王立周数学笔记

数学 II

作者：韩一宁

组织：期末复习小组

时间：August 4, 2025

版本：1.0

ElegantLaTeX Program

注意事项

周二晚上 7:00 -9:00, 北五 415 答疑

目录

第一章 极限与导数

1.1 导数的定义

$f: I \to R, I$ 为区间,$x_0 \in I, f$ 在 x_0 的导数就是 f 在 x_0 的增长率,设 $x \in I, x \neq x_0$,当 $x \to x_0$ 时,$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to a$

定义 1.1 (极限的定义)

如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right| < \varepsilon, \forall x \in I \backslash \{x_0\}, 0 < |x-x_0| < \delta$, 称 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 x_0 的极限是 a, 记为 $a = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, 令 $x = x_0 + h$, 则极限的形式可以改写为 $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

定义 1.2 (导数的定义)

设 $I \subseteq R$ 为区间, $f: I \to R, x_0 \in I$, 如果 $\exists a \in R, \ni \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$, 称 f 在 x_0 点可导, 称 a 为 f 在 x_0 点的导数, 记为 $a = f'(x_0)$

命题 1.1

设$I \subseteq R$为区间,$f: I \to R, x_0 \in I$, 如果f在x_0点可导, 则f在x_0点连续。

证明

$$\because f\text{在}x_0\text{点可导}, \exists \delta_0 > 0, \exists \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| \leq 1, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x-x_0| < \delta_0$$

$$\text{则}|f(x)-f(x_0)| \leq (1+|f'(x_0)|)|x-x_0|, \forall x \in I, |x-x_0| \leq \delta_0$$

$$\text{设}\varepsilon > 0, \text{令}\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+|f'(x_0)|}, \delta_0\right\}$$

$$\text{则当}x \in I, |x-x_0| < \delta\text{时}, |f(x)-f(x_0)| \leq (1+|f'(x_0)|)\delta \leq (1+|f'(x_0)|)\varepsilon$$

练习 1.1 证明 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导。

证明 假设 f 在 $x = 0$ 处可导，那么存在 $\delta > 0$，使得对于所有 $0 < |x| < \delta$，有

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right| < \frac{1}{2}$$

在上述不等式中分别取 $x = \frac{\delta}{2}$ 和 $x = -\frac{\delta}{2}$，得到 $|1 - f'(0)| < \frac{1}{2}$ 和 $|-1 - f'(0)| < \frac{1}{2}$

利用三角不等式，可以得到

$$|1-(-1)| \leq |1-f'(0)| + |-1-f'(0)| < 1$$

这与 $|1-(-1)| = 2$ 矛盾，因此假设不成立，证明完成。

1.2 导数的几何意义——曲线方程

定义 1.3 (曲线方程)

设 $f: A \subseteq R \to R, \gamma = \{(x, f(x)); x \in A\} \subseteq R^2$，曲线 f 称为 γ 的方程，一般用曲线方程 f 代指曲线。

定义 1.4 (切线方程)

设 $f: I \to R$，在 $x_0 \in I$ 时可导，当 x 在 x_0 附近时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x)$，即 $f(x) \approx f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$，定义切线 $y = f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$。♣

定义 1.5

$f: I \to R$，如果 $\forall \in I$，f 在 x 点可导，称 f 可导，$f': I \to R, f'$ 称为 f 的导函数（导数），如果 f' 可导，称 f 二阶可导,$(f')' = f''$，由此定义 f 的 n 阶导，记作 $f^{(n)}$。♣

以下是一些函数的 n 阶导:

1. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$ $\quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$
2. $\dfrac{1}{x+a} = (-1)^n n! \dfrac{1}{(x+a)^{n+1}}$ $\quad \left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \dfrac{1}{2}(-1)^n n! \left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$
3. $f(x) = \ln(2x^2-x-1)$，求 $f^{(n)}$。 $\quad f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\dfrac{1}{(x+1)^n} + \dfrac{1}{(x+1/2)^n}\right)$

1.3 求导公式

1. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
4. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$
5. $f'g = (fg)' - fg'$（分布求导）
6. 设 ϕ, ψ 互为反函数,ϕ 和 ψ 可导，则 $\psi'(x) = \dfrac{1}{\phi'(\psi(x))}$

证明 [证明第六条] $\phi(\psi(x)) = x$，对两边同时求导得 $\phi'(\psi(x))\psi'(x) = 1$

1.3.0.1 常见函数的导数

1. $(c)' = 0$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$
3. $(e^x)' = e^x, (a^x)' = a^x \ln a$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
5. $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$
6. $(\tan x)' = \sec^2 x, (\cot x)' = -\csc^2 x$
7. $(\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x$
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, (\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

证明 [反三角函数求导]

$$\sin(\arcsin x) = x \implies \cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)' = 1 \implies (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\because \theta = \arcsin x, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \sin\theta = x, \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似地，可以推导出 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{\sec^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{x^2+1}$

$$\because \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore (\arctan x)' = -(\operatorname{arccot} x)'$$

1.4 导数的性质

命题 1.2

设 $f:(a,b)\to R, c\in(a,b), f(c)=\max f$, 如果 f 在 c 点可导, 则 $f'(c)=0$

证明 设 $\varepsilon>0, \exists\delta>0, \ni \left|\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<\varepsilon, \forall x\in(a,b), 0<|x-c|<\delta$, 令 $\sigma=\min\{c-a, b-c, \delta\}$, 则当 $0<|x-c|<\sigma$ 时, $\left|\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<\varepsilon, \forall x\in(a,b), 0<|x-c|<\sigma$, 由上式 $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-\varepsilon<f'(c)<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+\varepsilon, \forall x\in(a,b), 0<|x-c|<\sigma$, 令 $x=c-\frac{\sigma}{2}, x=c+\frac{\sigma}{2}, -\varepsilon<f'(c)<\varepsilon, \forall\varepsilon>0$, 所以 $f'(c)=0$。

推论 1.1

设 $f:(a,b)\to R, c\in(a,b), f(c)=\min f$, 如果 f 在 c 点可导，则 $f'(c)=0$

这里推论的证明可以考虑把 f 换成 $-f$。

命题 1.3 (罗尔中值定理)

设 $f:[a,b]\to R$ 连续, f 在 (a,b) 上可导, 如果 $f(a)=f(b)=0$, 则 $\exists\xi\in(a,b), \ni f'(\xi)=0$

证明

1. $f\equiv 0$, 令 $\xi=\dfrac{a+b}{2}, f'(\xi)=0$
2. $\max f>0$, 设 $x_0\in[a,b], f(x_0)=\max f \quad \therefore x_0\in(a,b), f'(x_0)=0$
3. $\min f<0$, 设 $x_0\in[a,b], f(x_0)=\min f \quad \therefore x_0\in(a,b), f'(x_0)=0$

定理 1.1 (微分中值定理)

设 $f:[a,b]\to R$ 连续, f 在 (a,b) 上可导，则 $\exists\xi\in(a,b), \ni f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明 令 $h(x)=f(x)-\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right], x\in[a,b], h(a)=h(b)=0$, 所以 $\exists\xi\in(a,b), \ni h'(\xi)=0, f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

练习 1.2 设 $f:[0,2]\to R$ 连续, f 在 $(0,2)$ 上可导, $f(0)=1, f(1)+2f(1.5)+3f(2)=6$, 证明: $\exists\xi\in(0,2), \ni f'(\xi)=0$

证明 因为 f 在 $[1,2]$ 上连续，所以 f 在 $[1,2]$ 上有最大值和最小值，记 $M=\max_{[1,2]} f, m=\min_{[1,2]} f$，由已知, $6m\le f(1)+2f(1.5)+3f(2)\le 6M$，即 $6m\le 6\le 6M, m\le 1\le M$, 由介值定理, $\exists x_0\in[1,2], \ni f(x_0)=1$

练习 1.3 $f(x)=e^x\sin x$, 求 $f^{(n)}$

证明 [解答] $f^{(1)}=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4}), f^{(2)}=2e^x\sin(x+\frac{\pi}{2}), f^{(3)}=2\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{3\pi}{4}), f^{(4)}=4e^x\sin(x=\pi), f^{(n)}=2^{n/2}e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4})$

定义 1.6

设 I 为区间, $f:I\to R$, 如果 $\forall x_1,x_2\in I, x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)\le f(x_2)$, 称 f 为单调增, 如果 $\forall x_1,x_2\in I, x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$, 称 f 为严格单调增。类似可定义 f 单调减,f 严格单调减。

命题 1.4

设 I 为区间，$f:I\to R$ 可导，如果 $f'(x)\ge 0,\forall x\in I$, 则 f 单调增, 如果 $f'(x)>0,\forall x\in I$, 则 f 严格单调增

证明 $\forall x_1,x_2\in I$，由微分中值定理可知 $\exists x_0\in(x_1,x_2),\ni\frac{f(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_0)\ge 0$，即 $f(x_2)\ge f(x_1)$，f 单调增。同理，若 $\forall x\in I, f'(x)>0$，即为 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_0)>0$，因此 $f(x_2)>f(x_1)$，f 严格单调增。

练习 1.4 证明 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\forall x>0$

证明 令 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}, f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}$，由于 $\forall x>0\quad\therefore f'(x)>0$，并且 $f(0)=0\quad\therefore f(x)>0,\forall x>0$

令 $g(x)=x-\ln(1+x), g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$，当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$ 并且 $g(0)=0$, 则 $\forall x>0, g(x)>0$

练习 1.5 证明 $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2},\forall x\ge 0$

证明 令 $f(x)=\cos+\frac{x^2}{2}-1, f'(x)=-\sin x+x, f''(x)=1-\cos x$，由于 $\forall x\ge 0, 1-\cos x\ge 0$，并且 $f'(0)=0$，所以 $\forall x\ge 0, f'(x)\ge 0$, 又由于 $f(0)=0$, 因此 $\forall x\ge 0, f(x)\ge 0$

练习 1.6 设 $\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$, 证明：$\alpha x+\beta y\ge x^\alpha y^\beta$

证明 首先把 α 和 β 换成 $p=\frac{n}{m}$ 的形式，证明在有理数情况下的不等式，接着在用一串有理数数列逼近无理数，证明无理数下的不等式

1.5 函数的极值

定义 1.7

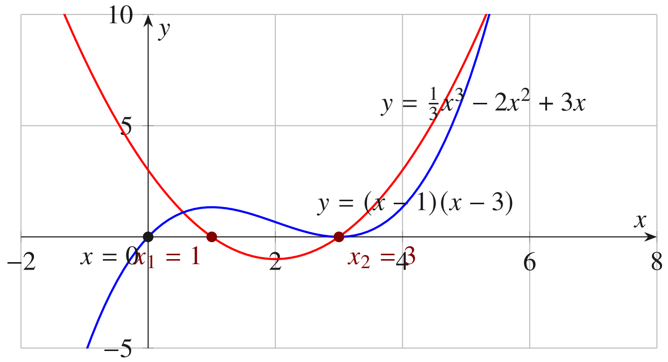
设 $f:(a,b)\to R, x_0\in(a,b)$，如果 $\exists 0<\varepsilon<\min\{b-x_0,x_0-a\}$，$\ni f(x)\le f(x_0),\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$，称 x_0 是 f 的极大值点, 称 $f(x_0)$ 为 f 的极大值，如果 $\exists 0<\varepsilon<\min\{b-x_0,x_0-a\}$，$\ni f(x)<f(x_0),\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\backslash\{x_0\}$，称 x_0 是 f 的严格极大值点，称 $f(x_0)$ 为 f 的严格极大值。

练习 1.7 画出 $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\ne 0$ 的图像，并证明 $\left(-\frac{b}{3a},Q\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 为对称中心。

证明 [解答] 首先对 $Q(x)$ 求导得到 $Q'(x)=3ax^2+2bx+c$，接着考虑该二次函数与 x 轴的交点，即考虑判别式 $\triangle=4b^2-12ac$ 与 0 的关系。

1. $\triangle<0$
   (a). $a>0, Q'(x)>0$，Q 严格单调增
   (b). $a<0, Q'(x)<0$，Q 严格单调减
2. $\triangle=0$
   (a). $a>0$，在 $(-\infty,x_0)$上, $f'(x)>0$; 在 $(x_0,+\infty)$上, $f'(x)>0$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上 f 严格单调增。这是因为 $\forall x>x_0, f(x_0)<f(x)$，在 $[x_0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 单调递增，所以 $f(x_0)\le f(\frac{x+x_0}{2})<f(x)$
   (b). $a<0$，在 $(-\infty,x_0)$上, $f'(x)<0$; 在 $(x_0,+\infty)$上, $f'(x)<0$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上 f 严格单调减。

3. $\triangle > 0$，则 $Q'(x) = 0$ 有两个不相等的实根，设两个根为 $x_1 < x_2$，其大致图像如图，其他情况可以类比。



接下来证明第二小问

$$\text{设两个点}\left(-\frac{b}{3a}+t, f\left(-\frac{b}{3a}+t\right)\right), \left(-\frac{b}{3a}-t, f\left(-\frac{b}{3a}-t\right)\right)$$

$$f\left(-\frac{b}{3a}+t\right) - f\left(-\frac{b}{3a}\right) = at^3 + \left(3a\cdot\frac{b^2}{9a^2} + 2b\cdot\frac{-b}{3a} + c\right)t$$

$$\text{同理,} f\left(-\frac{b}{3a}-t\right) - f\left(-\frac{b}{3a}\right) = -at^3 - \left(3a\cdot\frac{b^2}{9a^2} + 2b\cdot\frac{-b}{3a} + c\right)t$$

$$\text{故} f\left(-\frac{b}{3a}+t\right) - f\left(-\frac{b}{3a}\right) = f\left(-\frac{b}{3a}-t\right) - f\left(-\frac{b}{3a}\right)$$

$$\text{故以}\left(-\frac{b}{3a}, Q\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)\text{为对称中心。}$$

练习 1.8 已知 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$

1. 设 $x = 0$ 是 f 的极值点，求 m, 并讨论 f 的单调性；
2. 当 $m \le 2$ 时，证明 $f(x) > 0$。

证明 [解答] 对于第一问，首先求 $f(x)$ 的一阶导 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+m}$，由于 $x = 0$ 是 f 的极值点，则 $f'(0) = 0$，解方程得到 $m = 1$。

对于第二问，利用不等式 $x - 1 \ge \ln x$ 及 $e^x \ge x + 1$ 可知 $\ln(x+m) \le x + m - 1 \le x + 1 \le e^x$，由于不等式链的取等条件分别为 $x = -m+1, m = 2, x = 0$，显然等号不能同时取到，则 $f(x) > 0, \forall m \le 2$

练习 1.9 设 $f(x) = x^2 + ax + b, g(x) = e^x(cx+d), y = f(x)$与$y = g(x)$都过$P(0,2)$，且在点 P 有相同的切线 $y = 4x + 2$，求：

1. a, b, c, d;
2. 若 $x \ge -2$ 时，$f(x) \le kg(x)$, 求 k 的取值范围

证明 [解答] 对于第一问，首先看出 $b = d = 2$, 接着根据切线求出 $a = 4, c = 2$。下面看第二问，由 (1) 知 $f(x) = x^2 + 4x + 2, g(x) = 2e^x(x+1)$, 设函数 $F(x) = kg(x) - f(x) = 2ke^x(x+1) - x^2 - 4x - 2(x \ge -2)$，则 $F'(x) = 2ke^x(x+2) - 2x - 4 = 2(x+2)(ke^x - 1)$, 由题设可得 $F(0) \ge 0$, 即 $k \ge 1$, 令 $F'(x) = 0$ 得, $x_1 = -\ln k, x_2 = -2$.

（1）若 $1 \le k < e^2$

则 $-2 < x_1 \le 0$，当 $x \in (-2, x_1)$ 时，$F'(x) < 0$，当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时，$F'(x) > 0$，即 $F(x)$ 在 $(-2, x_1]$ 单调递减，在 $(x_1, +\infty)$ 单调递增，故 $F(x)$ 在 $x = x_1$ 取最小值 $F(x_1)$，而

$$F(x_1) = 2x_1 + 2 - x_1^2 - 4x_1 - 2 = -x_1(x_1+2) \ge 0$$

$\therefore$ 当 $x \ge -2$ 时，$F(x) \ge 0$，即 $f(x) \le kg(x)$ 恒成立，

（2）若 $k = e^2$

则 $F'(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^2)$，$\therefore$ 当 $x\geq -2$ 时，$F(x)\geq 0$，$\therefore F(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 单调递增，而 $F(-2)=0$，$\therefore$ 当 $x\geq -2$ 时，$F(x)\geq 0$，即 $f(x)\leq kg(x)$ 恒成立，

（3）若 $k>e^2$ 则

$$F(-2)=-2ke^{-2}+2=-2e^{-2}(k-e^{-2})<0,$$

从而当 $x\geq -2$ 时，$f(x)\leq kg(x)$ 不可能恒成立.

综上，k 的取值范围是 $[1,e^2]$.

第二章 数列

2.1 数列极限

定义 2.1 (数列极限的定义)

设 $a_n, a \in R, n = 1, 2, \cdots .\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N$, 称$a$是$\{a_n\}$的极限. 也就是当 n 充分大时，a_n 与 a 的误差极小，而且要多小有多小。

练习 2.1 记 $a_n = 0.\underbrace{333\cdots3}_{n}, n = 1, 2\cdots, a = \dfrac{1}{3}$, 证明 $\{a_n\}$ 的极限为 n.

证明 设 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \max\{\lg\frac{1}{\varepsilon} + 10, 10\}$，则 $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N$。

练习 2.2 记 $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n}), n = 1, 2\cdots$, 证明 $\{a_n\}$ 的极限为 0.

证明 设 $\varepsilon > 0$，令 $N = \max\{\frac{1}{e^{\varepsilon} - 1} + 1, 1\}$，则 $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N$。

定义 a 为 $\{a_n\}$ 的极限，则需要研究极限的 (1) 存在性以及 (2) 唯一性。

练习 2.3 设 $a_n = (-1)^n, n = 1, 2\cdots$，证明任意实数都不是 $\{a_n\}$ 的极限。

证明 设 $a \in R$，下面证 a 不是 $\{a_n\}$ 的极限。反证法：假设 a 是 $\{a_n\}$ 的极限。由定义，存在 $N \in N^*, \ni |a_n - a| < 0.5, \forall n \geq N$，

则

$$|a_{2N} - a| = |1 - a| < 0.5, \quad |a_{2N+1} - a| = -1 - a < 0.5$$

由此可得 $1 - (-1) \leq |1 - a| + |-1 - a| < 1$, 矛盾。所以假设不成立，因此 $\{a_n\}$ 无极限.

练习 2.4 设 $a_n = n, n = 1, 2\cdots$，证明 $\{a_n\}$ 无极限。

证明 设 $a \in R$，假设 a 是 $\{a_n\}$ 的极限。由定义，存在 $N \in N^*, \ni |a_n - a| < 1, \forall n \geq N$, 则 $|a_{N+1} - a| = |N + 1 - a| < 1$，且 $|a_{N+3} - a| = |N + 3 - a| < 1, \therefore |3 - 1| \leq |N + 1 - a| + |N + 3 - a| < 2$, 。所以假设不成立，因此 $\{a_n\}$ 无极限.

2.2 数列极限的唯一性

命题 2.1 (数列极限的唯一性)

设 $a_n \in R, n = 1, 2\cdots, a, b \in R$，如果 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限，则 $a = b$.

证明 设 $\varepsilon > 0$，则存在 $N_1, N_2 \in N^*$，使得 $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N_1$ 并且 $|a_n - b| < \varepsilon, \forall n \geq N_2$，令 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 则

$$|a - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| \leq 2\varepsilon$$

这样我们就证明了 $|a - b| < 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$，所以 $a = b$(反证法，假设 $a \neq b$，令 $\varepsilon = \dfrac{|a - b|}{100}$，与假设矛盾)

2.3 数列的敛散性

定义 2.2

设 $a_n \in R, n = 1, 2\cdots$，如果 $\exists a \in R, \ni a$ 是 $\{a_n\}$ 的极限，称 $\{a_n\}$ 收敛，否则称 $\{a_n\}$ 发散。

设 $\{a_n\}$ 收敛，用 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 表示 $\{a_n\}$ 的极限。如果 $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$，记 $a_n \to a$。

命题 2.2

设 $a_n, a \in R, n = 1, 2, \cdots, C > 0. a_n \to a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < C\varepsilon, \forall n \geq N$

证明 根据定义 $\forall \sigma > 0, \exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < \sigma, \forall n \geq N$。

首先证明必要性，当 $a_n \to a$ 时，设 $\varepsilon > 0$，取 $\sigma = C\varepsilon$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < \sigma = C\varepsilon, \forall n \geq N$。

接下来证明充分性，设 $\sigma > 0$，在已知条件中令 $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{2C}$，则 $\exists N \in N^*, \ni |a_n - a| \leq C\varepsilon = C \cdot \dfrac{\sigma}{2C} = \dfrac{\sigma}{2} < \sigma, \forall n \geq N$。

练习 2.5 记 $a_n \to a, b_n \to b$，设 $\alpha, \beta \in R$，证明：$\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha a + \beta b$.

证明 由定义 $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \exists N_1, N_2 \in N^*$ 使得 $|a_n - a| < \varepsilon_1, \forall n \geq N_1, |b_n - b| < \varepsilon_2, \forall n \geq N_2$，取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, N = \max\{N_1, N_2\}$. 则 $|\alpha a_n + \beta b_n - \alpha a - \beta b| \leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| \leq (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon, \forall n \geq N$. 故 $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha a + \beta b$.

2.4 数列的上下界

定义 2.3

设 $a_n \in R, n = 1, 2 \cdots$，如果 $\exists M \in R, \ni |a_n| \leq M, \forall n \in N^*$，称 $\{a_n\}$ 有界。

命题 2.3 (收敛数列的有界性)

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$，如果 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 有界。

证明 因为数列 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n \to +\infty} = a$. 根据数列极限的定义，对于 $\varepsilon = 1, \exists N \in N^*, \ni |x_n - a| < 1, \forall n \geq N$. $\therefore |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$. 取 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \cdots, |a_N|, 1 + |a|\}$，则 $\forall a_n, n \in N^*, \cdots, |a_n| \leq M$，则 $\{a_n\}$ 有界。

练习 2.6 令 $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}, n = 1, 2, \cdots$，证明 $\{a_n\}$ 不收敛

证明 可知 $a_n \geq \dfrac{n}{2\sqrt{n+1}} \geq \dfrac{n}{4\sqrt{n}}$，容易证明该数列不收敛。

练习 2.7 设 $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}, n = 1, 2, \cdots$，证明：$\{a_n\}$ 的极限为 0。

证明 这道题需要用到不等式 $\ln x \leq \dfrac{1}{\alpha} x^{\alpha}$，则 $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{4}{n^{1/4}} < \varepsilon$，即 $n > \left(\dfrac{4}{\varepsilon}\right)^4$.

设 $\varepsilon > 0$，令 $N = \max\left\{\left(\dfrac{4}{\varepsilon}\right)^4 + 1, 1\right\}$，则 $|a_n - 0| < \varepsilon, \forall n \geq N$.

定义 2.4

（补充）设 $f : A \subseteq R \to R$，$x_0 \in A$. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in A, |x - x_0| < \delta$，称 f 在 x_0 点连续. 如果 $\forall x_0 \in A, f$ 在 x_0 点连续，称 f 连续。

命题 2.4

设 $f : A \subseteq R \to R$ 连续，$a_n, a \in A, , n = 1, 2, \cdots$，如果 $a_n \to a$，则 $f(a_n) \to f(a)$.

证明 设 $\varepsilon > 0$，因为 f 在 a 点连续，则 $\exists \delta > 0, \ni |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \forall x \in A, |x - a| < \delta$. 因为 $a_n \to a, \exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < \delta, \forall n \geq N$, 则当 $n \geq N$ 时, $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$.

定理 2.1 (柯西中值定理)

设 $f, g : [a, b] \to R$ 连续，在 (a, b) 上可导且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$，则 $\exists \xi \in (a, b), \ni \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明 不妨设 $f(b)\neq f(a), g(b)\neq g(a)$ 令：

$$h(x)=\frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}-\frac{g(x)-g(b)}{g(a)-g(b)}$$

则 $h(a)=h(b)=0$ 且 $\exists\xi\in(a,b),\ni,h'(\xi)=0$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

现在来验证 $f(b)\neq f(a), g(b)\neq g(a)$，如果 $f(b)=f(a)$ 则可以利用罗尔中值定理得出 $\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b), f'(\xi_1)=0, g'(\xi_2)=0$，与题设矛盾，因此 $f(b)\neq f(a), g(b)\neq g(a)$.

练习 2.8 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 对该极限取对数之后利用 $\ln x\leq\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}$ 放缩即可。

2.5 数列的子列

定义 2.5 (子列的定义)

设 $a_n\in R, n=1,2,\cdots$，设 $n_k\in N^*, k=1,2,\cdots, n_{k+1}>n_k, k=1,2,\cdots$. 称 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列，且 $n_N\geq N,\forall N\in N^*$.

命题 2.5 (收敛数列与其子数列之间的关系)

设 $a_n\in R, n=1,2,\cdots,\{a_{n_k}\}$时$\{a_n\}$的子列，如果$a_n\to a$，则$a_{n_k}\to a$.

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 设$\varepsilon>0,\exists N\in N^*,\ni|x_n-a|<\varepsilon,\forall n\geq N$，则当 $k\geq N$ 时 $n_k\geq n_N\geq N$，因此 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon,\forall k\geq N$.

2.6 数列极限的四则运算

命题 2.6

设 $a_n,b_n,a,b\in R, n=1,2,\cdots, a_n\to a, b_n\to b,\alpha,\beta\in R$，则

(i) $\alpha a_n+\beta b_n\to\alpha a+\beta b$

(ii) $a_nb_n\to ab$

(iii) 如果 $b,b_n\neq 0,\forall n=1,2,\cdots$，则 $\dfrac{a_n}{b_n}\to\dfrac{a}{b}$.

证明

(ii) 设 $\varepsilon>0,\exists N\in N^*,\ni|a_n-a|<\varepsilon,\forall n\geq N,|b_n-b|<\varepsilon,\forall n\geq N$. 则当 $n\geq N$ 时，$|a_nb_n-ab|<|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|\leq|a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|\leq|a_n|\varepsilon+|b|\varepsilon=(|a_n|+|b|)\varepsilon$，因为 $\{a_n\}$ 有界，因此 $\exists M\in R$ 使得 $|a_n|\leq M,\forall n\in N^*$，因此 $|a_nb_n-ab|<(M+|b|+1)\varepsilon,\forall n\geq N$.

(iii) 因为 $b_n\to b\exists N_1\in N^*,\ni|b_n-b|\leq\dfrac{|b|}{2},\forall n\geq N_1$，则 $b_n|\geq\dfrac{|b|}{2},\forall n\geq N_1$. 设 $\varepsilon>0,\exists N_2\in N^*,\ni|b_n-b|<\varepsilon,\forall n\geq N_2$，令 N = $\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b}\right|=\dfrac{|b_n-b|}{|b_n||b|}<\dfrac{2\varepsilon}{|b|^2}$.

练习 2.9 设 $a_n=\dfrac{1}{n}$，证明 $a_n\to 0$.

证明 设 $\varepsilon>0$, 令 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则 $|a_n-0|<\varepsilon,\forall n\geq N$.

练习 2.10 设 $M\in R, a_n=\dfrac{M}{n}$，证明 $a_n\to 0$

证明 因为 $\frac{1}{n} \to 0$，所以 $\frac{M}{n} \to M \cdot 0 = 0$

✍ **练习 2.11** 设 $a_n \to a$，令 $b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$，证明 $b_n \to a$.

证明 设 $\varepsilon > 0$，由题意知 $\exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N$.

$$|b_n - a| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N-1}(a_i - a) + \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n}(a_i - a)\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N-1}(a_i - a)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n}(a_i - a)\right|.$$

记 $C = \sum_{i=1}^{N-1}|a_i - a|$ 则

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N-1}(a_i - a)\right| \leq \frac{C}{n}$$

当 $n > \frac{2C}{\varepsilon}$ 时 $\frac{C}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

当 $n \geq N$ 时 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$，因此

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n}(a_i - a)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n}|a_i - a| < \frac{1}{n}(n - N + 1)\cdot\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N' = \max\{N, \left[\frac{2C}{\varepsilon}\right] + 1\}$，则 $|b_n - a| \leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq N'$

✍ **练习 2.12** 设 $a_n \to a, a_n, a > 0, n = 1, 2, \cdots$ 令 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$，证明 $b_n \to a$.

证明 令 $c_n = \ln(b_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln a_i\right)$，由于 $\ln a_i \to \ln a$，由 2.11 题可以得出 $c_n \to \ln a$ 即 $b_n \to a$

✍ **练习 2.13** 设 $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

证明 令 $b_n = \ln(a_n) = \frac{1}{n}\ln(2^n + 3^n) = \frac{1}{n}\ln\left[3^n\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right] = \ln 3 + \frac{1}{n}\ln\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \ln$

第三章 极限与不等式

命题 3.1

设 $a_n, b_n, a, b \in R, n = 1, 2, \cdots, a_n \to a, b_n \to b$. 如果 $a > b$，则 $\exists N_0 \in N^*, \ni a_n > b_n, \forall n \ge N_0$.

证明 $\exists N_0 \in N^*, \ni$

$$|a_n - a| \le \frac{a-b}{3}, n \ge N_0$$
$$|b_n - b| \le \frac{a-b}{3}$$

则当 $n \ge N_0, a_n \ge a - \frac{a-b}{3} > b + \frac{a-b}{3} \ge b_n$

命题 3.2

设 $a_n, b_n, a, b \in R, n = 1, 2, \cdots, a_n \to a, b_n \to b$. 如果 $\exists N_0 \in N^*, \ni a_n \le b_n, \forall n \ge N_0$，则 $a \le b$.

这里就算 $a_n < b_n, \forall n \ge N_0$ 也无法推出 $a < b$。可以通过反例 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{2}{n}$ 来说明。

3.1 夹逼定理

命题 3.3 (夹逼定理)

设 $a_n, b_n, c_n \in R, n = 1, 2, \cdots, \exists N_0 \in N^*, \ni a_n \le b_n \le c_n, \forall n \ge N_0$. 如果 $a_n, c_n \to a \in R$，则 $b_n \to a$.

证明 设 $\varepsilon > 0, \exists N_1 \in N^*, \ni$

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \ge N_1$$
$$|c_n - a| < \varepsilon, \forall n \ge N_1$$

也就是 $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$，令 $N = \max\{N_1, N_0\}$，则当 $n \ge N$ 时, $|b_n - a| < \varepsilon$

练习 3.1

$$求a_n = \frac{1}{n^2 + 1\ln 1} + \frac{2}{n^2 + 2\ln 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\ln n}的极限.$$

证明 注意到:

$$a_n \le \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$
$$a_n \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2 + n\ln n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n + \ln n} = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{\ln n}{n}} = \frac{1}{2}$$

因此 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2}$

练习 3.2 变式

$$求a_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}的极限.$$

证明 注意到:

$$a_n \le \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$
$$a_n \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2 + n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$

定理 3.1

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$，如果 $\{a_n\}$ 单调增,$\{a_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n$.($\sup a_n = \sup\{a_n; n = 1, 2, \cdots\}$)

证明 记 $M = \sup a_n$，设 $\varepsilon > 0$ 则 $\exists N \in N^*, \ni a_N > M - \varepsilon$，则当 $n \geq N$ 时, $|a_n - M| = M - a_n \leq M - a_N < \varepsilon$

推论 3.1

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$，如果 $\{a_n\}$ 单调减,$\{a_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf a_n$.($\inf a_n = \inf\{a_n; n = 1, 2, \cdots\}$)

练习 3.3 $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$

(i) 证明 $\{a_n\}$ 收敛

(ii) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

证明

(i) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

(a). 有上界：用数学归纳法证明对所有 n，$a_n < 2$:

- 初始项 $a_1 = \sqrt{2} < 2$。
- 假设 $a_k < 2$，则 $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2+2} = 2$。

故数列有上界 2。

(b). 单调递增：用数学归纳法证明对所有 $n \geq 1$，$a_{n+1} > a_n$:

- $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$。
- 假设 $a_k > a_{k-1}$，则 $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} > \sqrt{2 + a_{k-1}} = a_k$。

故数列单调递增。

根据单调收敛定理，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

(ii) 求极限设极限为 L，对递推公式 $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ 两边取极限：

$$L = \sqrt{2 + L}.$$

平方得：

$$L^2 = 2 + L \implies L^2 - L - 2 = 0.$$

解得：

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \implies L = 2 \text{ 或} L = -1.$$

由于数列各项均为正数，舍去负解，得极限为：2

定义 3.1 (数列的上极限和下极限)

设 $a_n \in R, n \in N^*$，设 $\{a_n\}$ 有界，记

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} a_k$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$

分别称 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限.

式中 $\sup_{k\geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \inf_{k\geq n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$。

定理 3.2

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$ 设$\{a_n\}$有界则$\{a_n\}$收敛当且仅当 $\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$，并且当 $\{a_n\}$ 收敛时 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$.

证明 首先证明充分性:

$\inf_{k\geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\geq n} a_n, \forall n \in N^*, \therefore \{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$.

接下来证明必要性:

记 $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$，设 $\varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N$，即 $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon, \forall n \in N$

设 $n \geq N$，则 $a - \varepsilon \leq a_k \leq a + \varepsilon, \forall k \geq n$，因此 $a - \varepsilon \leq \inf_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} a_k \leq a + \varepsilon, \forall n \geq N$.

则 $a - \varepsilon \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \leq a + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

所以 $\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = a = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

设 $l > 0$, 则 $\overline{\lim_{n\to+\infty}} la_n = l \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} a_k = l \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$ 且 $\underline{\lim_{n\to+\infty}} la_n = l \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} a_k = l \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$.

命题 3.4

如果 $\{b_n\}$ 有界，$a_n \geq b_n, \forall n \geq n_0$，$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \geq \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n$ 且 $\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \geq \underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n$.

证明 由 $a_n \geq b_n, \forall n \geq n_0$ 则 $\sup_{k\geq n} a_k \geq \sup_{k\geq n} b_k, n \geq n_0$, 因此 $\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \geq \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n$, 同理 $\inf_{k\geq n} a_k \geq \inf_{k\geq n} b_k, n \geq n_0$，因此 $\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \geq \underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n$.

命题 3.5

设 $a_n, a \in R, n = 1, 2, 3, \cdots, a_n \to a$. 令

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

则 $b_n \to a$.

证明 设 $|a_n| \leq M$, 则 $|b_n| \leq M$，所以 $\{b_n\}$ 有界. 设 $\varepsilon > 0$，则 $\exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N$，即 $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon, \forall n \geq N$. 设 $n \geq 2N$，则

$$\frac{a_1 + \cdots + a_N + (n-N)(a-\varepsilon)}{n} \leq b_n \leq \frac{a_1 + \cdots + a_N + (n-N)(a+\varepsilon)}{n}, \quad n \geq 2N$$

因此 $a - \varepsilon \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n \leq a + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$，所以 $\overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n = a$. 同理 $a - \varepsilon \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n \leq a + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$，所以 $\underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n = a$，$\lim_{n\to+\infty} = a$.

练习 3.4 设 $a_n, a \in R, n = 1, 2, \cdots, a_n \to a$, 设 $a_n, a > 0, n = 1, 2, \cdots, b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, n = 1, 2, \cdots$, 证明 $b_n \to a$.

证明 对 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 两边取对数得到 $\ln b_n = \frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots \ln a_n)$，令 $c_n = \ln a_n, d_n = \ln b_n$，则 $d_n = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}$, 由于 $c_n \to \ln a$, 则 $d_n \to \ln a$ 即 $\ln b_n \to \ln a$, $b_n \to a$.

练习 3.5 设 $a, b \in R^3$ 为相互垂直的单位向量，证明 $|c|^2 \geq (c \cdot a)^2 + (c \cdot b)^2, \forall c \in R^3$，并给出等号成立的条件.

证明 令 $c_1 = (c \cdot a)a, c_2 = (c \cdot b)b, c_3 = c - c_1 - c_2$，则 $c = c_1 + c_2 + c_3$，且 $c_3 \cdot c_1 = c \cdot c_1 - c_1 \cdot c_1 - c_1 \cdot c_2 = (c \cdot a)^2 - (c \cdot a)^2 - 0 = 0$，同理 $c_3 \cdot c_2 = 0$，所以 $|c|^2 = (c_1 + c_2 + c_3) \cdot (c_1 + c_2 + c_3) = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2$，当且仅当 $c_3 = \mathbf{0}$ 时等号成立.

3.2 Cauchy 收敛原理

定义 3.2 (Cauchy 列的定义)

设 $a_n \in R, n \in N^*$，如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \ni |a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq N$，称 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列.

定理 3.3 (Cauchy 收敛原理)

设 $a_n \in R, n \in N^*$，则 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列。

证明 首先证明必要性:

$a_n \to a$，设 $\varepsilon > 0$，则 $\exists N \in N^*, \ni |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N$，则 $n, m \geq N$ 时 $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq 2\varepsilon$.

接下来证明充分性:

设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列，则 $\{a_n\}$ 有界，设 $\varepsilon > 0$, 则$\exists N \in N^*, \ni a_k - a_l \leq \varepsilon, \forall k, l \geq N$.

设 $n \geq N$，则

$$a_k - a_l \leq \varepsilon \iff a_k \leq a_l + \varepsilon, \forall k \geq n, l \geq n$$

即

$$\sup_{k \geq n} a_k \leq a_l + \varepsilon \iff \sup_{k \geq n} a_k - \varepsilon \leq a_l, \forall l \geq n$$

也就是

$$\sup_{k \geq n} a_k \leq \inf_{l \geq n} a_l + \varepsilon, n \geq N$$

两边取极限得到

$$\begin{aligned} \varlimsup_{n \to +\infty} a_n &\leq \varliminf_{n \to +\infty} a_n + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \\ \varlimsup_{n \to +\infty} a_n &\leq \varliminf_{n \to +\infty} a_n \\ \varlimsup_{n \to +\infty} a_n &= \varliminf_{n \to +\infty} a_n \end{aligned}$$

练习 3.6 设 $a_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{(-1)^{i-1}}{i}$，判断 $\{a_n\}$ 是否收敛.

证明 $|a_n - a_{n+p}| = |\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+4} + \cdots + (-1)^{p+1}\dfrac{1}{n+p}| < \dfrac{1}{n+1}$.

设 $\varepsilon > 0$，因为 $\dfrac{1}{n+1} \to 0$，所以 $\exists N \in N^*, \ni \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon, \forall n \geq N$，则 $|a_n - a_{n+p}| < \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon, \forall n \geq N$.

练习 3.7 设 $a_n > 0, \{a_n\}$ 单调减,$a_n \to 0$，令 $b_1 = a_1, b_2 = a_1 - a_2, b_3 = a_1 - a_2 + a_3, b_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$，证明 $\{b_n\}$ 收敛。

证明 设 $\varepsilon > 0$，因为 $a_n \to 0, \exists N \in N^*, \ni a_n < \varepsilon, \forall n \geq N$，则当 $n \geq N, p = 1, 2, \cdots$ 时 $|b_n - b_{n-p}| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p+1} a_{n+p}| = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p+1} a_{n+p} \leq a_{n+1} < \varepsilon$

3.3 数列趋近于无穷大

定义 3.3

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$，如果 $\forall M > 0, \exists N \in N^*, \ni a_n \geq M, \forall n \geq N$，称当 $n \to +\infty$ 时,$a_n \to +\infty$，记为 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

如果 $\forall M > 0, \exists N \in N^*, \ni a_n \leq -M, \forall n \geq N$，称当 $n \to +\infty$ 时,$a_n \to -\infty$，记为 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$.

这里 $a_n \to +\infty$ 可以和 $a_n \to -\infty$ 通过乘以-1 相互转化。

✍ **练习 3.8** 设 $q>1$ 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

证明 设 $M>0$，令 $N=\max\left\{\left[\frac{\ln M}{\ln q}\right]+1,1\right\}$，则当 $n\geq N$ 时 $q^n\geq M$。

✍ **练习 3.9** 设 $a_n\geq b_n,\forall n\geq N_0,N_0\in N^*$，如果 $b_n\to+\infty$ 则 $a_n\to+\infty$.

证明 设 $M>0,\exists N_1\in N^*,\ni b_n\geq M,\forall n\geq N_1$，令 $N=\max\{N_0,N_1\}$，则当 $n\geq N$ 时, $a_n\geq b_n\geq M$.

补充一个不等式:

$$\text{设}n\in N^*,\text{则}e^x\geq\frac{x^n}{n!},\forall x\geq 0$$

先用数学归纳法证明这个不等式:

证明 [不等式的证明]

$$\begin{aligned}
&n=1,e^x\geq x+1>x\\
&n=m,e^x\geq\frac{x^m}{m!},\forall x\geq 0\\
&f(x)=e^x-\frac{x^{m+1}}{(m+1)!},f(0)=1\\
&f'(x)=e^x-\frac{x^m}{m!}\geq 0\\
&\therefore f(x)\geq 0,\forall x\geq 0
\end{aligned}$$

✍ **练习 3.10** 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^\alpha}=+\infty,\alpha>0$.

证明 令 $m=[\alpha]+2,e^x\geq\frac{x^m}{m!}$ 则 $e^n\geq\frac{n^m}{m!}$，$\frac{e^n}{n^\alpha}\geq\frac{n^{m-\alpha}}{m!},m-\alpha>0$，设 $M>0$，令 $N_0=\sqrt[m-\alpha]{M}+1$ 则 $n^{m-\alpha}\geq M,\forall n\geq N_0$，因此 $\frac{e^n}{n^\alpha}\geq\frac{n^{m-\alpha}}{m!}\geq\frac{M}{m!},\forall n\geq N_0$.

✍ **练习 3.11** 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{\ln n}=+\infty,\alpha>0$.

证明 由切线放缩可知 $\ln n\leq\frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}}$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{\ln n}\geq\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{\alpha}{2}n^\alpha}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$，后面证明请自行补充。

第四章 级数

4.1 正项级数

定义 4.1 (级数的定义)

设 $a_n \in R, n \in N^*$，和式 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 称为级数，如果 $a_n \geq 0, n \in N^*$，称为正项（非负项）级数，记为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, S_n 代表前 n 项和(部分和), 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = A \in [-\infty, +\infty]$, 称 A 为级数的和, $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

设 $a_n \geq 0, n \in N^*, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 存在. 则 $\{S_n\}$ 单调增，第一种情况为 $\{S_n\}$ 有界，第二种 $\{S_n\}$ 无界，因此其部分和要么有限要么无限。

练习 4.1 $\sum_{n=1}^{+\infty} n = +\infty$.

证明 $S_n \geq n$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} n$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$

练习 4.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$.

证明 可以用画图法、积分法或者分组法证明，参考上学期笔记。

练习 4.3 设 $0 < p < 1$，求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

证明 [解答] $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$

练习 4.4 设 $p > 1$，证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p} < +\infty$.

证明 设 $y = \dfrac{1}{x^p}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p} dx = 1 + \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{+\infty} = 1 - \dfrac{1}{1-p}$，后面的过程参考定义。

练习 4.5 求 $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

证明 [解答] $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n \ln n} \geq \dfrac{1}{2\ln 2} + \int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x \ln x} dx = \ln\ln x\Big|_2^{+\infty} = +\infty$

定义 4.2 (级数的敛散性)

如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = A \in R$，称 $\sum a_n$ 收敛，否则称 $\sum a_n$ 发散.

命题 4.1

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$, 如果 $\sum a_n$ 收敛，则 $a_n \to 0$.

证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$，即 $a_n \to 0$.

定理 4.1

若 $|q < 1| : \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$，若 $|q \geq 1| : \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ 发散

命题 4.2

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$，则 $\sum a_n$ 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists \in N^*, \ni |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq N, p = 1, 2, \cdots$

证明 $\sum a_n$ 收敛 $\iff$ $\{S_n\}$ 收敛 $\iff$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \ni |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon, n \geq N$.

定义 4.3 (绝对收敛的定义)

如果 $\sum |a_n| < +\infty$，称 $\sum a_n$ 绝对收敛。绝对收敛一定收敛，但收敛不一定绝对收敛。

命题 4.3

如果 $\sum a_n$ 绝对收敛，则 $\sum a_n$ 收敛。

命题 4.4

设 $a_n, b_n \in R, n = 1, 2, \cdots, \alpha, \beta \in R$，如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

证明 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k)$，则 $\sigma_n = \alpha S_n + \beta T_n$，因为 $\sum a_n, \sum b_n$ 收敛 $\Longrightarrow \{S_n\}, \{T_n\}$ 收敛 $\Longrightarrow \{\sigma_n\}$ 收敛 $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ 收敛.

由定义知 $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n = \alpha \lim\limits_{n \to +\infty} S_n + \beta \lim\limits_{n \to +\infty} T_n = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$.

练习 4.6 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$ 发散.

证明 反证法，假设 $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$ 收敛，由于 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum \frac{1}{n} = \sum\left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，与假设矛盾。

命题 4.5

一个级数去掉有限项，加上有限项或改变有限项，敛散性不变。

证明 (1) 证明去掉（加上）有限项. 设 $a_n, b_n \in R, n = 1, 2, \cdots, n_0 \in N^*, b_n = a_{n+n_0}, n = 1, 2, \cdots$，下面证明 $\sum a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum b_n$ 收敛.

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$，则 $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k+n_0} = S_{n+n_0} - S_{n_0}$. 则 $\sum b_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{T_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_{n+n_0}\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum a_n$ 收敛

现在证明 $\{a_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{a_{n+n_0}\}$ 收敛，若 $\{a_n\}$ 收敛，设 $\varepsilon > 0, \exists N \in N^*$ 且 $N > n_0, \ni |a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq N$，则 $|a_{n+n_0} - a_{m+n_0}| < \varepsilon, \forall m, n \geq N$，则 $\{a_{n+n_0}\}$ 收敛.

设 $b_n \to b$. 设 $\varepsilon > 0$，因为 $b_n \to b$，所以 $\exists N_0 \in N^*, \ni |b_n - b| < \varepsilon, \forall n \geq N_0$，因此 $|a_{n+n_0} - b| < \varepsilon, \forall n \geq N_0$，令 $N = N_0 + n_0$，则 $|a_n - b| < \varepsilon, \forall n \geq N$

(2) 证明改变有限项. 设 $a_n, b_n \in R, n = 1, 2, \cdots, n_0 \in N, a_n = b_n, \forall n \geq n_0$，下面证 $\sum a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum b_n$ 收敛，只需要证明 $\sum a_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum b_n$ 收敛.

令 $c_n = a_{n+n_0}, n_0 \in N^*$，则 $\sum a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum c_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum b_n$ 收敛.

命题 4.6 (收敛级数的加法结合律)

设 $\sum a_n$ 收敛，记 $b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}, b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}$，其中 $n_1 < n_2 < \cdots$，则 $\sum b_n$ 收敛.

证明 令 $S_n = \sum_{i=1}^{k} a_i, T_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$，则 $T_n = S_{n_k}$，所以 $\{T_k\}$ 是 $\{S_k\}$ 的子列，因为 $\sum a_n$ 收敛，所以 $\{S_k\}$ 收敛，所以 $\{T_n\}$ 收敛，所以 $\sum b_n$ 收敛.

练习 4.7 判断收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi}{6}$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$， $p>0$

证明 [解答]

(1) 发散，因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-1=+\infty$

(2) 发散，因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$

(3) 发散，因为 $a_n=\sin\frac{n}{6}\pi$ 的极限不趋于 0，可以构造子列证明.

(4) 收敛，因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

(5) 发散，因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt{n+1}$ 发散.

(6) 当 $p\le 1$ 时发散，这个可以通过 p-范数来进行不等式放缩；当 $p>1$ 时收敛，这可以通过切线放缩和 p-级数的敛散性进行判断

命题 4.7

设 $a_n>0,n=1,2,\cdots,S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 则 $\sum a_n$ 收敛当且仅当 $\{S_n\}$ 有界.

证明 首先证明充分性，$\{S_n\}$ 单调增且有界，所以 $\{S_n\}$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛.

接着证明必要性，记 $M=\sum_{k=1}^{+\infty}a_n, 0\le S_n\le M,\forall n=1,2,\cdots$，所以 $\{S_n\}$ 有界.

4.2 级数敛散性判别

命题 4.8 (比较判别法)

设 $a_n,b_n>0,n=1,2,\cdots$，设 $\exists n_0\in N^*,\ni a_n\le b_n,\forall n\ge n_0$ 则

(i) $\sum b_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum a_n$ 收敛

(ii) $\sum a_n$ 发散 $\Longrightarrow\sum b_n$ 发散

证明

(i) $\sum b_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum_{n=n_0}^{+\infty}b_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum_{n=n_0}^{+\infty}b_n<+\infty\Longrightarrow\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_n<+\infty\Longrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

(ii) 该命题为 (i) 的逆否命题，因此与 (i) 的真假性一致。

命题 4.9 (极限判别法)

设 $a_n,b_n>0,n=1,2,\cdots$ 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\in[0,+\infty]$.

(i) 如果 $0<l<+\infty$，则 $\sum a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow\sum b_n$ 收敛.

(ii) 如果 $l=0$ 则 $\sum b_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum a_n$ 收敛，$\sum a_n$ 发散 $\Longrightarrow\sum b_n$ 发散.

(iii) 如果 $l=+\infty$，则 $\sum a_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum b_n$ 收敛，$\sum b_n$ 发散 $\Longrightarrow\sum a_n$ 发散

证明 [第一条的证明] (i) 由已知 $\exists n_0\in N^*$,

$$\ni\frac{l}{2}\le\frac{a_n}{b_n}\le 2l,\forall n\ge n_0$$

$$\frac{l}{2}b_n\le a_n\le 2lb_n,\forall n\ge n_0$$

$\sum a_n$ 收敛 $\Longrightarrow\frac{l}{2}b_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum b_n$ 收敛. $\sum b_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum 2lb_n$ 收敛 $\Longrightarrow\sum a_n$ 收敛.

$\exists n_0\in N^*,\ni$

$$\frac{a_n}{b_n}\ge 1,\forall n\ge n_0$$

$$a_n\ge b_n,\forall n\ge n_0$$

$\sum a_n$ 收敛 $\implies \sum b_n$ 收敛

命题 4.10 (比率判别法)

设 $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$，设 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

(i) 如果 $\rho < 1$，则 $\sum a_n$ 收敛.

(ii) 如果 $\rho > 1$，则 $\sum a_n$ 发散.

(iii) 如果 $\rho = 1$，则 $\sum a_n$ 可能收敛也可能发散.

证明 (i) $\exists n_0 \in N^*, \ni \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{\rho+1}{2} = \sigma, \forall n \ge n_0$，则 $a_{n+1} \le \sigma a_n, \forall n \ge n_0 \implies a_{n_0+n} \le \sigma^n a_{n_0}, \forall n \ge 1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n_0+n} \le a_{n_0}\dfrac{\sigma}{1-\sigma} \le +\infty$，因此 $\sum a_n \le +\infty$.

(ii) $\exists n_0 \in N^*, \ni \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge \dfrac{\rho+1}{2} = \sigma > 1, \forall n \ge n_0$，则 $a_{n+1} \le \sigma a_n, \forall n \ge n_0 \implies a_{n_0+n} \ge \sigma^n a_{n_0}, \forall n \ge 1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n_0+n} \ge +\infty$，因此 $\sum a_n = +\infty$.

(iii) 可以考虑常数数列 $\{c\}$ 以及 $\{\dfrac{1}{n^2}\}$.

练习 4.8 设 $x \in R$. 证明 $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 收敛.

证明 对 x 的符号分类讨论再取绝对值应用比率判别法即可.

练习 4.9 设 $x \in R$. 证明 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$ 收敛以及 $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

证明 同理，考虑绝对值，容易证明该级数绝对收敛，因此收敛. 或者考虑 $\sum |a_n| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} < +\infty$

命题 4.11 (方根判别法)

设 $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$，设 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

(i) 如果 $\rho < 1$，则 $\sum a_n$ 收敛.

(ii) 如果 $\rho > 1$，则 $\sum a_n$ 发散.

(iii) 如果 $\rho = 1$，则 $\sum a_n$ 可能收敛也可能发散.

证明 (i) $\exists n_0 \in N^*, \ni \sqrt[n]{a_n} \le \dfrac{\rho+1}{2} = \sigma, \forall n \ge n_0$，则 $a_n \le \sigma^n, \forall n \ge n_0$ 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le \dfrac{\sigma}{1-\sigma} < +\infty$，因此 $\sum a_n < +\infty$.

(ii) $\exists n_0 \in N^*, \ni \sqrt[n]{a_n} \ge \dfrac{\rho+1}{2} = \sigma > 1, \forall n \ge n_0$，则 $a_n \ge \sigma^n, \forall n \ge n_0$ 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$，因此 $\sum a_n = +\infty$.

练习 4.10 设 $a > 0$，判断 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{na}{n+1}\right)^n$ 的敛散性.

证明 $a \in (0,1) \cup (+1, +\infty)$ 的情况不再考虑，考虑 $a = 1$ 的情况 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \dfrac{1}{e}$，且每一项都比极限大，可以求导证明，因此最后加起来是发散的.

命题 4.12 (积分判别法)

设 $f : [1, +\infty] \to R$，f 非负且单调减,$a_n = f(n), n = 1, 2, \cdots$ 则 $\sum a_n < +\infty$ 当且仅当 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$

证明 这部分自行画图，画图容易看出，可以构造函数使得 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

也可以得出 $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n < \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

练习 4.11 判断敛散性 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0)$

证明 首先利用比率判别法判别 $a \ne e$ 的情况，接着使用 Taylor 公式展开放缩为 $e^n > \dfrac{n^n}{n!}$ 即可.

命题 4.13

设 $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho > 1$，则 $\sum a_n$ 发散.

证明 令 $\sigma = \dfrac{\rho+1}{2}$，则 $1 < \sigma < \rho, \exists n_0 \in N, \ni \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \sigma, \forall n \geq n_0$. 则 $|a_{n_0+k}| \geq \sigma^k |a_{n_0}|, \forall k \geq 1$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty, a_n$ 不收敛于 0.

命题 4.14

设 $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 1$，则 $\sum a_n$ 发散.

证明 令 $\sigma = \dfrac{\rho+1}{2}$，则 $1 < \sigma < \rho, \exists n_0 \in N, \ni \sqrt[n]{|a_n|} \geq \sigma, \forall n \geq n_0$. 则 $|a_n| \geq \sigma^n, \forall n \geq n_0$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty, a_n$ 不收敛于 0.

4.3 交错级数

定义 4.4 (交错级数的定义)

设 $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$，称 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 为交错级数.

命题 4.15 (莱布尼兹判别法)

设 $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$，如果 $\{a_n\}$ 单调减，$a_n \to 0$，则 $\sum (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

证明 考虑 $|(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p}| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}|$，令 $S = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}$.

若 p 为偶数，由 $\{a_n\}$ 单调减得到 $S = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) \geq 0$，且 $S = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - a_{n+p} \leq a_{n+1}$. 则 $0 \leq S \leq a_{n+1}$.

若 p 为奇数，则 $S = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + a_{n+p} \geq 0$，且 $S = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+p-1} - a_{n+p}) \leq a_{n+1}$，则 $0 \leq S \leq a_{n+1}$.

所以 $|S| \leq a_{n+1}$，设 $\varepsilon > 0, \exists \in N^*, \ni a_{n+1} < \varepsilon, \forall n \geq N$，因此 $S < \varepsilon, \forall n \geq N, p = 1, 2, \cdots$

定义 4.5 (条件收敛)

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$，如果 $\sum a_n$ 收敛，$\sum |a_n| = +\infty$，称 $\sum a_n$ 条件收敛.

设 $a \in R$, 则记

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}$$

其中 a^+ 称为正部，a^- 称为负部。$a = a^+ - a^-$，$|a| = a^+ + a^-$。

命题 4.16

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$，如果 $\sum a_n$ 条件收敛，则 $\sum a_n^+ = +\infty$，$\sum a_n^- = +\infty$.

证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n a_n^- = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n = \dfrac{|a_k| - a_k}{2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=1}^n a_k) = +\infty$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n a_n^+ = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n = \dfrac{|a_k| + a_k}{2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^n a_k) = +\infty$

定义 4.6 (级数重排)

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots$ 设 $\sigma : N^* \to N^*$ 为双射,$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ 称为 $\sum_{n=1}^{+\infty}$ 的重排.

命题 4.17

1. 设 $a_n>0,n=1,2,\cdots$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{\sigma(n)}$
2. 设 $a_n\in R,n=1,2,\cdots$，若 $\sum a_n$ 绝对收敛，则
   (a) $\sum a_{\sigma(n)}$ 绝对收敛
   (b) $\sum a_n=\sum a_{\sigma(n)}$

证明

1. 设 $n\in N^*,\exists N\in N^*,\ni\{1,2,\cdots,n\}\subseteq\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(N)\},\sum_{k=1}^{n}a_k\le\sum_{k=1}^{N}a_{\sigma(k)}\le\sum_{k=1}^{+\infty}a_{\sigma(k)},\forall n\ge1$，则 $\sum_{k=1}^{+\infty}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\le\sum_{k=1}^{+\infty}a_{\sigma(k)}$. 同理，原级数可以看成重排后级数的重排，也就是 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_{\sigma(k)}\le\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$，也就可以得出.$\sum_{k=1}^{+\infty}a_{\sigma(k)}=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$
2. 由第一问的结论可知 $\sum|a_{\sigma(n)}|=\sum|a_n|<+\infty$，所以 $\sum a_{\sigma(n)}$ 绝对收敛. 接着 $\sum a_n^+\le\sum|a_n|<+\infty,\sum a_n^-\le\sum|a_n|<+\infty,\sum a_{\sigma(n)}^+\le\sum|a_\sigma(n)|<+\infty,\sum a_{\sigma(n)}^-\le\sum|a_\sigma(n)|<+\infty$. $\sum a_n=\sum(a_n^+-a_n^-)=\sum a_n^+-\sum a_n^-=\sum a_{\sigma(n)}^+-\sum a_{\sigma(n)}^-=\sum(a_{\sigma(n)}^+-a_{\sigma(n)}^-)=\sum a_{\sigma(n)}$.

定理 4.2 (Riemann 重排定理)

设 $\sum a_n$ 条件收敛，设 $S\in[-\infty,+\infty]$，则存在双射 $\sigma:N^*\to N^*,\ni\sum a_{\sigma(n)}=S$

练习 4.12 证明 $\sum(1-\cos\frac{1}{n})$ 是否收敛。

证明 利用不等式 $0\le1-\cos\frac{1}{n}\le\frac{1}{2n^2}$ 放缩即可.

练习 4.13 判断级数的收敛性 $\sum_{n=1}^{+\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$

证明 原级数的通项可化为 $e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1$，而当 $x\to0$ 时 $e^x\approx1+x$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1}{\frac{\ln n}{n^2+1}}=1$，因此上下方的两个级数敛散性相同，而 $\frac{\ln n}{n^2+1}\le\frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^2+1}\le\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，因此原级数收敛。

练习 4.14 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

证明 由于 $x\to0$ 时 $\ln(x+1)\approx x-\frac{x^2}{2}$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$，则原级数通项在 $n\to+\infty$ 等价于 $\frac{1}{2n^2}$，且两个级数敛散性相同。

练习 4.15 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot u_n=1$，讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的收敛性。

证明 原式可化为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}}=1$，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\frac{1}{n}=1,\exists n_0\in N^*,\ni n\ge n_0$ 时，$n\sin\frac{1}{n}\ge\frac{3}{4}$，因此 $n^{2n\sin\frac{1}{n}}\le n^{\frac{3}{2}}$ 收敛。

练习 4.16 设 $u_n>0,n=1,2,\cdots$

1. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛
2. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n=\lambda,\lambda>0,\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散
3. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2u_n=0$
4. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散，则 $\exists\lambda>0$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n=\lambda$

证明 一三四是错误的，第二个是正确的。

练习 4.17 $\sum_{n=}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性

证明 对原级数取绝对值得到 $\sum_{n=}^{+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$，可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$，之后通过求导可以证明该数列在第 9 项之后单调减，因此符合莱布尼兹判别法，收敛。

练习 4.18 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right),a>0$

证明 $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)=(-1)^n\sin\left(\pi\dfrac{a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)$，接下来使用莱布尼兹判别法即可。

✍ **练习 4.19** 已知 $a_n>0$，$\{a_n\}$ 单调减，$\sum(-1)^{n-1}a_n$ 发散，判断 $\sum\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 是否收敛.

证明 由于 a_n 有下界，且 $\{a_n\}$ 单调减，则 a_n 收敛且 $0<a_n<a_1$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+a_n}=\dfrac{1}{1+a}<1$，$a_n\to a\geq 0$

✍ **练习 4.20** 判定 $\sum_{n=2}^{+\infty}n^2\tan\dfrac{\pi}{2^n}\sin(n!)$ 的敛散性.

证明

记 $a_n=n^2\tan\dfrac{\pi}{2^n}\sin(n!)$，则 $|a_n|\leq n^2\tan\dfrac{\pi}{2^n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2\frac{\pi}{2^n}}{n^2\cdot\frac{\pi}{2^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\tan\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=(\tan x)'\Big|_{x=0}=1.$

所以 $\sum n^2\tan\dfrac{\pi}{2^n}$ 与 $\sum n^2\cdot\dfrac{\pi}{2^n}$ 收敛性相同，利用方根判别法计算出 $\sqrt[n]{n^2\cdot\dfrac{\pi}{2^n}}=(\sqrt[n]{n})^2\cdot\sqrt[n]{\pi}\cdot\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$，因此由收敛链倒推可知 $\sum a_n$ 收敛.

✍ **练习 4.21** 设 $a\neq0,p\in R$, 讨论 $\sum\dfrac{1}{a^nn^p}$ 的敛散性.

证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{a^nn^p}\right|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{|a|}\cdot\dfrac{1}{(\sqrt[n]{n})^p}\to\dfrac{1}{|a|}$，可知当 $|a|>1$ 时原级数收敛，而 $0<|a|<1$ 时原级数发散（这两种情况下 p 可任取），而当 $a=1$ 时，原级数退化为 p 级数，当 $p>1$ 时收敛，$p\leq1$ 发散，当 $a=-1$ 退化为交错 p 级数，当 $p>0$ 条件收敛，$p\leq0$ 时发散.

✍ **练习 4.22** 设 $a>0$，则级数 $\sum(-1)^n\dfrac{a+n}{n^2}$

1. 发散
2. 绝对收敛
3. 条件收敛
4. 收敛与发散与 a 有关

证明 该级数条件收敛，设 $a_n=(-1)^n\dfrac{a+n}{n^2}$，则 $|a_n|=\dfrac{a+n}{n^2}$，不难证明 $\{a_n\}$ 单调减且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，因此原级数条件收敛，容易证明 $|a_n|$ 的敛散性与 $\dfrac{1}{n}$ 一致，因此原级数条件收敛。，

✍ **练习 4.23** 设 $\lambda>0$，$\sum a_n^2$ 收敛，则 $\sum(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

1. 发散
2. 绝对收敛
3. 条件收敛
4. 收敛与发散与 λ 有关

证明 利用基本不等式 $(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\leq\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2+\lambda}\right)$，不等式后面的级数收敛，因此前面的级数也收敛.

✍ **练习 4.24** 设 $0<a_n<\dfrac{1}{n}$，判断下列级数的敛散性.

1. $\sum a_n$
2. $\sum(-1)^na_n$
3. $\sum\sqrt{a_n}$
4. $\sum(-1)^na_n^2$

证明 选项一显然错误，反例 $\sum\dfrac{1}{n\ln n}$，选项二也可以构造出反例 $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{5}-\cdots\right)$，三四选项应该也是错的.

✍ **练习 4.25** $\sum u_n$ 收敛，下列级数收敛的有

1. $\sum(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$
2. $\sum u_n^2$
3. $\sum(u_{2n-1}-u_{2n})$
4. $\sum(u_n+u_{n+1})$

证明 选项一显然错误，反例 $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\ln(n+1)}$，选项二反例为 $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，选项三反例 $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$，选

项四是正确的.

✍ **练习 4.26** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则 $\sum(-1)^n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

1. 发散
2. 绝对收敛
3. 条件收敛
4. 不确定

证明 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$

✍ **练习 4.27** 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}$ 绝对收敛. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明 由于级数 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$ 收敛，因此 $\{S_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 收敛，$\{a_n\}$ 有界，设 $|a_n|\le M,\forall n=1,2,\cdots$ 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_nb_n|\le M\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|<+\infty$，所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛

✍ **练习 4.28** 设 $\{na_n\}$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 收敛.

证明 法 1:$\{na_n\}$ 收敛 $\implies na_n$ 有界，设 $|na_n|\le M,\forall n\in N^*,|a_n|\le\frac{M}{n}$，因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{M^2}{n^2}<+\infty$. 法 2: 使用比较判别法.

> **定理 4.3**
>
> 设 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)|\le h,\forall x\in[a,b]$，其中 $h\in(0,1)$ 为常数，设 $a\le f(x)\le b,\forall x\in[a,b]$，令 $u_n=f(u_{n-1}),n=1,2,\cdots,u_n\in[a,b]$，证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛.

证明 设 $n\ge1,|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=|u_n-u_{n-1}||f'(c)|\le|u_n-u_{n-1}|h,c\in[a,b]$. 令 $v_b=|u_{n+1}-u_n|,n=0,1,\cdots$ 则 $v_n\le v_0h^n,\forall n\in N^*$，$\therefore\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\le\sum_{n=0}^{+\infty}v_0h^n<+\infty$，$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛，并且还单调，因此绝对收敛.

✍ **练习 4.29** 设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$ 证明 $\{a_n\}$ 收敛并且 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

证明 首先由均值不等式 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\ge1$，因此该数列有下界 1，因此 $a_n\ge\frac{1}{a_n}\implies a_n\ge\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2a_n}=a_{n+1}$，由于数列单调递减且有下界，因此 $\{a_n\}$ 收敛.

原级数各项 $0\le\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\le a_n-a_{n+1}$，因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to+\infty}(a_1-a_{n+1})=1<+\infty$

✍ **练习 4.30** 考虑方程

$$x^n-nx-1=0 \tag{4.1}$$

其中 $n\in N^*$, 证明该方程有唯一的正根 x_n 并且当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

证明 可知 $f(0)=-1,f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^n$ 并且 $f'(x)=nx^{n-1}+n>0,\forall n\in N^*$，即 $f(x)$ 单调增，所以在 $\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 即 $(0,1)$ 中至多有 1 个解. 之后根据 p 级数的性质即可得到收敛结果.

✍ **练习 4.31** 设 $f:[0,1]\to R$ 二阶可导，f'' 连续，$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证明 f 连续，$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$，并且 $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$，利用微分中值定理 $f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x=(f'(\xi)-f'(0))x=f''(\eta)\xi x^2$，因此 $\exists M,\ni|f(x)|\le Mx^2$，且 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{M}{n^2}$，则结论不难证明.

4.4 幂级数

定义 4.7 (幂级数的定义)

设 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots, x_0 \in R$，称

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in R$$

是以 x_0 为心的幂级数.

♣

定理 4.4 (Abel 定理)

$\exists 0 \leq R \leq +\infty$，

1. 如果 $R = 0$，则该级数只在 $x = x_0$ 处收敛.
2. 如果 $R = +\infty, \forall x \in R$，该级数在 x 点都收敛.
3. 如果 $0 < R < +\infty$，
   - 如果 $|x - x_0| < R$，则 $\sum a_n (x - x_0)^n$ 收敛.
   - 如果 $|x - x_0| > R$，则 $\sum a_n (x - x_0)^n$ 发散.
   - 如果 $|x - x_0| = R$，则 $\sum a_n (x - x_0)^n$ 可能收敛，也可能发散.

其中 R 被成为收敛半径，$(x_0 - R, x_0 + R)$ 叫收敛区间或收敛域，如果端点处收敛则需要加上端点处.

♡

定理 4.5 (Abel 定理判别幂级数敛散性)

设 $a_n \to R, n = 0, 1, 2, \cdots, x_0 \in R$, 则

1. 如果 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ 无界，则 $\forall x \in x_0, \sum a_n (x - x_0)^n$ 发散.
2. 如果 $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$，则 $\forall x \in R, \sum a_n (x - x_0)^n$ 绝对收敛.
3. 设 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 有界，$\lambda = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$，记 $R = 1/\lambda$, 则
   (a). 如果 $|x - x_0| < R$，则 $\sum a_n (x - x_0)^n$ 绝对收敛.
   (b). 如果 $|x - x_0| > R$，则 $\sum a_n (x - x_0)^n$ 发散.
   (c). 如果 $|x - x_0| = R$，则 $\sum a_n (x - x_0)^n$ 可能收敛也可能发散.

♡

证明 记 $b_n = a_n (x - x_0)^n, n = 0, 1, 2, \cdots$,

证明第一种情况，设 $x \neq x_0$，下面证 $b_n \nrightarrow 0$. 反证，假设 $b_n \to 0$，则 $\{b_n\}$ 有界. 设 $|b_n| \leq M, \forall n = 1, 2, \cdots, M > 0$，则 $\sqrt[n]{|b_n|} \leq M^{\frac{1}{n}}$，即 $\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| \leq M^{\frac{1}{n}} \leq C$，则 $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{M^{\frac{1}{n}}}{|x - x_0|}$，与题设矛盾.

证明第二种情况 $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| \to 0$，由方根判别法，原级数绝对收敛.

证明第三种情况的第一条，设 $|x - x_0| < R$，则 $\overline{\lim}_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim}_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| \right) = \dfrac{|x - x_0|}{R} < 1$，记 $\rho = \overline{\lim}_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|b_n|}, 0 \leq \rho < 1, \rho < \dfrac{\rho + 1}{2} < 1$，则 $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|b_k|} = \rho < \dfrac{\rho + 1}{2}. \exists N \in N^*, \ni \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|b_k|} \leq \dfrac{\rho + 1}{2}, \forall n \geq N$, 则 $\sqrt[k]{|b_k|} \leq \dfrac{\rho + 1}{2}, \forall k \geq N$，即 $|b_k| \leq \left(\dfrac{\rho + 1}{2} \right)^k, \forall k \geq N$，所以 $\sum |b_n|$ 收敛.

证明第三种情况中的第二条，反证法：设 $b_n \to 0, |b_n| \leq M$, 则 $\sqrt[n]{|b_n|} \leq M^{\frac{1}{n}}, \overline{\lim}_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \leq \overline{\lim}_{n \to +\infty} M^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} M^{\frac{1}{n}} = 1$，与假设矛盾.

证明第三种情况中的第三条，举例：$\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n + 1} (x - x_0)^n, \lambda = \overline{\lim}_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n + 1}} = 1$，即 $R = 1$，如果 $x - x_0 = 1$ 则该级数发散，如果 $x - x_0 = -1$ 则该级数收敛.

定理 4.6 (比率判别法)

设 $a_n \neq 0, n = 0, 1, 2, \cdots$，如果 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$，则 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

证明 设 $x \neq x_0$，则

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-x_0| = \frac{|x-x_0|}{R}$$

则当 $|x-x_0| < R$ 时该级数绝对收敛，而 $|x-x_0| > R$ 时该级数发散.

比如对 $e^x, x \in R$ 使用泰勒展开，则利用比率判别法可以判断出该级数绝对收敛.

练习 4.32 已知 $\sum a_n(x-1)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛，在 $x = 2$ 处发散，求收敛域.

证明 [解答] 收敛域为 $[0, 2)$，只需要针对 $|x-1| > 1, |x-1| = 1$ 和 $|x-1| < 1$ 三种情况分类讨论即可.

练习 4.33 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n!}x^n$ 的收敛域.

证明 [解答] 令 $a_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n!}$，利用比率判别法 $\lim\limits_{n \to +\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$，则该级数对于任意 $x \in R$ 都收敛.

练习 4.34 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛半径.

证明 [解答] 令 $a_n = \dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$，利用方根判别法 $\lim\limits_{n \to +\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}} = \dfrac{3}{1} = 3 = \lambda$，因此收敛半径 $R = 1/\lambda = \dfrac{1}{3}$.

练习 4.35 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域.

证明 [解答] 在上一问中我们已经求出收敛半径 $R = \dfrac{1}{3}$，由此我们只需要验证 $x = \dfrac{2}{3}$ 和 $x = \dfrac{4}{3}$ 处是否收敛. 经过验算发现数列通项在 $x = \dfrac{4}{3}$ 处大于等于 $\dfrac{1}{3n}$，因此该点发散. 而在 $x = \dfrac{2}{3}$ 处级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n+(\frac{2}{3})^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{1}{n}$，拆出来的两个级数均收敛，因此原级数收敛. 则收敛域为 $\left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

练习 4.36 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}(x-1)^{2n}$ 的收敛半径.

证明 [解答] 令 $y = (x-1)^2$，则原级数转化为关于 y 的级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}y^n$，使用比率判别法 $\lim\limits_{n \to +\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$，因此关于 y 的收敛半径 $R_f = 1/\lambda = 2$，原级数的收敛半径就是 $R_x = \sqrt{R_y} = \sqrt{2}$.

练习 4.37 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}(x-1)^{2n}$ 的收敛域.

证明 [解答] 现在只需要验证 $x = 1+\sqrt{2}$ 或 $1-\sqrt{2}$ 两点上数列的敛散性，则原级数化为 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}2^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n$ 发散，因此收敛域为 $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

练习 4.38 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛半径.

证明 [解答] 利用方根判别法 $\overline{\lim}_{n \to +\infty}\sqrt[n]{\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}} = \overline{\lim}_{n \to +\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 4$，则 $R = \dfrac{1}{4}$.

命题 4.18

已知 $a_n \in R, n = 1, 2, \cdots, \lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n-1} = a, \lim\limits_{n \to +\infty} = b, b > a$，证明 $\overline{\lim}_{n \to +\infty} a_n = b$.

证明 设 $\varepsilon > 0, \exists N_1 \in N^*, \ni a_n \leq b+\varepsilon, \forall n \geq N_1$, 因此 $\sup_{k \geq n} a_k \leq b+\varepsilon, \forall n \geq N$，$\overline{\lim}_{n \to +\infty}\sup_{k \geq n} a_k \leq b+\varepsilon$. 又 $\exists N_2 \in N^*, \ni a_{2n} > b-\varepsilon, \forall n \geq N_2$，当 $n \geq 4N_2$ 时 $\sup_{k \geq n} a_k \geq b-\varepsilon$，因为至少有一项 $a_{4N_2} > b-\varepsilon$, 所以 $b-\varepsilon \leq \overline{\lim}_{n \to +\infty}\sup_{k \geq n} a_k$，因此 $\overline{\lim}_{n \to +\infty}\sup_{k \geq n} a_k = b$.

第五章 函数的极限

定义 5.1 (邻域与去心邻域)
设 $x_0 \in R, \varepsilon > 0, (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$称为$x_0$ 的 $\varepsilon -$ 邻域，而 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$称为$x_0$ 的去心邻域

定义 5.2 (聚点的定义)
设 $A \subseteq R, x_0 \in R$, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \ni A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}) \neq \emptyset$，称 x_0 是 A 的聚点.

练习 5.1 设 $a, b \in R, a < b, (a, b)$ 的所有聚点构成的集合为 $[a, b]$.

练习 5.2 N^* 的所有聚点构成的集合为 $\emptyset$.

练习 5.3 Q 为有理数集，则其聚点为 R.

练习 5.4 设 $A \subseteq R, x_0 \in R$ 是 A 的聚点，则 $\exists x_n \in A \backslash \{x_0\}, \ni x_n \to x_0$.

证明 由定义，$\forall n \in N^*, A \cap \left(\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \backslash \{x_0\}\right) \neq \emptyset$，设 $x_n \in \left(\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \backslash \{x_0\}\right)$. 则 $x_n \in A, x_n \neq x_0, n = 1, 2, \cdots$，并且 $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$，即 $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$ 由夹逼定理 $x_n \to x_0$.

定义 5.3 (集合的孤立点)
设 $A \subseteq R, x_0 \in A$. 如果 $\exists \varepsilon > 0, \ni A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0\}$，称 x_0 是 A 的孤立点.

练习 5.5 判断孤立点

1. Q 是有理数集，$x_0 \in Q$.
2. $x_0 \in N^*, x_0$ 是 N^* 的孤立点.
3. $A = (1, 2) \cup \{3\}$.
4. 设 $A \subseteq R, x_0 \in R, x_0$ 要么是 A 的聚点，要么是 A 的孤立点.
5. 设 $A \subseteq R, x_0 \in A, x_0$ 要么是 A 的聚点，要么是 A 的孤立点.

练习 5.6 设 $A \subseteq R$ 有聚点，则 A 为无限集，试证明之.

证明

5.1 函数极限的定义

定义 5.4 (函数极限)
设 $f : A \subseteq R, x_0$ 是 A 的聚点, 设 $a \in R$. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni |f(x) - a| < \varepsilon, \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\})$,
称 a 是 f 在 x_0 点的极限.

这个定义描述的是当自变量 $x \to x_0, x \neq x_0$ 时，$f(x) \to a$，函数值的变化趋势.

练习 5.7 设 $f(x) = x^\alpha, x > 0$，其中 $\alpha > 0$.

证明 设 $\varepsilon > 0$, 令 $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, 则 $|f(x) - 0| < \varepsilon, \forall x \in (0, \delta)$

练习 5.8 设 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$，则 f 在 $x = 0$ 点的极限不存在.

证明 设 $\varepsilon > 0$，令 $\delta = \varepsilon$，则 $|f(x) - 0| = |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| < \varepsilon, \forall x \in (-\delta, \delta) \backslash \{0\}$，所以 $\cdots$.

命题 5.1 (函数极限的唯一性)
设 $f : A \subseteq R \to R, x_0$ 是 A 的聚点，如果 a, b 都是 f 在 x_0 点的极限，则 $a = b$

证明 设 $\varepsilon>0,\exists\delta_1,\delta_2,\ni$

$$|f(x)-a|<\varepsilon,\forall x\in A\cap((x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\setminus\{x_0\})$$

$$|f(x)-b|<\varepsilon,\forall x\in A\cap((x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)\setminus\{x_0\})$$

令 $\delta=max\{\delta_1,\delta_2\}$，则

$$|f(x)-a|<\varepsilon,|f(x)-b|<\varepsilon,\forall x\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})$$

因为 x_0 是 A 的聚点，所以 $A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})\neq\emptyset$，设 $x_1\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})$，则 $|a-b|\le|f(x_1)-a|+|f(x_2)-b|\le2\varepsilon$，因此 $|a-b|\le2\varepsilon,\forall\varepsilon>0$，所以 $a=b$.

设 f 在 x_0 点有极限，用 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 表示 f 在 x_0 的极限，如果 $a=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 则 $f(x)\to a$, 当 $x\to x_0$ 时 $(x\neq x_0)$.

定义 5.5 (函数连续的定义)

设 $f:A\subseteq R\to R,x_0\in A$，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\forall x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 称 f 在 x_0 点连续.

♣

命题 5.2 (函数连续性与极限)

设 $f:A\subseteq R\to R,x_0\in A$

1. 如果 x_0 是 A 的孤立点，则 f 在 x_0 点连续.
2. 如果 x_0 是 A 的聚点，则 f 在 x_0 连续 $\Longleftrightarrow$ $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

♠

证明 首先证明 1, 设 $\varepsilon>0$, 因为 x_0 是 A 的孤立点, $\exists\delta>0,\ni A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x_0\}$, 则当 $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $x=x_0$，$|f(x)-f(x_0)|=|f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon$.

接下来证明 2，首先证明充分性，设 $\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\forall x\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})$，则 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\forall A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

最后证明必要性，设 $\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\forall x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$，则 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\forall x\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})$.

5.2 函数极限与数列极限

命题 5.3 (函数极限与数列极限的关系)

设 $f:A\subseteq R\to R,x_0$ 是 A 的聚点，$a=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，设 $x_n\in A\setminus\{x_0\},n=1,2,\cdots,x_n\to x_0$，则 $f(x_n)\to a$.

♠

证明 设 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得

$$|f(x)-a|<\varepsilon,\forall x\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})\tag{5.1}$$

因为 $x_n\to x_0$, 所以 $\exists N\in N^*,\ni x_n\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\forall n\ge N$，则 $x_n\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}),\forall n\ge N$，因此由 (5.1) 式 $|f(x_n)-a|<\varepsilon,\forall n\ge N$，所以 $f(x_n)\to a$

命题 5.4 (Heine 归结原理)

设 $f:A\subseteq R\to R,x_0$ 是 A 的聚点，如果对于任意 $x_n\in A\setminus\{x_0\},n=1,2,\cdots,x_n\to x_0$ 都有 $\{f(x_n)\}$ 收敛，f 在 x_0 点有极限.

♠

证明 因为 x_0 是 A 的聚点，$\exists x_n\in A\setminus\{x_0\},n=1,2,\cdots,x_n\to x_0$. 由命题假设,$\{f(x_n)\}$ 收敛，记 $a=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_0)$.

下面证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$. 反证法：假设 a 不是 f 在 x_0 点的极限. 则 $\exists\varepsilon>0$, 使得 $\forall\delta>0,\exists x\in A\cap((x_0-$

$\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}), \ni |f(x)-a| \geq \varepsilon$. 令 $\delta = \frac{1}{n}, n \in N^*$ 则 $\exists y_n \in A \cap \left(\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)\backslash\{x_0\}\right), \ni |f(y_n)-a| \geq \varepsilon$，则 $y_n \in A\backslash\{x_0\}, |y_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies y_n \to x_0, |f(y_n)-a| \geq \varepsilon$，由命题假设得到 $\{f(y_n)\}$ 收敛，设 $f(y_n) \to b$，则 $a \neq b$.

令 $z_{2n} = x_n, z_{2n-1} = y_n$，则 $z_n \in A\backslash\{x_0\}, z_n \to x_0$，由命题 5.4,$\{f(z_n)\}$ 也收敛，设 $f(z_n) \to c$，则 $f(z_{2n}) \to c, f(x_{2n-1}) \to c, c = a, c = b$，矛盾.

命题 5.5

设 $f, g : A \subseteq R \to R, x_0$ 是 A 的聚点，f, g 在 x_0 有极限，如果 $f(x) \leq g(x), \forall x \in A\backslash\{x_0\}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

证明 设 $x_n \in A\backslash\{x_0 x_n \to x_0$，$f(x_n) \leq g(x_n) \implies \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) \implies \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

命题 5.6 (函数的夹逼定理)

设 $f, g, h, A \subseteq R \to R, x_0$ 是 A 的聚点，$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in A\backslash\{x_0\}$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

证明 设 $x_n \in A\backslash\{x_0\}, x_n \to x_0, f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \quad \forall n = 1, 2, \cdots$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n) = a$，由数列极限的夹逼定理，$\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = a$，由 Heine 归结原理得 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

5.3 函数极限的四则运算

命题 5.7 (函数极限的四则运算)

设 $f, g : A \subseteq R \to R, x_0$ 是 A 的聚点,f, g 在 x_0 点有极限，设 $\alpha, \beta \in R$，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \beta \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
3. 如果 $g(x) \neq 0, \forall x \in A\backslash\{x_0\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

5.4 函数极限的柯西收敛原理

命题 5.8 (函数柯西收敛原理)

设 $f : A \subseteq R \to R, x_0$ 是 A 的聚点，则 f 存在 x_0 点有极限当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\})$

证明 首先证明必要性，设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$，设 $\varepsilon > 0$，则 $\delta > 0, \ni |f(z) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall z \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\})$，则 $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - a| + |f(y) - a| \leq \varepsilon, \forall x, y \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\})$.

接着证明充分性，设 $x_n \in A\backslash\{x_0\}, x_n \to x_0$，下面证 $\{f(x_n)\}$ 收敛，根据数列极限的柯西收敛原理，只需要证 $\{f(x_0)\}$ 是柯西列. 设 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\})$. 因为 $x_n \to x_0, \exists N \in N^*, \ni |x_n - x_0| < \delta, \forall n \geq N$，设 $m, n \geq N$ 时，$x_m, x_n \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\})$，所以 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$，则 $\{f(x_0)\}$ 是柯西列.

练习 5.9 计算极限:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - cos^3 x}{x \ln(1 + 2x)} = \frac{3}{4}$

定义 5.6

设 $f:A\subseteq R\to R, x_0$ 是 A 的聚点，如果 $\forall M>0,\exists\delta>0,\ni f(x)>M,\forall x\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\})$，称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 趋于正无穷，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

练习 5.10 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}, x\in(0,+\infty)$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

证明 设 $M>0$, 令 $\delta=\dfrac{1}{\max\{\ln M,1\}}$，则 $f(x)>M,\forall x\in(0,\delta)$.

定义 5.7

设 $f:A\subseteq R\to R, x_0$ 是 A 的聚点，如果 $\forall m<0,\exists\delta>0,\ni f(x)<m,\forall x\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\})$，称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 趋于负无穷，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \iff \lim\limits_{x\to x_0}(-f)(x)=+\infty$.

定义符号函数 $H(x)$ 或 $Sgn(x)$ 为

$$H(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

该函数在 $x\to 0$ 处的左极限为 -1，右极限为 $+1$，下面我们来严格定义左极限和有极限，即单边极限。

5.5 函数的单边极限

定义 5.8 (函数的限制)

$f:A\to B, C\subseteq A, C\neq\emptyset, f\big|_C:C\to B, f\big|_C(x)=f(x), x\in C$，称 $f\big|_C$ 为 f 在 C 上的限制.

定义 5.9 (函数的左极限)

设 $I\subseteq R$ 为开区间，$x_0\in I$, $f:I\to R$，如果 $a=\lim\limits_{x\to x_0} f\big|_{I\cap(-\infty,x_0)}$, 称 a 是 f 在 x_0 点的左极限，记 $a=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$

上面的定义表示当 $x\to x_0$ 且 $x<x_0$ 时 $f(x)\to a$，也就是 $f(x)$ 越来越像 a。下面用 $\varepsilon-\delta$ 语言来重写上面的定义.$a=f(x_0^-)\iff\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni|f(x)-a|<\varepsilon,\forall x\in I\cap(x_0-\delta,x_0)$。同理可以定义函数的右极限。

定义 5.10 (函数的右极限)

设 $I\subseteq R$ 为开区间，$x_0\in I$, $f:I\to R$，如果 $a=\lim\limits_{x\to x_0} f\big|_{I\cap(x_0,+\infty)}$, 称 a 是 f 在 x_0 点的右极限，记 $a=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$

命题 5.9

设 $I\subseteq R$ 为开区间. $f:I\to R, x_0\in I$，下列结论等价：

1. f 在 x_0 点有极限.
2. f 在 x_0 点有左极限和右极限，且 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$, 并且当 f 在 x_0 点有极限时 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0^-)=f(x_0^+)$.

练习 5.11

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

证明：f 在 $x=0$ 点无极限.

证明 $f(0^-)=0, f(0^+)=1$，因为 $f(0^-)\neq f(0^+)$，因此 f 在 $x=0$ 点无极限.

借助函数的左右极限，我们可以通过更简单的办法来证明函数连续。设 $f:I\to R, I\subseteq R$ 为开区间，$x_0\in I$，则 f 在 x_0 点连续 $\iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff f$ 在 x_0 点有作右极限，$f(x_0)=f(x_0^-)=f(x_0^+)$.

定义 5.11 (不连续点)

设 f 在 x_0 点不连续:

1. $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 存在，$f(x_0^+)=f(x_0^-)\neq f(x_0)$，称 x_0 为可去间断点.
2. $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 存在，$f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$，称 x_0 为跳跃间断点.
3. $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0^+)$ 不存在，称 x_0 为本性不连续点.

5.6 洛必达法则

命题 5.10 (L' Hospital)

设 $f,g:(a,b)\to R$ 可导，且 $g(x), g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$. 如果

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha\in[-\infty,+\infty]$

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$.

证明 定义 $f(a)=g(a)=0$, 则 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，设 $x\in(a,b)$，则

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\xi\in(a,x)$$

我们将以上这种形式的洛必达法则称为“$\dfrac{0}{0}$ 型”的洛必达法则，下面还有“$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型”。

命题 5.11

设 $f,g:(a,b)\to R$ 可导，且 $g(x), g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$. 如果

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha\in[-\infty,+\infty]$

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$.

由于该形式的洛必达法则证明起来比较啰嗦，故在此不作证明.

练习 5.12 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，证明: $a\overline{IA}+b\overline{IB}+c\overline{IC}=0$.

5.7 无穷大与无穷小

定义 5.12 (正无穷的函数极限)

设 $f:(a,+\infty)\to R$, 设 $A\in R$，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\ni|f(x)-A|<\varepsilon,\forall x\geq M$，称 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

定义 5.13 (正无穷时函数发散)

设 $f:(a,+\infty)\to R$, 如果 $\forall M>0,\exists N>0,\ni f(x)>M,\forall x\geq N$，称 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 若 $\ni f(x)<-M,\forall x\geq N$，称 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

定义 5.14 (无穷小量)

设 $f,g:A\subseteq R\to R,x_0$ 是 A 的聚点，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是一个无穷小量，记为 $f(x)=\circ(1)$，当 $x\to x_0$ 时.

定义 5.15 (各阶无穷小量)

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,

1. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量. 记作 $f(x)=\circ(g(x))$, 当 $x\to x_0$ 时.
2. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小量.
3. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小量.

一些常用的等价无穷小量的例子：
当 $x\to 0$ 时

1. $\sin x\sim x$
2. $\tan x\sim x$
3. $\arcsin x\sim x$
4. $\arctan x\sim x$
5. $\ln(1+x)\sim x$
6. $e^x-1\sim x$
7. $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
8. $(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x$
9. $\sqrt{1+x}\sim 1+\frac{1}{2}x$

练习 5.13 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|\sin x|+2x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

判断 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在.

证明 $f(0-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin x+2x}{x}=-1+2=1,f(0+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x+2x}{x}=1+2=3$，左右极限不相等，因该极限不存在.

练习 5.14 设 $f(x)=k\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+|x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，求 k.

证明 $f(0+)=\dfrac{\pi}{2}k+2=f(0-)=-\dfrac{\pi}{2}k$ 解得 $k=\dfrac{2}{\pi}$.

练习 5.15 设 $f(x)=\dfrac{1-2^{f\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$，判断 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在.

证明 令 $t=\dfrac{1}{x-1}$，则 $f(1+)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-2^t}{1+2^t}=-1$ 而 $f(1-)=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1-2^t}{1+2^t}=1$.

练习 5.16 设 $f:R\to R$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{\ln^4 x}=-2,f(1)=3$，问 $x=1$ 是否为 f 的极值点.

证明 是 f 的极大值点，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\ln^4 x}=-2<0$，因此 $\exists\delta>0,\ni\dfrac{f(x)-f(1)}{\ln^4 x}<0,\forall 0<|x-1|<\delta, f(x)-f(1)<0,\forall 0<|x-1|<\delta$.

练习 5.17 设 $f:R\to R$ 可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^3}=-2$，讨论 $x=0$ 是否为 f 的极值点.

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^4}=-2<0$，因此 $\exists\delta>0,\ni\dfrac{f(x)-f(0)}{x^4}<0,\forall 0<|x|<\delta$，即 $f(x)-f(0)<0,\forall 0<|x|<\delta$，所以 $x=0$ 是极大值点.

练习 5.18 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\arctan^2 x}$

证明 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x\arctan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

练习 5.19 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$.

练习 5.20 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\ln(1-x)}}=\sqrt{e}$

练习 5.21 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\sqrt{e}$

练习 5.22 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+1}{x-1}-2x\right)=5$

练习 5.23 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)=2$

练习 5.24

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ax+e^{2x}-1}{x}, & x<0\\ \frac{b\arctan x+\ln(1-x)}{x}, & x>0\\ 4, x=0\end{cases}$$

已知该函数连续，则易求 $a=2,b=5$.

练习 5.25 已知

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,-1,1\\ 0, & x=0,1,-1\end{cases}\tag{5.2}$$

求 f 的间断点并分类。

证明 $x=0-1$ 处是本性间断点，$x=1$ 是可去间断点.

练习 5.26 已知

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln|x|}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,-1,1\\ 0, & x=0,1,-1\end{cases}\tag{5.3}$$

求 f 的间断点并分类。

证明 $x=1-1$ 处是可去间断点，$x=0$ 是本性间断点.

练习 5.27 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin 2x)^{\ln(1-x)}-1}{x^2}=-2$

练习 5.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x\arcsin 2x)^x-1}{x^3}=-2$

练习 5.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=-2$

练习 5.30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)}{x^2}=\dfrac{1}{6}$

练习 5.31 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^{2x}}-e}{x}=2e$

第六章 函数与多项式

设 $f:(a,b)\to R$，n 次可导，$x_0\in(a,b)$。

问题：求多项式 P，$\deg P=n$.

多项式需要满足 $P^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0),k=1,2,\cdots,P^{(0)}=P,f^{(0)}=f$，则

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

并且在 x_0 点附近时，$P(x)=f(x)$.

$$P(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots+C_n(x-x_0)^n$$

其中 $P^{(k)}(x_0)=k!C_k=f^{(k)}(x_0),C_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

6.1 泰勒展开

定理 6.1 (泰勒展开式)

设 $f:(a,b)\to R$，n 阶可导,$n\in N^*,x_0\in(a,b)$ 则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+h(x)(x-x_0)^n,\quad x\in(a,b)$$

其中 $h:(a,b)\to R$ 连续，$h(x_0)=0$，这个式子叫做 Taylor 展开式，最后的余项 $h(x)(x-x_0)^n$ 的无穷小量阶数为 $o(|x-x_0|^n)$，称为 Peano 余项.

当 $n=1$ 时，泰勒展式就是导数的定义，$n>1$ 时可以认为是高阶导数的定义。

证明 记 $R(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$，$x\in(a,b)$，$R$，n 阶可导，因此 R 的 k 阶导为

$$R^{(k)}(x_0)=0\qquad 0\le k\le n$$

现在需要计算 $R(x)$ 与 $(x-x_0)^n$ 作比在 x_0 处的极限，应用洛必达法则：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n-1)}(x)-R^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}=\frac{R^{(n)}(x_0)}{n!}=0$$

因此我们只需要定义 $h(x)$ 为如下分段函数即可：

$$h(x)=\begin{cases}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}, & x\neq x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases}$$

下面计算一下常见函数的泰勒展开式：

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(|x|^n), \quad x \to 0 \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \circ(x^{2n}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n), \quad -1 < x < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \circ(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})
\end{aligned}
$$

定理 6.2

设 $f:(a,b)\to R$，n 阶可导,$n\in N^*, x_0\in(a,b)$ 则

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x\in(a,b)
$$

其中 $\xi = (1-\theta)x_0 + \theta x, \quad \theta\in(0,1)$，最后的余项叫 Lagrange 余项.

证明 $R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$，$R\, n$ 阶可导，$R^{(k)} = 0, 0\le k\le n-1$，且 $R^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$，利用柯西中值定理

$$
\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{R(x)-R(x_0)}{(x-x_0)^n-(x_0-x_0)^n} = \frac{R(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}} = \frac{R'(\xi_1)-R'(x_0)}{n\left[(\xi_1-x_0)^{n-1}-(x_0-x_0)^{n-1}\right]} = \cdots =
$$

$$
\frac{R^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1}-x_0)} = \frac{R^{(n)}(\xi_n)}{n!} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}
$$

当 $n=1$ 时 $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$，当 $n=2$ 时 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$. 可以利用展开式来判断大小：

练习 6.1 证明：$x > \sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x > 0.$

证明 $x > \sin x$ 在 $x>0$ 时显然成立，$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ 读者构造函数求导自证不难.

练习 6.2 计算 $(1+x)^a$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开式.

证明 [解答] $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a!}{(a-n)!n!}x^n$