsilon$

对于 $x \in \left\{ \frac{p}{q} \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ 且 } q \neq 0 \right\}$

设 $R(x) \geq \varepsilon$, 即 $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$

故有 $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$

由于 ε 给定则 q 是有限的。

由于 $p < q$, 故 p 也为有限的。

任取 $x_0 \in (a, b)$, $\exists \delta > 0$, $\ni$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $R(x) \geq \varepsilon$ 的个数有限个。

记距离 x_0 最近的点为 x'_0

$$0 < \delta_0 = |x_0 - x'_0| < \delta$$

故 $\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ 有

$$R(x) \leq \varepsilon \text{ 成立.}$$

即 $R(x)$ 连续

在 x_0 附近, 满足 $R(x) \geq \varepsilon$ 的点为有限个。若 x 是无理点, 满足 $|R(x)| \leq \varepsilon$ 。若 x 是有理点, $R(x) \geq \varepsilon$, 即 $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$, 这样的 q 是有限个, p 也为有限个, 即满足 $|R(x)| \geq \varepsilon$ 的有理数只有有限个。

记距离 x_0 最近的点为 x_1 , 取 $\delta = |x_0 - x_1|$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|R(x)| < \varepsilon$ 。

例题 5.5

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$D(x)$ 处处无极限。

证明

设 x_0 点。

由于有理数和无理数在任何区间内均有,

$\forall \delta > 0$, 都有 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 区间内有不可数的有理和无理点。

故 $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$, 使

$$|D(x) - D(x_0)| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

即 $D(x)$ 处处无极限。

例题 5.6 已知:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^3.$$

求:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x^2}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = 3,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) = 3x.$$

由于 $x \rightarrow 0$ 时 $\ln(1+x) \sim x$,

故

$$x + \frac{f(x)}{x} \sim 3x,$$

$$\frac{f(x)}{x} \sim 2x.$$

仿同上可得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x^2} = e^2.$$

第六章 第二次作业

1. 设 $0 < \alpha < 1$, $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, $x \in [0, +\infty)$ 。

证明 f 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 并且

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x \in (0, +\infty).$$

证明

设 $x_0 \in (0, +\infty)$, 记

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$g(x) = \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \frac{[x_0 + (x - x_0)]^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = x_0^\alpha \frac{\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^\alpha - 1}{x - x_0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = x_0^\alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^\alpha - 1}{x - x_0} = x_0^\alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

故 f 在 x_0 点可导, 且

$$f'(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

由于 x_0 是在 $(0, +\infty)$ 上任取的点, 故 $\forall x \in (0, +\infty)$ 有

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 为 I 的内点。设 $a \in \mathbb{R}$ 。证明

$$f'(x_0) = a \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a.$$

证明 设

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$\Rightarrow$ 由 $f'(x_0) = a$,

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ 。

故

$$g(x_0^-) = g(x_0^+) = a,$$

即

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a.$$

$\Leftarrow$ 由于 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a$,

故 $g(x_0^-) = g(x_0^+) = a$,

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a,$$

即 $f'(x_0) = a$ 。

3. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ 。 f 在 x_0 点可导。证明: $\exists h: I \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 x_0 点连续, $h(x_0) = 0$, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0), \quad x \in I.$$

记

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & x \in I \setminus \{x_0\}, \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 = h(x_0).$$

故 $h(x)$ 连续。

且

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0), \quad \forall x \in I.$$

4. 证明如下的 Fermat 引理:

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f 在 x_0 点取得最大值或最小值。如果 f 在 x_0 点可导, 则 $f'(x_0) = 0$ 。

证明

不妨假定 f 在 x_0 点取得最大值。

故

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in I.$$

记

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall x \in I.$$

由于 f 在 x_0 点可导, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在。

$$g(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

$$g(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在, 故 $g(x_0^+) = g(x_0^-) = 0$ 。

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

即 $f'(x_0) = 0$ 。

极限:

一、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}.$$

解

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = 1.$$

二、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2(3x+1)^3}{(6x+1)^5}.$$

解

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{1}{x})^2 (3 + \frac{1}{x})^3}{(6 + \frac{1}{x})^5} = \frac{2^2 \cdot 3^3}{6^5} = \frac{1}{72}.$$

三、

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

解
解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

四、

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \arcsin \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \right] \\ &= \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

五、

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} \left(3^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot \ln 3 = \ln 3.\end{aligned}$$

六、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right).$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x \cdot 2 \sin(x/2) \cos(x/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x/2)}{x} \cdot \frac{1}{2 \cos(x/2)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

七、

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}.$$

解

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/2)}$$

令 $t = 1 - x$,

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(\pi t/2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{3/\sin x}.$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{3/\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{\sin x} \ln(1-2x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(1-2x)}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(-2x)}{\sin x}} = e^{-6}.\end{aligned}$$

第七章 高阶导数

7.1 高阶导数的定义

设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间。利用归纳法, 我们可以定义 f 的高阶导数。
 f 的 n 阶导数就是 f 的 $n-1$ 阶导数的导数。

定义 7.1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。下面用归纳法定义 f 在 x_0 点的 n 阶导数, $n = 1, 2, \dots$ 。

(i) 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 我们称 f 在 x_0 点一阶可导, 并记

$$f^{(1)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

称 $f^{(1)}(x_0)$ 为 f 在 x_0 点的一阶导数。

(ii) 设 $n \geq 1$ 。如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\forall x \in I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, f 在 x 点 n 阶可导, 并且函数 $h(x) = f$ 在 x 点的 n 阶导数, $x \in I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 在 x_0 点一阶可导, 我们称 f 在 x_0 点 $n+1$ 阶可导, 并记

$$f^{(n+1)}(x_0) = h'(x_0).$$

称 $f^{(n+1)}(x_0)$ 为 f 在 x_0 点的 $n+1$ 阶导数。

注 定义中 (ii) $f^{(n)}(x)$ 定义与 ε 的选取无关。

定义 7.2

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $A \subset I$, $A \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}^*$ 。如果对于 $\forall x \in A$, f 在 x 点 n 阶可导, 称 f 在 A 上 n 阶可导。
下面定义高阶导函数。

定义 7.3

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ 。如果 $\forall x \in I$, f 在 x 点 n 阶可导, 我们称 f 有 n 阶可导, 并定义 $f^{(n)}: I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = f \text{ 在 } x \text{ 点的 } n \text{ 阶导数}, \quad x \in I.$$

称 $f^{(n)}$ 为 f 的 n 阶导函数, 简称 f 的 n 阶导数。

如果 $f = f(x)$, 我们也记

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

命题 7.1

设 I, J 为区间, $n \in \mathbb{N}^*$, 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I \cap J$. 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \cap J,$$

并且

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

则 f 在 x_0 点 n 阶可导当且仅当 g 在 x_0 点 n 阶可导, 并且当 f 在 x_0 点 n 阶可导时,

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$



证明 数学归纳法。

由“导数”中命题 1: 当 $n = 1$ 时结论成立。

设 $n = k$ 时命题成立, $k \in \mathbb{N}^*$, 下面证明 $n = k + 1$ 时结论成立。

设 f 在 x_0 点 $k + 1$ 阶可导, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意 $x \in I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, f 在 x 点 k 阶可导。令 $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$, 则

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2).$$

设 $x \in (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$, 下面证明: g 在 x 点 k 阶可导, 并且 $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$ 。

令

$$\delta = \min\{x - (x_0 - \varepsilon_2), (x_0 + \varepsilon_2) - x\}.$$

则

$$f(u) = g(u), \quad \forall u \in (x - \delta, x + \delta).$$

因为 f 在 x 点 k 阶可导, 因此由归纳假设, g 在 x 点 k 阶可导, 并且 $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$ 。

这样我们就证明了 $\forall x \in I \cap (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$, g 在 x 点 k 阶可导并且

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2).$$

记

$$h(x) = f^{(k)}(x), \quad x \in (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2).$$

因为 f 在 x_0 点 $k + 1$ 阶可导, 由定义 1, h 在 x_0 点可导, 且 $h'(x_0) = f^{(k+1)}(x_0)$ 。

因此由定义 1, g 在 x_0 点 $k + 1$ 阶可导, 并且

$$g^{(k+1)}(x_0) = h'(x_0) = f^{(k+1)}(x_0).$$

例题 7.1 设 $f(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$. 则 f 二阶可导。

例题 7.2 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 2x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

证明 f 在 $x = 0$ 点不二阶导。

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 4x, & x > 0. \end{cases}$$

记

$$g(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

则

$$g(0^-) = 2, \quad g(0^+) = 4.$$

注

(i) 对于一般的一元函数: $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 如果 x_0 为 A 的内点. 我们可以同样定义 f 在 x_0 点的高阶导数; 如果 A 为开集. 我们可以同样定义 f 的导函数.

(ii) 粗略地说: 可导的阶数越高. 函数越光滑.

7.2 高阶导数的运算法则

命题 7.2

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间。

(i) 线性性:

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}.$$

(ii) Leibniz 公式:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)}.$$

证明 (ii)

引理 7.1

$$C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i.$$

证明

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-i+2)}{(i-1)!} \\ &= \frac{k(k-1)\cdots(k-i+2)}{i!} ((k-i+1) + i) = C_{k+1}^i = \text{RHS}. \end{aligned}$$

设 $k \in \mathbb{N}^*$, $n = k$ 时命题成立, 下面证明 $n = k + 1$ 时也成立。

设 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $k + 1$ 阶可导:

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)} g^{(i)}.$$

因此由乘积函数求导法则:

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i+1)} g^{(i)} + \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)} g^{(i+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i+1)} g^{(i)} + \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} f^{(k-i+1)} g^{(i)} \\
&= C_k^0 f^{(k+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^k (C_k^i + C_k^{i-1}) f^{(k-i+1)} g^{(i)} \\
&= C_{k+1}^0 f^{(k+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^k C_{k+1}^i f^{(k-i+1)} g^{(i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i f^{(k+1-i)} g^{(i)}.
\end{aligned}$$

归纳原理。

说明下列极限不存在：

①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

②

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

① 令

$$f(x) = \frac{1}{2n\pi}, \quad x_n \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x_n) = 0,$$

$$f(y_n) = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}, \quad y_n \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(y_n) = 1.$$

与归结原理矛盾：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

无极限。

② 同理之一：

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 构造数列 $a_n = x_0 + \frac{1}{n}$, 则 $\lim a_n = x_0$, $D(x_n) = 1$, 故 $\lim D(a_n) = 1$ 。

$b_n = x_n + \frac{\pi}{n}$, 则 $\lim b_n = x_0$, $D(b_n) = 0$, 故 $\lim D(b_n) = 0$ 。

$\forall x_0 \notin \mathbb{Q}$, $a_n = x_0 + \frac{\pi}{n}$ (无理数列)。

由于一定存在有理数列和无理数列, 故 $\exists$ 有理数列 $\{a_n\}$, 使得 $x_0 = \lim b_n$ 。此时 $\lim f(a_n) = 0 \neq 1 = \lim f(b_n)$, 故 $D(x)$ 处处无极限。

函数极限存在的柯西准则：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(x_0, \delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

函数极限存在的柯西准则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(x_0, \delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ 存在} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists X_0, \forall x_1, x_2 \in (X_0, +\infty), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

解释二:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

存在 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 。 $\forall \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

由于有理数和无理数同样稠密, 故总能找到 $r \in \mathbb{R}$ 和 $q \in \mathbb{Q}$, 满足

$$0 < |r - x_0| < \delta, \quad 0 < |q - x_0| < \delta.$$

这时

$$|D(r) - D(q)| = 1 > \frac{1}{2}.$$

不满足柯西准则, 故 $D(x)$ 处处无极限。

例题 7.3

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2m+1}x^{2m+1} = 0$$

必有实根。

设

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2m+1}x^{2m+1}.$$

不妨设 $a_{2m+1} > 0$ 。

$$f(x) = x^{2m+1} \left(a_0 \frac{1}{x^{2m+1}} + a_1 \frac{1}{x^{2m}} + \cdots + a_{2m+1} \right).$$

可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故存在点 x_1 使得 $f(x_1) > 0$ 。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

故存在点 x_2 使得 $f(x_2) < 0$ 。

由介值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(\xi) = 0.$$

ξ 即为实根。

例题 7.4 $a > 0$, 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \left(a^{1/x} - a^{-1/x} \right)$$

存在, 求 p 的范围。

解

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p a^{-1/x} \left(a^{2/x} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p a^{-1/x} \ln a \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln a \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p-2}.$$

由于极限存在, 故 $p - 2 \leq 0$, 即 $p \leq 2$ 。

例题 7.5 设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $\varphi: I \rightarrow J$ 为双射, $\psi: J \rightarrow I$ 为 φ 的反函数, φ, ψ 二阶可导。设 $x \in I$, 记 $y = \varphi(x)$, 用 $\varphi'(x)$ 、 $\varphi''(x)$ 表示 $\psi''(y)$ 。

$$\psi(\varphi(x)) = x.$$

两边求导:

$$\psi'(y)\varphi'(x) = 1,$$

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)}.$$

两边再导:

$$\psi''(y)\varphi'(x) = -\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2},$$

$$\psi''(y) = -\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}.$$

$$\psi''(y) = -\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}.$$

7.3 微分中值定理习题

1. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可导。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi).$$

$$\frac{F'(x) - F'(y)}{G'(x) - G'(y)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

证明

要证明:

$$\frac{f(a) - f(b) - \frac{b-a}{2}[f'(a) + f'(b)]}{(b-a)^3} = \frac{1}{12}f''(\xi).$$

令

$$F(x) = f(a) - f(x) - \frac{a-x}{2}[f'(a) + f'(x)],$$

$$G(x) = (x-a)^3.$$

$$\begin{cases} F'(x) = -f'(x) + \frac{1}{2}[f'(a) + f'(x)] + \frac{x-a}{2}f''(x), \\ G'(x) = 3(x-a)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F''(x) = -f''(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{x-a}{2}f'''(x) = \frac{x-a}{2}f'''(x), \\ G''(x) = 6(x-a). \end{cases}$$

由柯西中值定理, $\exists \eta \in (a, b)$, 设 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\eta)}{G'(\eta)} = \frac{F''(\xi)}{G''(\xi)} = \frac{1}{12}f'''(\xi).$$

2. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f'''(x)$ 在 (a, b) 上存在。证明:

$\forall c \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{1}{2}f''(\xi) = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

解 令

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c) + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c) + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b) \right].$$

则 $F(a) = F(b) = F(c) = 0$ 。

由 Rolle 定理, $\exists \xi_1 \in (a, c)$, $\xi_2 \in (c, b)$, 使 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ 。

再次使用 Rolle 定理, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $F''(\xi) = 0$ 。

对 $F(x)$ 求导得:

$$F''(x) = f''(x) - 2 \left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} \right].$$

故结论成立。

3. 设 f 在 (a, b) 上连续, 在 (a, b) 内可导。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

证明 令

$$F(x) = (b^2 - a^2)f(x) - x^2[f(b) - f(a)].$$

恰好有 $F(a) = F(b)$,

故 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

恰好有 $F(a) = F(b)$,

故 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

4. f 在 a 的某邻域二阶可导, h 为充分小的正数。证明: 存在 θ , $0 < \theta < 1$, 使

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \frac{f''(a+\theta h) + f''(a-\theta h)}{2}.$$

证明

$$\begin{cases} F(x) = f(a+hx) + f(a-hx), \\ G(x) = (hx)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'(x) = hf'(a+hx) - hf'(a-hx), \\ G'(x) = 2h^2x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F''(x) = h^2f''(a+hx) + h^2f''(a-hx), \\ G''(x) = 2h^2. \end{cases}$$

$\exists \theta \in (0, 1)$, 使得

$$\frac{F(1) - F(0)}{G(1) - G(0)} = \frac{F'(a + \theta h) + F'(a - \theta h)}{2}.$$

另证：使用 Lagrange 中值定理。

5. f 在 (a, b) 二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

这种形式参考中点。在点到两端点距离都会出现 $\frac{a-b}{2}$ 。

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x}.$$

解

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{a^x + b^x + c^x}{3}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c}{3(a^x + b^x + c^x)} = \frac{\ln(abc)}{3}. \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} = \sqrt[3]{abc}.$$

另解：

$$\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} = \left[\frac{(a^x - 1) + (b^x - 1) + (c^x - 1)}{3} + 1 \right]^{1/x}.$$

由 Lagrange 中值, $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, x)$, 使

$$\begin{cases} a^x - 1 = (x - 0)a^{\xi_1} \ln a, \\ b^x - 1 = (x - 0)b^{\xi_2} \ln b, \\ c^x - 1 = (x - 0)c^{\xi_3} \ln c. \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{a^{\xi_1} \ln a + b^{\xi_2} \ln b + c^{\xi_3} \ln c}{3} x \right]^{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{a^{\xi_1} \ln a + b^{\xi_2} \ln b + c^{\xi_3} \ln c}{3}} = \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

由于 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, x)$, 且 $x \rightarrow 0$, 故 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \rightarrow 0$ 。

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} = \sqrt[3]{abc}.$$

第八章 Taylor 展式

定理 8.1 (Taylor 展式与 Lagrange 余项)

设 $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, n 阶可导, $n \in \mathbb{N}^*$. 设 $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 则存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}((1-\theta)x_0 + \theta x)}{n!} (x - x_0)^n.$$



注 (i) 我们称

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

为 f 在 x_0 点的 $n-1$ 阶 Taylor 多项式。注意:

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0).$$

P 与 f 在 x_0 点有相同的函数值和直到 $n-1$ 阶的导数值。

(ii) 在定理 1 中, 当 $n=1$ 时, 我们得到:

$$f(x) = f(x_0) + f'((1-\theta)x_0 + \theta x).$$

这就是 Lagrange 中值定理。因此定理 1 是 Lagrange 中值定理的推广。

(iii) 我们称

$$R(x) = \frac{f^{(n)}((1-\theta)x_0 + \theta x)}{n!} (x - x_0)^n$$

为 Taylor 展式的 Lagrange 余项。

如果 $f^{(n)}$ 有界, $|f^{(n)}| < M$, 则

$$|R(x)| < \frac{M}{n!} |x - x_0|^n.$$

上式告诉我们, 在 x_0 附近, f 近似等于一个 $n-1$ 次多项式函数, 误差小于 $C|x - x_0|^n$ 。

证明 记

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

则 g n 阶可导, 且

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad g^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

如果 $x = x_0$, 定理的结论显然成立。设 $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 由 Cauchy 中值定理,

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \frac{g'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}}.$$

在区间 (x_0, x) 上应用 Cauchy 中值定理,

$$= \frac{g'(\xi_1) - g'(x_0)}{n[(\xi_1 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1}]} = \frac{g''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - x_0)^{n-2}}.$$

...

$$= \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}.$$

其中

$$x_0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x.$$

因为 $x_0 < \xi_n < x$, $\exists \theta \in (0, 1)$, 使

$$\xi_n = (1 - \theta)x_0 + \theta x.$$

故

$$\xi_n = (1 - \theta)x_0 + \theta x.$$

故

$$g(x) = \frac{f^{(n)}((1 - \theta)x_0 + \theta x)}{n!} (x - x_0)^n.$$

即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}((1 - \theta)x_0 + \theta x)}{n!} (x - x_0)^n.$$

定理 8.2 (Taylor 展式: Peano 余项)

设 $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, n 阶可导, $n \in \mathbb{N}^*$, 则存在 $h: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 x_0 点连续且 $h(x_0) = 0$, 使

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + h(x)(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$



注 (i) 定理 2 实际上是导数命题 4 的推广;

(ii) 我们称 $R(x) = h(x)(x - x_0)^n$ 为 Taylor 展式的 Peano 余项。注意到

$$\frac{R(x)}{|x - x_0|^n} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0.$$

因此带 Peano 余项的 Taylor 展式可写成如下形式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

上式告诉我们, 在 x_0 点附近, f 近似一个 n 次多项式, 误差为 n 次同阶的高阶无穷小量。

(iii) 定理 1 的形式与定理 2 的形式都相同。

证明

$n = 1$ 时, 由导数命题 4 结论而成立。

设 $n \geq 2$, 记

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

则 g n 阶可导, 并且

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

下面证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

设 $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ 。由 Cauchy 中值定理, $\exists \xi_1 \in (x_0, x)$,

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \frac{g'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}}.$$

反复应用 Cauchy 中值定理可得 $x_0 < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x$, 使

反复应用 Cauchy 中值定理可得 $x_0 < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x$, 使

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)}.$$

这样, 即 $\exists \xi \in (x_0, x)$, 使

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} \rightarrow 0.$$

令

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n}, & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}, \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

则 h 在 x_0 点连续, $h(x_0) = 0$ 。且

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + h(x)(x - x_0)^n.$$

Peano 余项的唯一性

若:

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n + o(|x - x_0|^n), \quad (1)$$

$$f(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + \cdots + B_n(x - x_0)^n + o(|x - x_0|^n), \quad (2)$$

则:

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad \dots, \quad A_n = B_n.$$

证明 对 (1) 式, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_0$; 对 (2) 式, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B_0$ 。则 $A_0 = B_0$ 。

约去 A_0, B_0 之后, 同时除以 $x - x_0$, 再同样推可知 $A_1 = B_1, \dots$ 。

故 $A_0 = B_0, A_1 = B_1, \dots, A_n = B_n$ 。

下面给出 6 个常用的 Taylor 展式 (表意在材料表 x 为 0 附近)

(1)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \cdots + x^n + o(|x|^n), \quad x \rightarrow 0.$$

(2)

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(|x|^n).$$

(3)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(|x|^n), \quad x \rightarrow 0.$$

(4)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(|x|^{2n}), \quad x \rightarrow 0.$$

(5)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(|x|^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

(6)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(|x|^n).$$

例题 8.1 由数学归纳法证明:

$$\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$n=1$ 时:

$$\sin'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

设 $n=k$ 时成立, 下证 $n=k+1$ 时,

$$\sin^{(k+1)} x = \left[\sin^{(k)} x\right]' = \left[\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

设 $n=k$ 时成立, 下证 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} \sin^{(k+1)} x &= \left[\sin^{(k)} x\right]' = \left[\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

$\cos^{(n)} x$ 同理可证。

例题 8.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x) + x^2}{x^4} = -\frac{5}{12}.$$

由

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{12}x^4 - \frac{x^6}{9}}{x^4} = -\frac{5}{12}.$$

例题 8.3 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数, $n \geq 3$ 。思路: 先对 $\ln(1+x)$ 展开, 再写出 x 项后形式, 对应系数相等。

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-3} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(|x|^{n-2}).$$

$$f(x) = x^2 \left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-3} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(|x|^{n-2}) \right)$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^{n-3} \frac{x^n}{n-2} + o(|x|^n).$$

故

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-3} n!}{n-2}.$$

证明 e 为无理数。

利用 Lagrange 余项：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}((1-\theta)x_0 + \theta x)}{n!}.$$

$$e^\xi = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}.$$

则

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} = e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

设 e 为有理数，分母为 N 。

取 $n = \max\{N, 3\}$ 。

故

$$\frac{e^\xi}{n+1} = n! \left[e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right].$$

由 $e^\xi < 3$ ，故

$$0 < \frac{e^\xi}{n+1} < 1,$$

与两边为整数矛盾！

故 e 为无理数。

第九章 第三次作业

一、设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f 在 x_0 点可导。证明存在 $h: I \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 x_0 点连续, $h(x_0) = 0$, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0), \quad x \in I.$$

证明 记

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & x \in I \setminus \{x_0\}, \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

由于 $h(x_0) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, 故 $h(x)$ 在 x_0 点连续。

即证得此 $h(x)$ 符合题意。

二、设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, f, g 在 x_0 点可导, 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。证明:

(i)

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0);$$

(ii)

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

(iii) 如果 $g(x) \neq 0, \forall x \in I$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 点可导, 并且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

证明

由于 f, g 在 x_0 点可导, 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{与} \quad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

都有极限。

记

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

三、设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x_0 \in I$, f 在 x_0 点可导, $y_0 = f(x_0)$, g 在 y_0 点可导。则

$g \circ f$ 在 x_0 点可导, 并且

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

由于 f 在 x_0 点可导, 故

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

极限存在, 记为 $f'(x_0)$ 。

同理, 记

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}.$$

由于 g 在 y_0 点可导, $\exists h: J \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 y_0 点连续且 $h(y_0) = 0$ 。

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + h(y)(y - y_0).$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + h(f(x))(f(x) - f(x_0)).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0) + h(f(x_0))f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

四、设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间, $\varphi: I \rightarrow J$ 为双射, $\psi: J \rightarrow I$ 为 φ 的反函数。设 $x_0 \in I$, $y_0 = \varphi(x_0)$ 。证明: 如果 φ 在 x_0 点可导, $\varphi'(x_0) \neq 0$, ψ 在 y_0 点连续, 则 ψ 在 y_0 点可导, 并且

$$\psi'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}.$$

证明

由于 φ 在 x_0 点可导且 $\varphi'(x_0) \neq 0$, 则 $\exists h: I \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 x_0 点连续且 $h(x_0) = 0$ 。

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + h(x)(x - x_0).$$

$$y - y_0 = \varphi'(\psi(y))(\psi(y) - \psi(y_0)) + h(\psi(y))(\psi(y) - \psi(y_0)).$$

同取极限得:

$$\psi'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}.$$

五、Rolle 定理

证明 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, f 在 (a, b) 上可导。如果 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 。

Fermat 引理: 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上可导。如果 f 在 x_0 点取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$ 。

证明引理: 不妨设 f 在 x_0 点取得极小值, 则 $\exists \varepsilon > 0$,

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

由于 f 在 x_0 点可导, 故

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

即 $f'(x_0) = 0$ 。

由于 f 连续, 故 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使

$$f(x_1) = \max f, \quad f(x_2) = \min f.$$

若 $f(x_1) = f(x_2) = f(a)$, 则 f 为常数, 故 $\exists \xi = \frac{a+b}{2}$, $f'(\xi) = 0$ 。

若 $f(x_1) \neq f(a)$, 则 $f(x_1) > f(a)$, 即 $x_1 \in (a, b)$, 由 Fermat 引理知 $f'(x_1) = 0$ 。

若 $f(x_2) \neq f(a)$, 则 $x_2 \in (a, b)$, $f'(x_2) = 0$ 。

六、Lagrange 中值定理

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, f 在 (a, b) 上可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明 设

$$F(x) = f(x) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f(a).$$

则 $F(a) = F(b) = 0$ 。

由于 Rolle 定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

故结论成立。

七、Cauchy 中值定理

设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, f, g 在 (a, b) 上可导,

$$g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

则 $g(b) \neq g(a)$, 并且存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明 设

$$H(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

$$H(a) = H(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b).$$

$$H(a) = H(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b).$$

由 $H(a) = H(b)$, 故 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$H'(\xi) = f'(\xi)[g(b) - g(a)] - g'(\xi)[f(b) - f(a)] = 0.$$

故

$$f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)].$$

若 $f'(\xi) = 0$, 则 $f(b) = f(a)$, 原式成立。

若 $f'(\xi) \neq 0$, 又由 $g'(x) \neq 0$, 有

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

八、证明：设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 为区间， $n \in \mathbb{N}^*$ ，设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ， $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ， $x_0 \in I \cap J$ 。如果存在 $\varepsilon > 0$ ，使得

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \cap J,$$

且

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

则 f 在 x_0 点 n 阶可导当且仅当 g 在 x_0 点 n 阶可导，并且当 f 在 x_0 点 n 阶可导时，

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

证明 数学归纳法。

$n = 1$ 时，由

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

极限存在，故结论成立。

设 $n = k$ 时结论成立，下面证 $n = k + 1$ 时成立。

若 f 在 x_0 点 $n + 1$ 阶可导，则 $\exists \varepsilon > 0$ ，使

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

令 $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$ 。

任取 $x \in (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$ ，故由 $n = k$ 时命题得

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x).$$

取 $\delta = \min\{x - (x_0 - \varepsilon_2), x_0 + \varepsilon_2 - x\}$ 。

故对 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x).$$

设 $h(x) = f^{(n)}(x)$ ， $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 。

由于 f 在 x_0 点 $k + 1$ 阶可导，故 h 在 x_0 点可导。

由 $n = 1$ 时同样可得：

$$h'(x_0) = f^{(k+1)}(x_0),$$

故 g 在 x_0 点 $k + 1$ 阶可导，且

$$g^{(k+1)}(x_0) = h'(x_0) = f^{(k+1)}(x_0).$$

九、Leibniz 公式

证明 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间， $n \in \mathbb{N}^*$ ，设 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ， n 阶可导，则

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)}.$$

引理 9.1

$$C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i.$$



证明

$$\text{LHS} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-i+2)}{(i-1)!} = C_{k+1}^i = \text{RHS}.$$

数学归纳法： $n = 1$ 时，

$$(fg)' = f'g + fg' = \sum_{i=0}^1 C_1^i f^{(1-i)} g^{(i)}.$$

设 $n = k$ 成立，下证 $n = k + 1$ 时命题成立。

故有

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)} g^{(i)}.$$

两边求导：

$$\begin{aligned} \left[(fg)^{(k)} \right]' &= \left[\sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)} g^{(i)} \right]' \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i+1)} g^{(i)} + \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i)} g^{(i+1)} \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(k-i+1)} g^{(i)} + \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} f^{(k-i+1)} g^{(i)} \\ &= f^{(k+1)} g + \sum_{i=1}^k (C_k^i + C_k^{i-1}) f^{(k-i+1)} g^{(i)} + f g^{(k+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i f^{(k+1-i)} g^{(i)}. \end{aligned}$$

第十章 函数的单调性与极值

定义 10.1

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 如果

$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \leq x_2,$$

我们称 f 单调不减 (或单调增)。如果

$$f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2,$$

我们称 f 严格单调增。



命题 10.1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 可导。

(i) f 单调不减当且仅当

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

(ii) 如果

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in I,$$

则 f 单调增。



注 (i) 命题 1 (ii) 的逆命题不成立。如 $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, 则 f 严格单调增, 但是 $f'(0) = 0$ 。

(ii) 单调不增和单调减函数有类似结论。

同样设: $f(x)$ 在区间 I 上可导, $f'(x) \geq 0$ 。且在区间 (a, b) 上 $f'(x)$ 不恒为 0, 则 $f(x)$ 在 I 上单调增。

若存在 $x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) = f(x_2)$, $f(x)$ 单调不减, 在区间 $[x_1, x_2]$ 上 $f(x) = C$ 。

证明 命题 1:

$\Rightarrow$ 设 $x \in I$ 。因为 f 单调不减, 所以

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0, \quad \forall y \in I \setminus \{x\}.$$

因此

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

$\Leftarrow$ 设 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ 。由中值定理

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

其中 $\xi \in (x_1, x_2)$ 。则 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 这就证明了 f 单调不减。

例题 10.1 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1) = 0$,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) \geq 2.$$

则存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) \leq -16$ 。

证明 由于 $\max f(x) \geq 2$, 则 $\exists \eta \in (0, 1)$, 使 $f(\eta) \geq 2$, 故 $f'(\xi) = 0$ 。

由泰勒公式: $\exists \xi_1 \in (0, \eta)$, $\xi_2 \in (\eta, 1)$, 使

$$f(0) = f(\eta) + f'(\eta)(0 - \eta) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(0 - \eta)^2 = 0,$$

$$f(1) = f(\eta) + f'(\eta)(1 - \eta) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1 - \eta)^2 = 0.$$

故

$$f''(\xi_1) = -\frac{4}{\eta^2}, \quad f''(\xi_2) = -\frac{4}{(1 - \eta)^2}.$$

若 $\eta \geq \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_2) \leq -16$; 若 $\eta \leq \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_1) \leq -16$ 。

$$f''(\xi_1) = -\frac{4}{\eta^2}, \quad f''(\xi_2) = -\frac{4}{(1 - \eta)^2}.$$

若 $\eta \geq \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_2) \leq -16$; 若 $\eta \leq \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_1) \leq -16$ 。

例题 10.2 已知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{4x^2} \right]^{1/\ln \cos x} = 2,$$

求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{4x^2} \right]}{\ln \cos x} = \ln 2.$$

若 $\frac{f(x)}{4x^2}$ 极限为 0, 则原式有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{4x^2}}{\ln \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^4} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \ln 2.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = -(\ln 2)^2.$$

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 为常数。证明:

$$|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

由 Taylor 展开式:

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(0 - x)^2, \quad \xi_1 \in (0, x),$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1 - x)^2, \quad \xi_2 \in (x, 1).$$

相减:

$$f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1 - x)^2 - f''(\xi_1)x^2].$$

$$|f'(x)| \leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-x)^2 + \frac{1}{2}|f''(\xi_1)|x^2$$

$$\leq 2a + \frac{b}{2}[(1-x)^2 + x^2] \leq 2a + \frac{b}{2}.$$

f 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

$$f(c) = f(a) + f'(a)\left(c - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$f(c) = f(b) + f'(b)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

相减得:

$$f(b) - f(a) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 0.$$

故

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\frac{1}{2}|f''(\xi_1)| + \frac{1}{2}|f''(\xi_2)|\right)\left|\frac{a-b}{2}\right|^2.$$

记

$$\max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\} = |f''(\xi)|.$$

故

$$|f(b) - f(a)| \leq |f''(\xi)|\frac{(b-a)^2}{4},$$

即

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

10.1 极值点与极值

定义 10.2

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 的内点。如果存在 $\varepsilon > 0$, 使 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$, 并且

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

我们称 x_0 是 f 的极小值点, 称 $f(x_0)$ 是 f 的极小值。如果存在 $\varepsilon > 0$, 使

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A,$$

且

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

我们称 x_0 是 f 的严格极小值点, 称 $f(x_0)$ 是 f 的严格极小值。



命题 10.2

(极值的必要条件)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 的内点。如果 x_0 是 f 的极值点, 且 $f'(x_0) = 0$ 。



证明 如果 x_0 是 f 的极大值点, 则 $\exists \varepsilon > 0$, 使 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$, 并且

$$f(x_0) = \max_{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)} f.$$

因此由 Fermat 引理, $f'(x_0) = 0$ 。

如果 x_0 是 f 的极小值点, 同理可证。

命题 10.3

(极值的充分条件)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 的内点。设存在 $\varepsilon > 0$, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$ 。 f 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 上连续, 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ 上可导。

(i) 如果

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$

则 x_0 是 f 的严格极大值点。

(ii) 如果

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$

则 x_0 是 f 的严格极小值点。



证明

(i) 设 $x_0 - \varepsilon < x_1 < x_2 \leq x_0$, 则由中值定理

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) > f(x_1),$$

其中 $\xi \in (x_1, x_2)$ 。因此 f 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ 上单调不减。

同理可得 f 在 $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ 上单调不增。

所以 x_0 是 f 的严格极大值点。

(ii) 设 $x_0 - \varepsilon < x_1 < x_2 \leq x_0$, 则由中值定理

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) > f(x_1),$$

其中 $\xi \in (x_1, x_2)$ 。因此 f 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ 上严格单调增。

同理可得 f 在 $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ 上严格单调减。

所以 x_0 是 f 的严格极大值点。

命题 10.4

(极值的充分条件)

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 的内点, f 在 x_0 点二阶可导。(i) 如果 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 f 的严格极小值点;(ii) 如果 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 f 的严格极大值点。

注 我们注意, 命题 3 中的条件 $f''(x_0) > 0$ 不能减弱为 $f''(x_0) \geq 0$; 条件 $f''(x_0) < 0$ 不能减弱为 $f''(x_0) \leq 0$ 。例如, 设 $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, 则 $f'(0) = f''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 不是 f 的极值点。

命题 3 的证明:

证明 因为 x_0 是 A 的内点, $\exists \varepsilon > 0$, 使 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$ 。因为 f 在 x_0 点二阶可导, $\exists 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon$, 使得 f 在 $(x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$ 上一阶可导。

(i) 因为

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

 $\exists 0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$, 使

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon_3, x_0 + \varepsilon_3) \setminus \{x_0\}.$$

即

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon_3, x_0),$$

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon_3).$$

所以由命题 2, x_0 是 f 的严格极小值点。

例题 10.3

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\sin x})}{(1 - \sin x)^{n-1}}.$$

解

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\sin x})}{(1 - \sin x)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \sin x)^{n-1}}{(1 - \sin x)^{n-1} \prod_{k=2}^n (1 + \sqrt[k]{\sin x} + \cdots)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \sin x)^{n-1}}{(1 + \sqrt{\sin x})(1 + \sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\sin^2 x}) \cdots (1 + \sqrt[n]{\sin x} + \cdots + \sqrt[n]{\sin^{n-1} x})(1 - \sin x)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{(1 + \sqrt{\sin x}) \cdots (1 + \sqrt[n]{\sin x} + \cdots + \sqrt[n]{\sin^{n-1} x})} = \frac{1}{n!}.$$

另解: 令 $t = 1 - \sin x$, 则 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时 $t \rightarrow 0$ 。

$$1 - \sqrt[k]{\sin x} = 1 - (1 - t)^{1/k} \sim \frac{t}{k}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

原式:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t/2 \cdot t/3 \cdots t/n}{t^{n-1}} = \frac{1}{n!}.$$

异解:

$$\text{原式} = \prod_{k=2}^n \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sqrt[k]{\sin x}}{1 - \sin x} = \frac{1}{n!}.$$

1. $x > 0$ 时,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证明 设 $f(x) = \ln(1+x)$, 则 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 内连续, 在 $(0, x)$ 上可导。

故

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)x = \frac{x}{1+\xi}, \quad \xi \in (0, x).$$

又 $0 < \xi < x$ 时,

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x.$$

由 ①② 得

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

2. f 在 $[a, b]$ 可导, $f(a) = f(b) = 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f'(\xi) = kf(\xi),$$

其中 k 是任意常数。

证明 令

$$F(x) = e^{-kx} f(x).$$

$$F'(x) = e^{-kx} [f'(x) - kf(x)].$$

$F(a) = F(b) = 0$, 由 Rolle 定理。

3. f 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导 ($a > 0$), 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{1}{ab} [af(b) - bf(a)] = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

令

$$F(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad G(x) = \frac{1}{x}.$$

则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

4. f 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

令

$$F(x) = xf(x), \quad G(x) = x.$$

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

5. f 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导 ($a > 0$), 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

令

$$F(x) = f(x), \quad G(x) = \ln x.$$

$\exists \xi \in (a, b)$,

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \xi f'(\xi).$$

即

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

第十一章 凸函数

定义 11.1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

我们称 f 为凸函数。



- 注** (i) 如果把“ $\leq$ ”改为“ $\geq$ ”, 也称 f 为凸函数; 如果 $-f$ 满足定义 1, 称 f 为凹函数或上凸函数。
(ii) 可以证明 f 为凸函数 $\iff f$ 的上图

$$G = \{(x, y) : x \in I, y \geq f(x)\}$$

为凸集。

凸集: A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合。若对任给两个 $x, y \in A$, 设 $0 \leq \lambda \leq 1$, 有

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in A.$$

定义 11.2

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。若

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad 0 < \lambda < 1,$$

我们称 f 为严格凸函数。



命题 11.1

$I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则

- (i) f 为凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$,

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad \forall x_1 \leq x \leq x_2.$$

- (ii) f 为严格凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$,

$$f(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad \forall x_1 < x < x_2.$$



证明 (ii) 设 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 。记

$$g(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

则 $g(x_1) = f(x_1), g(x_2) = f(x_2)$ 。

故只需证

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

$$\iff f(x) < g(x), \forall x_1 < x < x_2.$$

由于 g 是一次函数, 所以

$$g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2).$$

因此结论成立。

命题 11.2

等价定义。

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。

(i) f 为凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$, 我们有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

(ii) f 为凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$, 我们有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

证明 (ii) 由命题 1, f 为严格凸函数

$$\iff f(x_2) < \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

$$\iff \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} [f(x_2) - f(x_1)] < \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} [f(x_3) - f(x_2)]$$

$$\iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

命题 11.3

Jensen 不等式

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。设 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad x_i \in I, i = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 2.$$

(i) 若 f 为凸函数, 则

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

(ii) 若 f 为严格凸函数, 则

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) < \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i),$$

且等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 。

证明 数学归纳法。

首先证明 $n = 2$ 时 (ii) 的结论成立。

若 $x_1 = x_2$, 则

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

若 $x_1 \neq x_2$, 由定义得

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) < \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

假设 $n = k$ 时结论成立, 下面证明 $n = k + 1$ 时结论也成立, 这里 $k \geq 2$ 。

如果 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, 则

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i) = f(x_1).$$

下面设 $x_i, i = 1, 2, \dots, k$ 不全相等。不妨设 $x_k \neq x_{k+1}$ 。记

$$\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i, \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

则

$$\sum_{i=1}^k \mu_i = 1.$$

因此:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\mu \sum_{i=1}^k \mu_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &\leq \mu f\left(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &< \mu \sum_{i=1}^k \mu_i f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

命题 11.4

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, x_0 为 I 的内点。如果 $f(x_0) = \max f$, 则

$$f \equiv f(x_0).$$

注 命题 4 告诉我们: 除非 f 为常值函数, 否则 f 不可能在区间内部取得最大值。我们称为极大值原理。

证明 设 $x, y \in I, x < x_0 < y$, 则

$$0 \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq 0.$$

因此

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = 0.$$

即 $f \equiv f(x_0)$ 。

推论 11.1

若 $f \in C([a, b])$ 为凸函数, 则

$$\max f = \max\{f(a), f(b)\}.$$

**例题 11.1**

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(A) 处处可导; (B) 一个不可导点; (C) 两个不可导点; (D) 至少三个不可导点。

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \leq -1, \\ 1, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^3, & x > 1. \end{cases}$$

例题 11.2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} - 1}{(e^{1/x} + \frac{1}{x})x} \ln \frac{\sin x}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + \frac{1}{x}} = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x} + 1\right)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

第十二章 Lipschitz 连续

Lipschitz 连续

定义 12.1

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果存在 $L \in \mathbb{R}$, 使

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in A,$$

称 f 为 Lipschitz 函数。

设 $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ 。如果 $f|_B$ Lipschitz 连续, 即 $\exists L \in \mathbb{R}$, 使

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in B,$$

我们称 f 在 B 上 Lipschitz 连续。



命题 12.1

设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果 f Lipschitz 连续, 则 f 连续。



注 命题 1 的逆命题不成立。连续函数不一定 Lipschitz 连续。例如:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty),$$

则 f 连续, 但是 f 不是 Lipschitz 连续。

证明 由定义, $\exists L > 0$, 使

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in A.$$

设 $x_0 \in A$, $\varepsilon > 0$ 。令 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 则

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta.$$

因此 f 在 x_0 点连续。

命题 12.2

如果 f 可导且导函数有界, 则 f Lipschitz 连续。



证明 设 $|f'| \leq M$ 。设 $x, y \in I$, 由中值定理, $\exists \xi \in (x, y)$, 使

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

因此

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq M|x - y|.$$

这就证明 f Lipschitz 连续。

推论 12.1

设 $f \in C^1([a, b])$, 则 f Lipschitz 连续。



注 Lipschitz 函数不一定可导 (即可导函数一定连续)。

证明 由于 f' 在 $[a, b]$ 上连续,

则 f' 在 $[a, b]$ 上有界。

由命题 2 得 f Lipschitz 连续。

命题 12.3

设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, $[c, d] \subset (a, b)$ 。

(i) f 在 $[c, d]$ 上 Lipschitz 连续;

(ii) f 连续。



注 f 在 (a, b) 上不一定 Lipschitz 连续。例如:

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

则 f 为凸函数, 但不 Lipschitz 连续。

证明

(i) 设 $a < x < c$, $d < z < b$ 。设 $c \leq x \leq y \leq d$, 则

(i) 设 $a < x < c$, $d < z < b$ 。设 $c \leq x \leq y \leq d$, 则

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(d)}{z - d}.$$

令

$$L = \max \left\{ \left| \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \right|, \left| \frac{f(z) - f(d)}{z - d} \right| \right\}.$$

则

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|.$$

(ii) 设 $x_0 \in I$, $\exists \varepsilon > 0$, 使 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$ 。

f 为凸函数, f 在 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 上 Lipschitz 连续。

$\Rightarrow f$ 在 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 上连续。

$\Rightarrow f$ 在 x_0 点连续。

例题 12.1

(1) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ 。

(2) $f(x) = x^\alpha$, $x \in [0, +\infty)$, $0 < \alpha < 1$ 。

证明 f 不是 Lipschitz 函数。

证明 (1) 设 $L \in \mathbb{R}$ 。

$\exists x, y \in \mathbb{R}$, $x = \frac{L}{2} + 1$, $y = \frac{L}{2}$, 则

$$|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| > L.$$

即

$$|f(x) - f(y)| > L|x - y|.$$

故 f 不是 Lipschitz 函数。

(2) 设 $L \in \mathbb{R}$ 。

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in (0, 1), x \in [0, +\infty).$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} < 0.$$

故 $f'(x)$ 单调减。

取 $x > y > \sqrt[\alpha]{\frac{1}{L}}$, 故 $\exists \xi \in (x, y)$, 使

$$\xi > \sqrt[\alpha]{\frac{1}{L}}.$$

故

$$|x^\alpha - y^\alpha| = \alpha \xi^{\alpha-1} |x - y| > L|x - y|.$$

故 f 不 Lipschitz 连续。

定理 12.1

达布定理:

1. $f(x)$ 在 I 上可导, $a, b \in I$, 且 $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$f'(\xi) = 0.$$

2. $f(x)$ 在 I 上可导, $a, b \in I$, 若 $f(a) < f(b)$ 。



证明

(i) 由 $f'(a) > 0$ 可得: $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \exists \delta_1 > 0$, 当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时, $f(x) > f(a)$ 同理: $\exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in (b - \delta_2, b)$ 时, $f(x) > f(b)$ 故 f 的最大值一定在 (a, b) 内取得. 记最大值点为 ξ . 由费马定理: $f'(\xi) = 0$

(ii) 令

$$F(x) = f(x) - Mx.$$

则 $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ 。

对于 F 用 (i) 的结论可得。

例题 12.2 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A,$$

则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 。

证明 令

$$F(x) = \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ A, & x = b. \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, 即 F 在 $x = a$ 处连续。

同理 F 在 $x = b$ 处连续。

从而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $F(a) = F(b) = A$ 。由 Rolle 定理,

$$\exists \xi \in (a, b), \quad F'(\xi) = 0.$$

即 $f'(\xi) = 0$ 。

例题 12.3 若 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

证明 令

$$F(x) = \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & x \in (a, +\infty). \end{cases}$$

① 若 $f(x) \equiv A$, 则 $\forall x \in (a, +\infty)$, 都有 $f'(x) = 0$, 结论显然成立。

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 故取 $\varepsilon = \frac{f(x_0) - A}{2} > 0$.

由极限的定义, $\exists M > x_0$, 使得当 $x > M$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

故对于 $\forall x > M$, 有

$$f(x) < A + \varepsilon = \frac{f(x_0) + A}{2} < f(x_0).$$

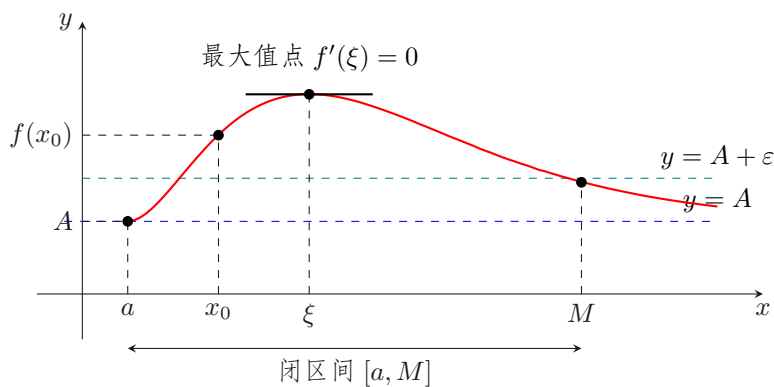
由于 $F(x)$ 在闭区间 $[a, M]$ 上连续, 根据最值定理, $F(x)$ 在 $[a, M]$ 上必取得最大值。又因为端点处的值满足:

$$F(a) = A < f(x_0)$$

$$F(M) = f(M) < f(x_0)$$

而 $x_0 \in (a, M)$ 且 $F(x_0) = f(x_0)$, 说明最大值不可能在端点 a 或 M 处取得。

因此, $F(x)$ 在 $[a, M]$ 上的最大值点 ξ 必在区间内部, 即 $\xi \in (a, M) \subset (a, +\infty)$ 。由 Fermat 引理可知, 在内部极值点处导数为零, 即 $F'(\xi) = f'(\xi) = 0$ 。



第十三章 第四次作业

一、定理 1 (带 Lagrange 余项的 Taylor 展开)

设 $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, n 阶可导, $n \in \mathbb{N}^*$, 设 $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 则 $\exists \theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}((1-\theta)x_0 + \theta x)}{n!} (x - x_0)^n.$$

证明 设 $g: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

则 g n 阶可导,

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0, \\ g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ g^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) - (n-1)! \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} = 0. \end{cases}$$

且 $g^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ 。

当 $x = x_0$ 时, 命题显然成立。下面讨论 $x \neq x_0$ 的情形。

令 $F(x) = g(x)$, $G(x) = (x - x_0)^n$,

则

$$\begin{cases} F^{(k)}(x) - F^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x), \\ G^{(k)}(x) - G^{(k)}(x_0) = ((x - x_0)^n)^{(k)}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

故由 Cauchy 中值定理, 有:

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{g'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} = \frac{g''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - x_0)^{n-2}} = \cdots = \frac{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!}.$$

其中: $x_0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1 < x$ 。

故

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},$$

即存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$g(x) = \frac{f^{(n)}((1-\theta)x_0 + \theta x)}{n!} (x - x_0)^n.$$

故

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}((1-\theta)x_0 + \theta x)}{n!} (x-x_0)^n. \quad \square$$

二、定理 2 (带 Peano 余项的 Taylor 展开)

设 $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, n 阶可导, $n \in \mathbb{N}^*$, 则存在 $h: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, h 在 x_0 点连续且 $h(x_0) = 0$, 使得:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + h(x)(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

证明 设 $g: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k,$$

故 g n 阶可导。

与定理 1 证明同理可得:

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

$x \neq x_0$ 时, 则由 Cauchy 中值定理有:

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{g'(\xi_1)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \frac{g''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_1-x_0)^{n-2}} = \cdots = \frac{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1}-x_0)} = \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!} \rightarrow 0.$$

其中: $x_0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1 < x$ 。

令

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n}, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0, \end{cases} \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

故

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + h(x)(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \quad \square$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n}, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0, \end{cases}$$

故

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + h(x)(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \quad \square$$

三、设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 的内点。如果 x_0 是 f 的极值点, 并且 f 在 x_0 点可导, 则 $f'(x_0) = 0$ 。

证明 不妨设 x_0 为 f 的极大值点, 故 $\exists \varepsilon > 0, \ni$

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

由于 f 在 x_0 点可导, 故 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 两极限存在。

记

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

故

$$g(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$g(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

又由于极限存在, 故 $g(x_0^-) = g(x_0^+) = f'(x_0) = 0$ 。

若 x_0 是 f 的极小值点, 证明过程完全同理。□

四、设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 的内点。设存在 $\varepsilon > 0$, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$, f 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 连续, 在 $[(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}]$ 上可导。

(i) 如果

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$

则 x_0 是 f 的极大值点。

(ii) 如果

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$

则 x_0 是 f 的严格极大值点。

证明

(i) 设 $x_0 - \varepsilon < x_1 < x_2 \leq x_0$, 由中值定理可得 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) > f(x_1).$$

故 f 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ 上单调不减。

同理可证得 f 在 $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ 上单调不增。

故 x_0 是 f 的极大值点。

(ii) 设 $x_0 - \varepsilon < x < x_2 \leq x_0$, 由中值定理得 $\exists \xi \in (x, x_0)$,

$$f(x_0) = f(x) + f'(\xi)(x_0 - x) > f(x),$$

故 f 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ 上单调递增。

同理可证得 f 在 $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ 上单调递减。

故 x_0 是 f 的严格极大值点。□

五、设 $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 A 的内点, f 在 x_0 点二阶可导。

(i) 如果 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 f 的严格极小值点;

(ii) 如果 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 f 的严格极大值点。

证明

(i) 由于 f 在 x_0 点二阶可导, 故

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

极限存在。故存在 $\varepsilon > 0$, 使得:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

则

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

由四题可知 x_0 是 f 的严格极小值点。

(ii) 由于 f 在 x_0 点二阶可导, 故

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

极限存在。故存在 $\varepsilon > 0$, 使得:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

则

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

由四题可知 x_0 是 f 的严格极大值点。□

六、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = -2\xi f(\xi).$$

证明 令 $F(x) = e^{x^2} f(x)$,

则

$$F(a) = e^{a^2} f(a) = 0,$$

$$F(b) = e^{b^2} f(b) = 0.$$

由 Rolle 定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得:

$$F'(\xi) = 2\xi e^{\xi^2} f(\xi) + e^{\xi^2} f'(\xi) = 0.$$

由于 $e^{\xi^2} \neq 0$, 故 $f'(\xi) = -2\xi f(\xi)$ 。□

七、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明: 在 $[0, 1]$ 上存在不同两点 x_1, x_2 , 使得

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2.$$

证明 由介值定理, $\exists \xi \in (0, 1)$, $\ni$

$$f(\xi) = \frac{1}{2}.$$

由 Lagrange 中值定理得: $\exists \xi_1 \in (\xi, 1)$, $\exists \xi_2 \in (0, \xi)$, $\ni$

$$f(1) - f(\xi) = f'(\xi_1)(1 - \xi),$$

$$f(0) - f(\xi) = f'(\xi_2)(0 - \xi).$$

故

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} = 2(1 - \xi), \quad \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2(0 - \xi).$$

故

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2(1 - \xi) - 2(0 - \xi) = 2. \quad \square$$

八、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导. 证明在 (a, b) 内存在两点 x_1, x_2 , 使得:

$$f'(x_1) = \frac{a+b}{2x_2} f'(x_2).$$

证明 由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 上可导,

故由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_1 \in (a, b)$, $\ni$

$$f(a) - f(b) = f'(\xi_1)(a - b).$$

设 $F(x) = f(x)$, $G(x) = x^2$.

则由 Cauchy 中值定理, $\exists \xi_2 \in (a, b)$, $\ni$

$$\frac{F(a) - F(b)}{G(a) - G(b)} = \frac{F'(\xi_2)}{G'(\xi_2)}.$$

即

$$\frac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2} = \frac{f'(\xi_1)(a - b)}{a^2 - b^2} = \frac{f'(\xi_1)}{a + b} = \frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}.$$

故

$$f'(\xi_1) = \frac{a+b}{2\xi_2} f'(\xi_2). \quad \square$$

九、求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^x) \sin(x^2)}.$$

由 Taylor 展开有：

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \\ (1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^4 + \cdots = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{array} \right.$$

故

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^x) \sin(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{8} + o(x^4)}{(1 - \frac{x^2}{2!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} + o(x^2))x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

十、设 $x \in (-1, 1)$ ，证明不等式：

$$x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \cos x \geq 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

证明 令

$$f(x) = x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \cos x - \frac{1}{2}x^2 - 1.$$

由于

$$f(-x) = -x \ln \frac{1-x}{1+x} + \cos(-x) - \frac{1}{2}x^2 - 1 = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - \frac{1}{2}x^2 - 1 = f(x),$$

故 f 为偶函数。以下只讨论 $x \in (0, 1)$ 区间上的情形：

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{(1+x)(1-x)} - \sin x - x,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)(1+x)} + \frac{2(1+x)(1-x) + 4x^2}{(1-x)^2(1+x)^2} - \cos x - 1 = 2 \left[\frac{1}{(1+x)(1-x)} \right]^2 - \cos x - 1.$$

由于 $x \in (0, 1)$ ，故 $(1+x)(1-x) \leq \frac{[(1+x) + (1-x)]^2}{4} = 1$ ，

则 $f''(x) \geq 2 - 1 - \cos x = 1 - \cos x \geq 0$ ， $\forall x \in (0, 1)$ 。

故 $f'(x)$ 在区间上单调递增（不减）。

$$f'(0) = \ln(1) + \frac{0}{0} - \sin 0 - 0 = 0.$$

故 $f'(x) > 0$ ， $\forall x \in [0, 1)$ 。

故 $f(x)$ 在区间上单调递增（不减）。

由于 $f(0) = 0 + \cos 0 - 0 - 1 = 0$ 。

由于 $f(0) = 0 + \cos 0 - 0 - 1 = 0$ ，

故 $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1)$ 。

由于 f 为偶函数，

故 $f(x) \geq 0, \forall x \in (-1, 1)$ 。

即

$$x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \cos x \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$$

在 $x \in (-1, 1)$ 上恒成立。□

第十四章 凸函数的进一步性质

命题 14.1

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, 设 $x_0, x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, 则

(i) $f'_-(x_0)$ 、 $f'_+(x_0)$ 都存在, 并且

$$f'_-(x_0) = \sup \left\{ \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}; a < y < x_0 \right\},$$

$$f'_+(x_0) = \inf \left\{ \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}; x_0 < y < b \right\}.$$

(ii) $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ 。

(iii) $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$ 。



证明 (i) 定义 $g: (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}, \quad a < x < x_0.$$

下面证明: g 单调增且有上界。设 $a < x < y < x_0$,

则

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}.$$

因此

$$g(x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{x_0 - y}{x_0 - x} \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} + \frac{y - x}{x_0 - x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq g(y).$$

所以 g 单调增。设 $x_0 < x < b$, 则

$$g(x) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall a < x < x_0.$$

所以 g 有上界, 因此

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \sup g.$$

(ii) 记 $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 则由 (i)

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \leq f'_-(x_2).$$

(iii) 记 $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 则由 (ii)

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \leq f'_-(x_2). \quad \square$$

命题 14.2

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, 记

$$D = \{x \in (a, b), f \text{ 在 } x \text{ 点不可导}\}.$$

如果 D 非空, 则 D 为可数集。

证明 设 $x \in D$, 则由命题 1, $f'_-(x) < f'_+(x)$ 。记

$$A = \{(f'_-(x), f'_+(x)); x \in D\}.$$

设 $x, y \in D, x < y$, 则由命题 1, $f'_+(x) \leq f'_-(y)$, 因此

$$(f'_-(x), f'_+(x)) \cap (f'_-(y), f'_+(y)) = \emptyset.$$

所以 A 是由互不相交的开区间构成的集合, 因此 A 是可数集。设 $F: D \rightarrow A$,

$$F(x) = (f'_-(x), f'_+(x)), \quad x \in D.$$

则 F 是双射, 因此 D 也是可数集。

14.1 凸函数判别法

命题 14.3

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 可导, 则

- (i) f 为凸函数 $\iff f'$ 单调不减;
- (ii) f 为严格凸函数 $\iff f'$ 严格单调增。

证明 (ii) $\Leftarrow$

设 $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$, 则存在 $\xi \in (x_1, x_2), \eta \in (x_2, x_3)$, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\eta) \quad (\text{Lagrange 中值定理}).$$

因为 f' 严格单调增, 所以 $f'(\xi) < f'(\eta)$, 因此

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

所以 f 为严格凸函数。

$\implies$

设 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 。下面证明 $f'(x_1) < f'(x_2)$ 。设 $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 则

$$f'(x_1) = f'_+(x_1) = \inf_{x_1 < y < x_2} \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$f'(x_2) = f'_-(x_2) = \sup_{a < x < x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

又由于 f 为严格凸函数, 所以

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

由此可得 $f'(x_1) < f'(x_2)$, 故 f' 单调增。□

由 Hölder 不等式:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

令

$$p = \frac{u+v}{u}, \quad q = \frac{u+v}{v},$$

则原不等式:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k^{\frac{u}{u+v}} b_k^{\frac{v}{u+v}} &\leq \left[\sum_{k=1}^n \left(a_k^{\frac{u}{u+v}} \right)^{\frac{u+v}{u}} \right]^{\frac{u}{u+v}} \left[\sum_{k=1}^n \left(b_k^{\frac{v}{u+v}} \right)^{\frac{u+v}{v}} \right]^{\frac{v}{u+v}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{u}{u+v}} \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^{\frac{v}{u+v}}. \end{aligned}$$

同乘 $(u+v)$ 次方, 则

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^{\frac{u}{u+v}} b_k^{\frac{v}{u+v}} \right)^{u+v} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^u \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^v.$$

设 $u, v > 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^n a^{\frac{u}{u+v}} b^{\frac{v}{u+v}} \right)^{u+v} \leq \left(\sum_{k=1}^n a \right)^u \left(\sum_{k=1}^n b \right)^v.$$

↓

加权幂平均不等式:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n w_k t_k^s \right)^{1/s} &\geq \left(\sum_{k=1}^n w_k t_k^r \right)^{1/r} \\ \left(\sum_{k=1}^n w_k t_k^s \right)^{1/s} &\geq \left(\sum_{k=1}^n w_k t_k^r \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

$$(t_1 a_1^r + t_2 a_2^r + \cdots + t_n a_n^r)^{1/r} \leq (t_1 a_1^s + t_2 a_2^s + \cdots + t_n a_n^s)^{1/s}.$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时“=”成立。

(i) 若 $0 < r < s$, 则由 Hölder 不等式得:

$$\left(\sum_{k=1}^n t_k a_k^s \right)^{r/s} = \left(\sum_{k=1}^n t_k \right)^{1-r/s} \left(\sum_{k=1}^n t_k a_k^s \right)^{r/s}.$$

(Hölder 不等式)

$$\geq \left(\sum_{k=1}^n t_k^{1-r/s} (t_k a_k^s)^{r/s} \right)^1 = \left(\sum_{k=1}^n t_k a_k^r \right)^1.$$

(ii) 若 $0 < s < r$, 同理可证明。

命题 14.4

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 二阶可导, 则

(i) f 为凸函数当且仅当 $f'' \geq 0$;

(ii) $f'' > 0 \implies f$ 为严格凸函数。



证明 (i) $\Leftarrow$

设 $x_1 < x_2$, 若 $f'' \geq 0$, 则

$$f'(x_2) - f'(x_1) = f''(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

故 f' 单调不减。

由命题 1 知 f 为凸函数。

$\implies$

由于 f 为凸函数, 故由命题 1 可得:

f' 单调不减。

设 $x, x_0 \in I$, 则

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

故

$$f''(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

(ii) 同理可证!

注 先证明反例不成立:

设 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0, 1)$,

下证:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

代入得:

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^4 \leq \lambda x_1^4 + (1 - \lambda)f(x_2)^4.$$

重新可得:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq [\lambda x_1^4 + (1 - \lambda)f(x_2)^4]^{1/4}.$$

由加权幂平均不等式, $s = 1$, $r = 4$ 时, 显然上式成立!

因此 $f(x) = x^4$ 是凸函数。

由于 $f''(0) = 12x^2 = 0$, 故不满足 $f'' > 0$ 。

例题 14.1 广义 Rolle 定理

设 $f(x)$ 在 $[a_0, +\infty)$ 上连续, 在 $(a_0, +\infty)$ 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a_0),$$

则 $\exists \xi \in (a_0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 若不然, 由达布定理, 必有 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0, \forall x \in (a_0, +\infty)$ 。

即 $f(x)$ 在 $[a_0, +\infty)$ 上严格递增。

这同 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a_0)$ 矛盾!

另证:

① 若存在 $x_1 \in (a_0, +\infty)$, 使 $f(x_1) = f(a_0)$, 则 $\exists \xi \in (a_0, x_1)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 。

② 若不存在 $x \in (a_0, +\infty)$ 使 $f(x) = f(a_0)$, 由连续函数的保号定理, 只可能有

$$f(x) > f(a_0) \quad \text{或} \quad f(x) < f(a_0), \quad \forall x \in (a_0, +\infty).$$

不妨设 $f(x) > f(a_0), \forall x \in (a_0, +\infty)$ 。任取 $x_1 \in (a_0, +\infty)$, 使 $f(x_1) > f(a_0)$ 。

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a_0) < f(x_1)$,

由极限保号性, $\exists x_2 > x_1$, 使 $f(x_2) < f(x_1)$ 。

又 $f(a_0) < f(x_2) < f(x_1)$ 。

于是 $\exists \xi \in (a_0, x_2)$, 使得

$$f(x_1) = f(x_2).$$

在 $[x_1, x_2]$ 区间上用 Rolle 定理, 可得 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

$$f'(\xi) = 0.$$

例题 14.2 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, $(0, +\infty)$ 内 n 阶可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$ 。

(i) 存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使 $f'(\xi) = 0$;

(ii) 存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 。

证明

以下尝试证明: $f^{(n)}(\xi) = 0$

① 若 $f^{(n)}(\xi) \rightarrow +\infty$

从而意味着 $f^{(n-1)}(x)$ 恒 > 0 , 不可能有 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$

② $f^{(n)}(\xi) = A \neq 0$

例题 14.3

① $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$,

则存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 。

② 或 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = A$ 。

证明 令

$$g(x) = \begin{cases} f(\tan t), & t \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ A, & t = 0, \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

则:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(\tan t) = A = g(0),$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\tan t) = A = g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$g(t)$ 在 0 处右连续, 在 $\frac{\pi}{2}$ 处左连续, 由 Rolle 可得。

$\exists \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $g'(\theta) = 0$ 。

即

$$f'(\tan \theta) \cdot \sec^2 \theta = 0.$$

故 $f'(\tan \theta) = 0$, 取 $\xi = \tan \theta$ 即可。

例题 14.4 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

则 $\exists \xi$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

证明

① 若 $f(x) \equiv A$, 故 $\exists \xi \in (0, +\infty)$, $f'(\xi) = 0$ 。

② 若存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) > A$, 由极限保号性:

取

$$\varepsilon = \frac{f(x_0) - A}{2},$$

则 $\exists \delta, \exists M$, 满足:

$$0 < \delta < x_0, \quad M > x_0,$$

使得:

$$f(x) < \frac{f(x_0) + A}{2}, \quad x \in [A, A + \delta],$$

$$f(x) < \frac{f(x_0) + A}{2}, \quad x \in [M, +\infty).$$

又因为 $x_0 \in [A + \delta, M]$:

在闭区间 $[A + \delta, M]$ 上, $f(x_0) > f(A + \delta)$, $f(x_0) > f(M)$ 。

故 $f(x)$ 在 $[A + \delta, M]$ 上最大值在区间内部取得。

由极值必要条件: $\exists \xi \in (A + \delta, M)$, 使得

$$f'(\xi) = 0.$$

1 设 f 在 $[0, 1]$ 连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 又 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 是满足

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$$

的正数。

则在 $(0, 1)$ 内存在 n 个互不相同的正数 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 使

$$\frac{k_1}{f'(t_1)} + \frac{k_2}{f'(t_2)} + \dots + \frac{k_n}{f'(t_n)} = 1.$$

证明 在 $[0, 1]$ 内插入 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$,
同时满足:

$$f(x_1) = k_1, \quad f(x_2) = k_1 + k_2, \quad \cdots, \quad f(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i.$$

在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上用拉格朗日中值定理, 存在 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使

$$k_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)(x_i - x_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

n 个泰勒展开式:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + o(x^n),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+1}),$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n}x^n + o(x^n).$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{3!}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{(\sin x)^3}{3!} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3!} \cdot \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{x^3} = -\frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \frac{(1 + \frac{1}{2}x + o(x)) - (1 - \frac{1}{2}x + o(x))}{(1 + \frac{1}{3}x + o(x)) - (1 - \frac{1}{3}x + o(x))} = \frac{3}{2}.$$

又 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (-x, x)$, $\ni$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} &= \frac{\frac{1}{2(1+\xi_1)^{1/2}} \cdot 2x}{\frac{1}{3(1+\xi_2)^{2/3}} \cdot 2x} = \frac{3}{2}. \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} = 1, \end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{-x} = [(1+x)^{1/3}]'_{x=0} + [(1-x)^{1/3}]'_{x=0}.$$

令 $m = \sqrt{1+x}$, $n = \sqrt{1-x}$, 则 $x \rightarrow 0 \iff (m, n) \rightarrow (1, 1)$.

$$I = \lim_{m, n \rightarrow 1} \frac{m^2 - n^2}{m^3 - n^3} = \lim_{m, n \rightarrow 1} \frac{m+n}{m^2 + mn + n^2} = \frac{2}{3}.$$

4 $f(x)$ 二阶可导, $f''(x) \leq 0$, 则对任意两点 x_1, x_2 , 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

证明 $\forall x, x_0 \in (a, b)$, 有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi)(x - x_0)^2 \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

取 $x = x_1, x_2$, $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, 可得:

$$\begin{cases} f(x_1) \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right), \\ f(x_2) \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right). \end{cases}$$

相加可得:

$$f(x_1) + f(x_2) \leq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \quad \square$$

5

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\arctan \frac{\pi}{n} - \arctan \frac{\pi}{n+1} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{\pi}{n} - \arctan \frac{\pi}{n+1}}{\frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

令 $x = \frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan \frac{\pi x}{1+x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x - \frac{(\pi x)^3}{3} + o(x^3) - \left[\frac{\pi x}{1+x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi x}{1+x} \right)^3 + o(x^3) \right]}{x^2} = \pi. \end{aligned}$$

另法: $\exists \xi \in \left(\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n} \right)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{1}{1 + \xi^2} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1} \right) = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{1 + \xi^2} = \pi.$$

第十五章 第五次作业

1. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则:

f 为凸函数 $\iff \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$,

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad \forall x_1 \leq x \leq x_2.$$

证明 令

$$g(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

则 $g(x_1) = f(x_1)$, $g(x_2) = f(x_2)$, 且 $g(x)$ 是一次函数。

故

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2).$$

原命题证明 $f(x) \leq g(x)$ 。

由于 f 是凸函数, 故: $\forall x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0, 1]$ 有:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) = g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

即 $f(x) \leq g(x), \forall x_1, x_2 \in I$ 。□

2. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。

f 为凸函数 $\iff \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$, 我们有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

证明

“ $\implies$ ” 由于 f 为凸函数, 故取 $x_1, x_2, x_3 \in I$, 且 $x_1 < x_2 < x_3$ 。

设

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \in (0, 1).$$

则:

$$f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3).$$

代入 λ 可得:

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3),$$

$$\iff (x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3),$$

$$\iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \quad \square$$

“ $\impliedby$ ”

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

$$\iff (x_3 - x_2)[f(x_2) - f(x_1)] \leq (x_2 - x_1)[f(x_3) - f(x_2)].$$

$$\iff f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

设 $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, $\lambda \in (0, 1)$, 则有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3).$$

由定义得此为凸函数。□

3. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。设 $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $x_i \in I$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。其中 $n \geq 2$ 。如果 f 为凸函数, 则

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

证明 数学归纳法:

$n = 2$ 时, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, 由凸函数的定义可证得。

假设 $n = k$ 时成立, 即有:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i).$$

下面证 $n = k + 1$ 时成立:

即证明

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}), \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1.$$

记 $\Lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$, 即 $\Lambda = 1 - \lambda_{k+1}$ 。

$$\begin{aligned} \iff f\left(\Lambda \left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) &\leq \Lambda \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}). \end{aligned}$$

(由 $n = 2$ 时情形可证明!) □

4. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, x_0 为 I 的内点。如果 $f(x_0) = \max f$, 则 $f \equiv f(x_0)$ 。

证明 取 $x_1 < x_0 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ 。

由于 f 为凸函数, 故:

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

由于 $f(x_0) = \max f$, 故

$$0 \leq \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq 0.$$

故

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = 0 \implies f(x_1) = f(x_0) = f(x_2).$$

由于 x_1, x_2 的任意性, 故 $f \equiv f(x_0)$ 。

5. 设 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, $[c, d] \subset I$, 则

(i) f 在 $[c, d]$ 上 Lipschitz 连续;

(ii) f 连续。

证明 (i) 由于 $[c, d] \subset I$, 故 $a < c < d < b$ 。

取 $x_1 \in (a, c)$, $x_2 \in (d, b)$, $x, y \in [c, d]$ 且 $x < y$ 。

由于 f 是凸函数, 故:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}.$$

取

$$L = \max \left\{ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} \right\}.$$

故

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|.$$

故 f 在 $[c, d]$ 上 Lipschitz 连续。□

(ii) 设 $x_0 \in I$, 则 $\exists \varepsilon > 0$, $\ni [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$ 。

故 f 在 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ Lipschitz 连续。

$\implies f$ 在 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 上连续。

$\implies f$ 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 上连续。

由于 x_0 的任意性, 故 f 连续。□

6. 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数。设 $x_0, x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, 则

(i) $f'_-(x_0)$ 、 $f'_+(x_0)$ 存在, 并且

$$f'_-(x_0) = \sup \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; a < x < x_0 \right\}. \quad (1)$$

(i) $f'_-(x_0)$ 、 $f'_+(x_0)$ 存在, 并且

$$f'_-(x_0) = \sup \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; a < x < x_0 \right\}, \quad (1)$$

$$f'_+(x_0) = \inf \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; x_0 < x < b \right\}. \quad (2)$$

(ii) $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ 。

(iii) $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$ 。

证明 (i) 设

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad a < x < x_0.$$

由于 f 为凸函数, 取 $a < x < y < x_0$, 有

$$\frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

下证:

$$\frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \geq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} &= \frac{f(x_0) - f(y) + f(y) - f(x)}{x_0 - x} \\ &= \frac{x_0 - y}{x_0 - x} \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} + \frac{y - x}{x_0 - x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &\leq \frac{x_0 - y}{x_0 - x} \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} + \frac{y - x}{x_0 - x} \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} = \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}. \end{aligned}$$

故 $g(y) \geq g(x)$, 则 g 单调增。

取 $z \in (x_0, b)$,

则 $g(y) \leq g(z) \in \mathbb{R}$ 。

故 g 单调增, 有上界, 由单调有界定理有

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \sup \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; a < x < x_0 \right\}.$$

(2) 完全同理可证得!

(ii) 由于 g 单调增,

故

$$f'_-(x_0) = f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0). \quad \square$$

(iii) 取 $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 。

故

$$f'_+(x_1) = \inf_{x_1 < y < b} g \leq g(x_3) \leq \sup_{a < x < x_2} g = f'_-(x_2). \quad \square$$

7. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 可导, 则

f 为凸函数 $\iff f'$ 单调不减.

证明

“ $\Leftarrow$ ” 设 $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ 。

故 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, $\eta \in (x_2, x_3)$, $\ni$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\eta).$$

由于 f' 单调不减, 故 $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ 。

故

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

故 f 为凸函数。

“ $\implies$ ”

设 $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ 。

由于 f 是凸函数, 故

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

由于

$$f'_+(x_1) = \inf \left\{ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}; x_1 < x < b \right\} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'_-(x_3) = \sup \left\{ \frac{f(x) - f(x_3)}{x - x_3}; a < x < x_3 \right\} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

故

$$f'(x_1) = f'_+(x_1) \leq f'(x_2) \leq f'_-(x_3) = f'(x_3).$$

则 f' 单调不减。□

8. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 二阶可导, 则

(i) f 为凸函数 $\iff f'' \geq 0$;

(ii) 如果 $f'' > 0$, f 为严格凸函数。

证明 (i)

“ $\Leftarrow$ ” 由于 $f'' \geq 0$, 设 $x_1 < x_2$, 则 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

$$f'(x_2) - f'(x_1) = f''(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

故 f' 单调不减。

由 7 题知 f 为凸函数。

“ $\implies$ ” 由于 f 是凸函数,

故由 7 题 f' 单调不减。

设 $x, x_0 \in I$, $x > x_0$,

则

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) \geq 0.$$

(ii) 由于 $f'' > 0$, 设 $x_1 < x_2$, 则 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

$$f'(x_2) - f'(x_1) = f''(\xi)(x_2 - x_1) > 0.$$

故 f' 严格单调增。

f 为严格凸函数。

故 f' 严格单调增,

f 为严格凸函数。

9. 证明: 设 $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, 则 f 为严格凸函数。

证明 由 Hölder 不等式:

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum b_i^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

令

$$a_i = p_i^{1/s} a_i^r, \quad b_i = p_i^{\frac{s-r}{s}}, \quad \frac{1}{p} = \frac{r}{s}, \quad \frac{1}{q} = \frac{s-r}{s}, \quad 0 < r < s.$$

则不等式化为:

$$\sum p_i a_i^r \leq \left[\sum \left(p_i^{1/s} a_i^r \right)^{s/r} \right]^{r/s} \left[\sum \left(p_i^{\frac{s-r}{s}} \right)^{\frac{s}{s-r}} \right]^{\frac{s-r}{s}}.$$

即:

$$\sum p_i a_i^r \leq \left[\sum p_i a_i^s \right]^{r/s}.$$

即:

$$\left(\sum p_i a_i^r \right)^{1/r} < \left(\sum p_i a_i^s \right)^{1/s}, \quad \text{且 } \sum p_i = 1.$$

令 $r = 1$, $s = 4$, $n = 2$, 有:

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 < (p_1 a_1^4 + p_2 a_2^4)^{1/4}, \quad p_1 + p_2 = 1.$$

令 $p_1 = \lambda$, $p_2 = 1 - \lambda$, $0 < \lambda < 1$ 。

则有:

$$(\lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2)^4 < \lambda a_1^4 + (1 - \lambda) a_2^4.$$

即

$$f(\lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2) < \lambda f(a_1) + (1 - \lambda) f(a_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

故 $f(x) = x^4$ 是严格凸函数。□

例题 15.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 二阶可导, 且 $f'(a)f'(b) > 0$, $f(a) = f(b) = 0$, 则在 $[a, b]$ 内至少存在一点 ξ , $\ni$

$$f''(\xi) = 0.$$

例题 15.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 证明存在 $\eta, \xi \in (a, b)$, 使得

$$e^{a+b}[f'(\eta) - f'(\xi)] = e^{\eta+\xi}.$$

例题 15.3 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 在 $(0, 1)$ 可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明:

- (1) 存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $f(c) = 1 - c$;
- (2) 存在两个不同点 ξ, η , 使得 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$ 。

$$f(c) + c - 1 = 0.$$

$f(x) + x - 1 = 0$ 有根。

$$\frac{f(1) - f(0)}{1} = f'(\xi).$$

$$f(d) - f(0) = f'(\xi)(d - 0),$$

$$f(1) - f(d) = f'(\eta)(1 - d).$$

$$f(d) = f'(\xi)d,$$

$$f(d) - 1 = f'(\eta)(d - 1).$$

$$f'(\xi) = \frac{f(d)}{d},$$

$$\frac{f(d) - 1}{d - 1} = f'(\eta).$$

例题 15.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{2/3} - 1}{x \ln(1 + x)}$$

泰勒公式。

例题 15.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 三阶连续可导, 且对任何 h ,

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

θ 与 h 无关, 则 f 是一次或二次函数。

证明 对 h 求导, 有:

$$f'(x + h) = f'(x + \theta h) + hf''(x + \theta h) \cdot \theta.$$

$$\frac{f'(x + h) - f'(x) + f'(x) - f'(x + \theta h)}{h} = \theta f''(x + \theta h).$$

$$f''(x) - \theta f''(x) = \theta f''(x).$$

可得:

$$f''(x) = 2\theta f''(x).$$

- ① 若 $\theta \neq \frac{1}{2}$, 故 $f''(x) = 0$, 为一次函数。
 ② 若 $\theta = \frac{1}{2}$, 则

$$f'(x + h) = f'\left(x + \frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}hf''\left(x + \frac{1}{2}h\right).$$

同时对 h 求导:

$$\begin{aligned}f''(x+h) &= f''\left(x+\frac{1}{2}h\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f''\left(x+\frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{4}hf'''(x+\frac{1}{2}h) \\&= f''\left(x+\frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{4}hf'''(x+\frac{1}{2}h).\end{aligned}$$

$$\frac{f''(x+h) - f''(x) + f''(x) - f''(x+\frac{1}{2}h)}{h} = \frac{1}{4}f'''(x+\frac{1}{2}h).$$

$h \rightarrow 0$,

$$f'''(x) - \frac{1}{2}f'''(x) = \frac{1}{4}f'''(x).$$

故 $f'''(x) = 0$ 。

例题 15.6 设 $\varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 二次连续可导, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ 存在, 且 $\varphi''(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0.$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

$$\varphi'(x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} - \frac{\varphi''(\xi)(x - x_0)}{2}.$$

$x_0, x \rightarrow x_0$ 。

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(\xi_1)(x - x_0)^2}{2}.$$

例题 15.7 $f(x)$ 有连续的 n 阶导数, 在 x_0 处有

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + R_n(x),$$

且满足

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

则必有

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

附录 A 数学 II 期末试卷 (2026)

2026 年数学 II 期末考试题目 (回忆版)

整理者: 双草酸酯

本试卷共 9 题 100 分, 考试时长 150 分钟

1. (10 分) 设 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$. 若 f 在 x_0 连续, 且 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 连续。

证明: 复合函数 $g \circ f$ 在 x_0 连续。

2. (10 分) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}.$$

3. (10 分) φ 为双射, ψ 为 φ 的反函数, 设 $x_0 \in I$, $y_0 = \psi(x_0)$. 若 φ 在 x_0 点的导数 $\varphi'(x_0) \neq 0$; ψ 在 y_0 点连续。

证明: φ 在 y_0 点可导, 且

$$\psi'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}.$$

4. (10 分) 设 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$ 。

证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

5. (15 分) 设函数 f 满足在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $(a, +\infty)$ 内可导。且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$

证明: 存在 $\xi \in (a, +\infty)$, 使得

$$f'(\xi) = 0.$$

6. (10 分) 设

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n}{(x - x_0)^n} = 0$

证明:

$$A_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}.$$

7. (10 分) **证明:**

$$\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}, \quad x \in (0, 1).$$

8. (15 分) 已知:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right]}{3^x - 1} = 5, \quad \text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

9. (10 分) 设 $0 < \alpha < 1$, $f(x) = x^\alpha$, $x \in [0, +\infty)$ 。

(1) **证明：** $-f$ 为凸函数。

(2) 设 $h > 0$, **证明：** $g(x) = f(x+h) - f(x)$ 为减函数。

(3) 设 (a_i, b_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, 为 $[0, +\infty)$ 中的互不相交的开区间。已知

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq 1,$$

证明：

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq 1.$$