预科二下学期数学

陈虎民班

干佳禾　编

自动化钱2501

前言

此份资料是根据陈虎民老师班的上课笔记整理而来，与王立周班讲义有所区别，故可与王立周班讲义配套食用，期末考试有考察两班讲义有所区别之处。此份资料可能存在诸多错误，欢迎大家指正。

干佳禾

2025年8月

Contents

Chapter 1

数列极限

1.1 有界/无界数列

定义1.1.1（有界数列）： 任意数列$\{a_n\}$,若$\exists M > 0$,使得$\forall n$,都有$|a_n| \leq M$,则称数列$\{a_n\}$为有界数列

定义1.1.2（无界数列）： 任意数列$\{a_n\}$,若$\forall M > 0$,使得$\exists N$,都有$|a_N| > M$,则称数列$\{a_n\}$为无界数列

例1： 数列$\{x_n\} = (1 + \frac{1}{n})^n$,求证$\{x_n\}$有界

解：

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 3
\end{aligned}$$

例2： 求证$d_n = n \cdot sin\frac{n\pi}{2}$无界

证明：取$n = 2k + 1$（$k \in \mathbb{N}$ ），则：

$$|d_{2k+1}| = \left|(2k+1) \cdot \sin\frac{(2k+1)\pi}{2}\right| = |2k+1|$$

若$\{d_n\}$有界，则$\exists M>0$，$\forall n$有$|d_n|\le M$ ，但$|2k+1|\le M$无法对所有k成立，故$\{d_n\}$无界。

例3： 求证：$\{x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\}$无界

证明：取$n=2^{2N}$（$N\in\mathbb{N}$ ），则

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{2N}}\right)$$
$$>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{2N-1}\cdot\frac{1}{2^{2N}}=N$$

不存在一个M，使得$\forall N, N<M$

1.2 无穷小数列

定义1.2.1（无穷小数列）： 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|x_n|<\varepsilon$ ，则称$\{x_n\}$为无穷小数列。

例1： 设$|a|>1$，证明$\{x_n=\frac{1}{a^n}\}$是无穷小数列

证明：$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon(|a|-1)}\right]+1$,使得n>N时，有

$$|\frac{1}{a^n}|=\frac{1}{|a|^n}=\frac{1}{(1+|a|-1)^n}<\frac{1}{n(|a|-1)}<\varepsilon$$

例2： 若$|a|>1$，证明$x_n=\frac{n}{a^n}$（$n=1,2,\cdots$ ）是无穷小数列

证明：$\forall n\ge 2, N\in\mathbb{N}$

$$\left|\frac{n}{a^n}\right|=\frac{n}{r^n}\le\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(r-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(r-1)^2}$$

取$N=\left\lfloor\frac{2}{\varepsilon(r-1)^2}\right\rfloor+2$，则$n>N$时：

$$\frac{2}{(n-1)(r-1)^2}<\varepsilon$$

引理1： 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是实数列，且$\exists N_0$，当$n>N_0$时，$|x_n|\le|y_n|$。若$\{y_n\}$是

无穷小数列，则$\{x_n\}$也是无穷小数列。

证明：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1$，当$n > N_1$时，$|y_n| < \varepsilon$ 。

取$N = \max\{N_0, N_1\}$，当$n > N$时，$|x_n| \leq |y_n| < \varepsilon$ ，故$\{x_n\}$是无穷小数列。

引理2：设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是有界数列，则$\{x_n y_n\}$，$\{x_n \pm y_n\}$也是有界数列。

1.3 无穷小数列的性质

性质1:两个无穷小数列的和、差、乘积仍为无穷小数列。

性质2:无穷小数列是有界数列。

证明：取$\varepsilon = 1$，因$\{x_n\}$是无穷小数列，$\exists N$，当$n > N$时，$|x_n| < 1$ 。

令$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1\}$，则$\forall n$，$|x_n| \leq M$ ，故$\{x_n\}$有界。

性质3:无穷小数列与有界数列的乘积也是无穷小数列。

证明：对$\forall \varepsilon > 0$，由$\{x_n\}$是无穷小数列，$\exists N_1$，当$n > N_1$时，$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

且有$|y_n| \leq M$，$\forall n$ 。此时，当$n > N_1$时：

$$|x_n y_n| \leq |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

故$\{x_n y_n\}$是无穷小数列。

性质4:若$\{x_n\}$是无穷小数列，则$\{|x_n|\}$也是无穷小数列。

例1：设$b > 1$，k是给定的自然数，证明$x_n = \frac{n^k}{b^n}$是无穷小数列

证明：令$a = b^{\frac{1}{k}} > 1$，则$b^n = (a^k)^n = a^{kn}$，于是：

$$x_n = \frac{n^k}{b^n} = \left(\frac{n}{a^n}\right)^k$$

例2：设$c > 0$，证明$y_n = \frac{c^n}{n!}$是无穷小数列

证明：取正整数m，使$m > c$，则当$n > m$时：

$$\frac{c^n}{n!} = \frac{c^m}{m!} \cdot \frac{c}{m+1} \cdot \frac{c}{m+2} \cdot \cdots \cdot \frac{c}{n} < \frac{c^m}{m!} \cdot \left(\frac{c}{m}\right)^{n-m}$$

因$0<\frac{c}{m}<1$，$\left\{\left(\frac{c}{m}\right)^{n-m}\right\}$是无穷小数列，$\frac{c^m}{m!}$是常数，故$\{\frac{c^n}{n!}\}$是无穷小数列。

例3： 设$\{x_n\}$是无穷小数列，证明$z_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$是无穷小数列

证明：对$\forall\varepsilon>0$，由$\{x_n\}$是无穷小数列，$\exists m\in\mathbb{N}$，当$n>m$时，$|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$。

将z_n拆分为两部分：

$$z_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}+\cdots+x_n}{n}=\frac{x_1+\cdots+x_m}{n}+\frac{x_{m+1}+\cdots+x_n}{n}$$

第一部分：因$x_1,\cdots,x_m$是有限项，$\exists p\in\mathbb{N}$，当$n>p$时，$\left|\frac{x_1+\cdots+x_m}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

第二部分：当$n>m$时，

$$\left|\frac{x_{m+1}+\cdots+x_n}{n}\right|\leq\frac{|x_{m+1}|+\cdots+|x_n|}{n}<\frac{(n-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2}}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

取$N=\max\{m,p\}$，当$n>N$时，两部分均小于$\frac{\varepsilon}{2}$，故：

$$|z_n|\leq\left|\frac{x_1+\cdots+x_m}{n}\right|+\left|\frac{x_{m+1}+\cdots+x_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即$\{z_n\}$是无穷小数列。

例4： 设$\{x_n\}$是无穷小数列，且$x_n>0$，令$y_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，证明$\{y_n\}$是无穷小数列

证明：此题将y_n取对数即可同上题得证。

例5： 证明$x_n=\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$是无穷小数列

证明：因$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$，当$n\geq2$时：

若n为奇数，$n!\geq n^{\frac{n}{2}}$（中间项及之后大于等于$\sqrt{n}$，乘积后下界为$n^{\frac{n}{2}}$）；

若n为偶数，$n!\geq n^{\frac{n}{2}}$（同理，成对相乘后下界为$n^{\frac{n}{2}}$）。

故对$n \geq 2$，$n! \geq n^{\frac{n}{2}}$，即：

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

对$\forall \varepsilon > 0$，取$N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$，当$n > N$时，$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ ，故：

$$\left| \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

即$\{x_n\}$是无穷小数列。

1.4 收敛数列

定义1.4.1（收敛数列）：若数列$\{x_n\}$收敛于常数a，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n > N$时，$|x_n - a| < \varepsilon$ 。

定理1.4.1（夹逼定理）：设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$是实数列，满足$x_n \leq y_n \leq z_n$（n充分大时），且$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$，则$\lim_{n\to\infty} y_n = a$ 。

证明：对$\forall \varepsilon > 0$，由$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\exists N_1$，当$n > N_1$时，$|x_n - a| < \varepsilon$，即$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ 。

由$\lim_{n\to\infty} z_n = a$，$\exists N_2$，当$n > N_2$时，$|z_n - a| < \varepsilon$，即$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ 。

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，当$n > N$时，$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$，即$|y_n - a| < \varepsilon$

故$\lim_{n\to\infty} y_n = a$ 。

定理1.4.2：设$\{x_n\}$是实数列，a为实数，则以下陈述等价：

1. $\{x_n\}$以a为极限；
2. $\{x_n - a\}$是无穷小数列；
3. 存在无穷小数列$\{u_n\}$，使得$x_n = a + u_n$。

证明：

1.→2.用定义

2.→3.令$u_n = x_n - a$，则$\{u_n\}$是无穷小数列，且$x_n = a + u_n$

3.→1.设$x_n = a + u_n$，$\{u_n\}$是无穷小数列，即$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n > N$时，$|u_n| < \varepsilon$ 。

例1：已知$a > 1$，求证$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

证明：令$a_n = \sqrt[n]{a} - 1$，则$a_n > 0$，且$a = (1 + a_n)^n$ 。

由二项式定理，$(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n$，故：

$$a \geq 1 + na_n \implies a_n \leq \frac{a-1}{n}$$

对$\forall \varepsilon > 0$，取$N = \left\lfloor \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$，当$n > N$时：

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = a_n \leq \frac{a-1}{n} < \frac{a-1}{N} \leq \varepsilon$$

故$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 。

例2：求证$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

证明：令$x_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$，则$x_n \geq 0$，且$n = (1 + x_n)^n$ 。

由二项式定理，当$n \geq 2$时：

$$(1 + x_n)^n \geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

故：

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \implies x_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \implies x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

对$\forall \varepsilon > 0$，取$N = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 2$，当$n > N$时：

$$|n^{\frac{1}{n}} - 1| = x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$$

故$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ 。

例3：求证$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}$

证明： $\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,$当$n>N$时，有

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{n^2+n}-n-\frac{1}{2}|=|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{2}|&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\
&=\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}<\frac{1}{2(2\sqrt{n})^2}=\frac{1}{8n}<\frac{1}{n}<\varepsilon
\end{aligned}
$$

例4：已知$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，求证$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$

证明：令$y_n=x_n-a$，则$\{y_n\}$是无穷小数列，故：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right)=a+0=a$$

定理1.4.3（有界性）：收敛数列一定有界

证明：设$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，取$\varepsilon=1$，由极限定义，$\exists N$，当$n>N$时，$|x_n-a|<1$ 。

此时，$|x_n|=|(x_n-a)+a|\le|x_n-a|+|a|<1+|a|$ 。

令$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则$\forall n$，$|x_n|\le M$ ，故$\{x_n\}$有界。

定理1.4.4（极限的四则运算）：设$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim_{n\to\infty}y_n=b$，则：

1. $\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|$

2. $\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$

3. $\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{b}$（$b\neq0$ ）

证明：

1.由三角不等式，$||x_n|-|a||\le|x_n-a|$ 。因$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$ ，故$||x_n|-|a||<\varepsilon$ ，即$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|$ 。

2.$\forall\varepsilon>0$，由$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，$\exists N_1$，当$n>N_1$时，$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ ；

由$\lim_{n\to\infty} y_n = b$，$\exists N_2$，当$n > N_2$时，$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，当$n > N$时：

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$ 。

3.由收敛数列有界性，$\{y_n\}$有界，即$\exists M > 0$，$|y_n| \le M$（$\forall n$ ）。

$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \le |y_n| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|$ 。

对$\forall \varepsilon > 0$，取N使$n > N$时$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$（若$M = 0$，则$y_n \to 0$，单独讨论）且$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$（$a \ne 0$时，$a = 0$时类似），则：

$$|x_n y_n - ab| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$$

故$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$ 。

4. 由$\lim_{n\to\infty} y_n = b \ne 0$，取$\varepsilon = \frac{|b|}{2}$，$\exists N_1$，当$n > N_1$时，$|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$ ，故$|y_n| > \frac{|b|}{2}$ 。

对$\forall \varepsilon > 0$，取N_2，当$n > N_2$时，$|y_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$ 。

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，当$n > N$时：

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{\frac{|b|^2}{2}\varepsilon}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \varepsilon$$

即$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$ 。

例5：求证：当$b > 1$时,$\lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}}$，则当$0 < b < 1$时，$\lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

重要结论（幂根极限结论）$\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$（$c > 0$）

例6：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c+\frac{1}{n}}$（$c>0$ ）

证明：

$$c^{\frac{1}{n}}\le\left(c+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le(c+1)^{\frac{1}{n}}$$

已知$\lim_{n\to\infty}c^{\frac{1}{n}}=1$（$c>0$ ，），$\lim_{n\to\infty}(c+1)^{\frac{1}{n}}=1$ ，由夹逼定理：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c+\frac{1}{n}}=1$$

例7：设数列$\{a_n\}$满足$a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=A$

证明：

1. 当$A\ne0$时：

由基本不等式得：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

记$x_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$，$y_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，$z_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，即$x_n\le y_n\le z_n$。

已知结论：若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=A$。

对于x_n，令$b_n=\frac{1}{a_n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{A}$，根据上述结论：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=\frac{1}{A}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=A$。

对于z_n，令$b_n=a_n$，根据上述结论：

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，即$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = A$。

2. 当$A=0$时：

有$0 < \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} < \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$，由夹逼准则可得：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = 0 = A$$

例8：已知$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，求证$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab$

证明：令$a_n = a+\alpha_n$，$b_n = b+\beta_n$，其中$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$是无穷小数列。

则：

$$a_nb_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$$

由无穷小数列性质可得$\{a_nb_n - ab\}$是无穷小数列，即$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab$ 。

例9：已知$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，定义$c_n = \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$，求证$\lim_{n\to\infty} c_n = ab$

证明：令$a_n = a+\alpha_n$，$b_n = b+\beta_n$（$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$是无穷小数列），则：

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_kb_{n-k+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+\alpha_k)(b+\beta_{n-k+1})$$

展开得：

$$c_n = ab + \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k + \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{n-k+1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}$$

由上例可得，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \to 0$，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{n-k+1} \to 0$。

又$\{\alpha_n\}$有界，设$|\alpha_n| \le M$，则：

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}\right| \le \frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\beta_{n-k+1}| \to 0$$

故$\lim_{n\to\infty} c_n = ab+0+0+0 = ab$ 。

例10：设$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，求证$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$

证明：令$a_n = a+\alpha_n$（$\{\alpha_n\}$是无穷小数列），则：

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \frac{a(1+2+\cdots+n)+(1\cdot\alpha_1+2\cdot\alpha_2+\cdots+n\cdot\alpha_n)}{n^2}$$

因$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$，故：

$$\frac{a\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{a}{2} \quad (n\to\infty)$$

再分析第二部分：由有界性，$|\alpha_n| \le M$，则：

$$\left|\frac{1\cdot\alpha_1+\cdots+n\cdot\alpha_n}{n^2}\right| \le \frac{M(1+2+\cdots+n)}{n^2} = \frac{M\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} \to 0$$

故$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$ 。

定理1.4.5：若$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，且$a<b$，则$\exists N$，当$n>N$时，有$a_n<b_n$ 。

证明：取$\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$，由极限定义：

$\exists N_1$，当$n>N_1$时，$|a_n-a|<\varepsilon$，即$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$ ；

$\exists N_2$，当$n>N_2$时，$|b_n-b|<\varepsilon$，即$b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon$ 。

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时：

$$a_n < a+\varepsilon = a+\frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad b_n > b-\varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

故$a_n<b_n$ 。

逆否命题：若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都收敛，且$a_n\le b_n$，则$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

例11：比较k^n，n^k，$n!$（$k\ge 2$，n充分大时）的大小

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{n!}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{k^n}=0$$

定理1.4.6（单调有界原理）：若数列$\{x_n\}$单调递增且有上界（或单调递减且有下界），则$\{x_n\}$收敛。

证明：设$\{x_n\}$单调递增有上界，由确界原理，$\sup\{x_n\}=a$存在。

对$\forall\varepsilon>0$，因$a-\varepsilon$不是上界，$\exists N$，当$n>N$时，$x_n>a-\varepsilon$ 。

又$\{x_n\}$单调递增且$x_n\le a$，故$a-\varepsilon<x_n\le a<a+\varepsilon$ ，即$|x_n-a|<\varepsilon$ ，故$\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 。

例12：求$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$（$a>0$ ）

解：令$x_n=\frac{a^n}{n!}$，则$x_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a}{n+1}\cdot x_n$ 。

当n充分大时（$n+1>a$ ），$x_{n+1}<x_n$，即$\{x_n\}$从某一项开始单调递减。

又$x_n>0$（有下界），由单调有界准则，$\{x_n\}$收敛。

设$\lim_{n\to\infty}x_n=A$，对$x_{n+1}=\frac{a}{n+1}\cdot x_n$取极限：

$$A=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}\cdot x_n=0\cdot A=0$$

故$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ 。

例13：设$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，证明$\{x_n\}$收敛并求极限

证明：单调性：用数学归纳法证$\{x_n\}$单调递增。

(1)$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=x_1$ 。

(2)假设$x_k>x_{k-1}$，则$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}>\sqrt{2+x_{k-1}}=x_k$ ，故$\{x_n\}$单调递增。

有界性：用数学归纳法证$\{x_n\}$有上界2 。

(1)基例：$x_1=\sqrt{2}<2$ 。

(2)假设$x_k<2$，则$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$ ，故$\{x_n\}$有上界2 。

由单调有界准则，$\{x_n\}$收敛，设极限为A 。

对$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$取极限：

$$A=\sqrt{2+A} \implies A^2-A-2=0 \implies (A-2)(A+1)=0$$

因$x_n>0$，故$A=2$（舍去负根），即$\lim_{n\to\infty} x_n=2$ 。

例14：分析$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的收敛性

证明：单调性：展开$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$和$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$，用二项式定理比较：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k$$

逐项比较系数，可证$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$，即$\{x_n\}$单调递增。

有界性：由前例，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$。

由单调有界准则，$\{x_n\}$收敛，极限为e（自然常数）。

例15：求极限$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$和$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}$

解：对于$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$：令$m=-n$，则$n\to\infty$时$m\to-\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m}=\frac{1}{\lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}=\frac{1}{e}$$

对于$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}$：

$$\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^{4n^3}=\left[\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^{n^3-2}\right]^{\frac{4n^3}{n^3-2}}\to e^4$$

例16：设$a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$（$n=1,2,\cdots$），证明：$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$

证明：由单调有界准则可得，请自行证明

1.5 闭集套原理

定理1.5.1（闭集套原理）：若有一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$满足：

1. $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$（$\forall n\in\mathbb{N}$，区间嵌套）；

2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$（区间长度趋于0 ）。

则存在唯一的c，使得c属于所有闭区间，即$c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，且$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c$ 。

定理1.5.2（推广：数列形式的闭集套）：若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：

1. $a_{n+1}\le a_n\le b_n\le b_{n+1}$（$\forall n\ge 1$，数列嵌套）；

2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$（区间长度趋于0 ）。

则：(i) 数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$收敛于相同极限c；

(ii) c是满足条件的唯一实数。

证明： (i) 由$a_{n+1}\le a_n\le b_n\le b_{n+1}$，$\{a_n\}$单调递减有上界（上界为$b_1$ ），$\{b_n\}$单调递增有下界（下界为a_1 ）。

由单调有界准则，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都收敛，设$\lim_{n\to\infty}a_n=c'$，$\lim_{n\to\infty}b_n=c''$ 。

由$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，得$c''-c'=0$，即$c'=c''=c$ 。

(ii) 因$c=\sup\{a_n\}=\inf\{b_n\}$，故$a_n\le c\le b_n$（$\forall n$ ）。

若存在c'也满足$a_n\le c'\le b_n$（$\forall n$ ），令$n\to\infty$，由极限保不等式性，$c\le c'\le c$，故$c'=c$，唯一性得证。

注意：开区间套不保证收敛性，若将闭区间换成开区间，可能不存在公

共点c，或虽有$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$，但$c$不属于任何开区间$(a_n, b_n)$ 。

1.6 柯西收敛原理

定义1.6.1（子列）：设$\{n_k\}$是严格递增的自然数列（$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$），则数列$\{x_{n_k}\}$称为$\{x_n\}$的子列。

定理1.6.1：若$\{x_n\}$收敛于a，则它的任何子列$\{x_{n_k}\}$也收敛于a 。

证明：因$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n > N$时，$|x_n - a| < \varepsilon$ 。

取$K = N$，当$k > K$时，$n_k > n_K \geq N$（因$\{n_k\}$严格递增），故$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$

因此，$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ 。

定义1.6.2（柯西数列）：若数列$\{x_n\}$满足：对$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N$，使得当$m, n > N$时，都有$|x_m - x_n| < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$为柯西数列（或基本数列）。

引理1：柯西数列有界

证明：取$\varepsilon = 1$，由柯西数列定义，$\exists N$，当$m, n > N$时，$|x_m - x_n| < 1$ 。

固定$m = N + 1$，则对$\forall n > N$，有$|x_n - x_{N+1}| < 1$，即：

$$|x_n| \leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|$$

令$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}$，则对$\forall n$，$|x_n| \leq M$ 。

故柯西数列$\{x_n\}$有界。

定理1.6.2：数列收敛 $\iff$ 是柯西数列

证明：($\Rightarrow$) 收敛数列是柯西数列 设$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则对$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n > N$时，$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ，当$m, n > N$时：

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故$\{x_n\}$是柯西数列。

($\Leftarrow$) 柯西数列收敛设$\{x_n\}$是柯西数列，需证其收敛。

步骤1：构造子列并证明子列收敛：

因$\{x_n\}$是柯西数列，取$\varepsilon_k = \frac{1}{k}$（$k \in \mathbb{N}^*$ ），可构造子列$\{x_{n_k}\}$满足：对ε_k，$\exists N_k$，当$m, n > N_k$时，$|x_m - x_n| < \frac{1}{k}$ 。

取$n_1 > N_1$，$n_{k+1} > \max\{N_{k+1}, n_k\}$，则子列$\{x_{n_k}\}$满足：

$$|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$$

可证$\{x_{n_k}\}$收敛，设$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ 。

步骤2：证明原数列收敛于a

对$\forall \varepsilon > 0$，由$\{x_n\}$是柯西数列，$\exists N_1$，当$m, n > N_1$时，$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

又$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$，$\exists K$，当$k > K$时，$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

取$N = \max\{N_1, n_K\}$，当$n > N$时，存在$k > K$使得$n_k > N$（因$\{n_k\}$严格递增），故：

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，即柯西数列收敛。

等价表述：对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，使得对任意的$n > N$和$p \in \mathbb{N}^*$，都有$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

例1：设$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$，证明$\{x_n\}$收敛

证明：对$\forall n > 0$，$p \in \mathbb{N}^*$，计算$|x_{n+p} - x_n|$：

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (k \geq n)$$

$$|x_{n+p}-x_n|<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

对$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$，当$n>N$时，$\frac{1}{n}<\varepsilon$ ，故：

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

由柯西收敛原理，$\{x_n\}$收敛。

例2：设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，证明$\{x_n\}$无界

证明：取$\varepsilon=\frac{1}{2}$，对任意N，取$m=N+1$，$n=2N+1$（或$p=N$ ），则：

$$|x_n-x_m|=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{2N+1}+\cdots+\frac{1}{2N+1}\quad(\text{共}N\text{项})$$

$$|x_n-x_m|>N\cdot\frac{1}{2N}=\frac{1}{2}=\varepsilon$$

这表明$\{x_n\}$不满足柯西数列的定义，故$\{x_n\}$发散（调和级数发散）。

例3：证明$x_n=(-1)^n$发散

证明：取$\varepsilon=1$，对任意N，取$m=N+1$（偶数），$n=N+2$（奇数），则：

$$|x_m-x_n|=|(-1)^{N+1}-(-1)^{N+2}|=|-1-1|=2>1$$

由柯西收敛原理，$\{x_n\}$不满足柯西条件，故$\{x_n\}$发散。

1.7 无穷大

定义1.7.1（无穷大）：若对$\forall M>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|x_n|>M$，则称$\{x_n\}$发散到无穷大，记为$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$（或$+\infty$，$-\infty$，依符号定）。

约定：若上确界不存在（无上界），记$\sup\{x_n\}=+\infty$；下确界不存在（无下界），记$\inf\{x_n\}=-\infty$ 。

定理1.7.1（确界与数列极限）：单调数列必具有（无穷或有穷）极限，

即：

1.若$\{x_n\}$单调递增，则$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$；

2.若$\{x_n\}$单调递减，则$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$。

定理1.7.2：设$x_n \neq 0$（$\forall n$ ），则$\{x_n\}$是无穷大数列 $\Longleftrightarrow$ $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是无穷小数列。

证明：（$\Rightarrow$）若$\{x_n\}$是无穷大数列，对$\forall \varepsilon > 0$，取$M = \frac{1}{\varepsilon}$，则$\exists N$，当$n > N$时，$|x_n| > M = \frac{1}{\varepsilon}$ ，即$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ ，故$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是无穷小数列。

（$\Leftarrow$）若$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是无穷小数列，对$\forall M > 0$，取$\varepsilon = \frac{1}{M}$，则$\exists N$，当$n > N$时，$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon = \frac{1}{M}$ ，即$|x_n| > M$ ，故$\{x_n\}$是无穷大数列。

定理1.7.3：有界数列必有收敛子列

证明：设$\{x_n\}$有界，即$a \leq x_n \leq b$（$\forall n$ ），记$[a_1, b_1] = [a, b]$ 。

将$[a_1, b_1]$二等分，得$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$，至少有一个子区间含$\{x_n\}$的无穷多项，记为$[a_2, b_2]$ 。

重复此过程，得区间套$\{[a_k, b_k]\}$，满足：

1. $[a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]$；

2. $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}} \to 0$；

3. 每个$[a_k, b_k]$含$\{x_n\}$的无穷多项。

在$[a_1, b_1]$中取x_{n_1}，在$[a_2, b_2]$中取x_{n_2}（$n_2 > n_1$ ），依此类推，得子列$\{x_{n_k}\}$，满足$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ 。

由闭区间套定理，$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c$，故$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$（夹逼准则）。

Chapter 2

函数极限及其连续性

2.1 函数极限

定义2.1.1（函数极限定义1）：设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义，若对于满足条件$x_n \to x_0, (n \to +\infty)$，且$x_n$在$x_0$该去心领域内的任意数列，有相应的函数值数列，都以常数A为极限，则称$f(x)$当$x \to x_0$（或$x \to \infty$ ）时以A为极限，记为：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

（注：A可以是有限数、$+\infty$或$-\infty$，需匹配邻域类型。

例1：证明$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$

证明：设$\lim_{x \to a} x_n = a$,则$\forall \varepsilon > 0, \exists N$,当$n > N$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$

$$|\sin x_n - \sin a| = 2\left|\cos \frac{x_n + a}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x_n - a}{2}\right| \le 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x_n - a}{2}\right| = |x_n - a| < \varepsilon$$

由函数极限定义，$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ 。

重要不等式：$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$，$\sin x < x < \tan x$（$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ）

定理2.1.1（极限唯一性）：若$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$且$\lim_{x \to x_0} f(x) = B$，则$A = B$

定理2.1.2（夹逼定理）：若在x_0的某去心邻域内，有$g(x) \le f(x) \le h(x)$，

且$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$，则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 。

定理2.1.3（四则运算）： 若$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim_{x\to x_0} g(x)=B$，则：

1. $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；
2. $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；
3. 若$B\neq 0$，$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ 。

例1： 求$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

解：方法一：由斯特林公式得：$\lim_{n\to\infty}\frac{n/e}{n}=\frac{1}{e}$

方法二：取对数得$\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k-\ln n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}$ 。

这是黎曼和，对应积分$\int_0^1\ln x\,dx=[x\ln x-x]_0^1=-1$。

故$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=-1$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

方法三：若正序列$\{a_n\}$有极限a，则序列$\{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\}$也必有同一极限。

将此命题用于序列$a_1,\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\cdots,\frac{a_{n+1}}{a_n},\cdots$，则得到：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

用上述结论求：$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

令$a_n=\frac{n!}{n^n}$，则：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

斯特林公式： $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$（$n\to\infty$ ），（用于近似阶乘）。

定理2.1.4（复合函数极限）： 设$f(x)$在b的某去心邻域内有定义，$\lim_{y\to b} f(y)=c$；$g(x)$在a的某去心邻域内有定义，$\lim_{x\to a} g(x)=b$，且$g(x)\neq b$（在a的去心

邻域内），则$\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$ 。

证明：

例2：求$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

解：令$y=\sqrt{1+x}$，则$x=y^2-1$，当$x\to 0$时$y\to 1$ 。原式变为：

$$\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}$$

例3：求$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

解：令$t=\sin x$，当$x\to 0$时$t\to 0$ 。原式变为：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

定义2.1.2（函数极限定义2）设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义，若对$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，使得当$0 < |x-x_0| < \delta$时，有$|f(x)-A| < \varepsilon$，则称$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$ ）时以A为极限，记为：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

定理2.1.5：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：对任意满足 $x_n\to x_0$（$x_n\neq x_0$ ）的数列 $\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0)$，都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

即：函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则关于函数极限的两个定义等价。

证明：定义2 $\Longrightarrow$ 定义1

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$。

对任意 $x_n\to x_0$（$x_n\neq x_0$ ），由数列极限定义，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

$0 < |x_n - x_0| < \delta$。

因此，当 $n > N$ 时，$|f(x_n) - A| < \varepsilon$，即 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

定义1 $\Longrightarrow$ 定义2

假设满足定义2，但不满足定义1，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任意 $\delta > 0$，存在 $x' \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 使得 $|f(x') - A| \geq \varepsilon_0$。

取 $\delta_n = \frac{1}{n}$（$n \in \mathbb{N}^*$ ），则存在 $x_n \in \mathring{U}(x_0, \frac{1}{n})$ 使得 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$。

显然 $x_n \to x_0$（$x_n \neq x_0$ ），但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$，与定义2矛盾。故定义1成立。

定理2.1.6（局部有界性）：若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有界，即存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x)| \leq M$。

证明：取 $\varepsilon = 1$，由 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < 1$。

由三角不等式：

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$$

推论：若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$，则存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x)| > \frac{|A|}{2} > 0$。

证明：对$\varepsilon = \frac{|A|}{2}$，$\exists \delta > 0$,当$0 < |x - a| < \delta$时，$|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \geq |A| - |f(x) - A| \geq |A| - \frac{|A|}{2} = \frac{|A|}{2}$$

定理2.1.7（保序性）：若$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$，则$\exists \delta > 0$，当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$时，有$f(x) < g(x)$ 。

证明：设$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x\to x_0} g(x) = B$，则$A < B$ 。

取$\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$，由极限定义：

1.$\exists \delta_1 > 0$，当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$时，$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$；

2.$\exists \delta_2 > 0$，当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$时，$B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$ 。

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时：

$$f(x)<A+\varepsilon=\frac{A+B}{2},\quad g(x)>B-\varepsilon=\frac{A+B}{2}$$

故$f(x)<g(x)$ 。

推论：若$f(x)\le g(x)$（$x\in\mathring{U}(x_0)$ ），则$\lim_{x\to x_0}f(x)\le\lim_{x\to x_0}g(x)$

定理2.1.8（函数极限柯西收敛原理）：函数$f(x)$在$\mathring{U}(x_0)$内有定义，则$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得对任意$x',x''\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 。

证明：必要性：设$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$ 。对$x',x''\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有：

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

充分性：取收敛数列$x_n\to x_0$（$x_n\in\mathring{U}(x_0)$ ），则$\{f(x_n)\}$是柯西数列（由条件），故$\{f(x_n)\}$收敛，设极限为A 。

对任意收敛数列$y_n\to x_0$（$y_n\in\mathring{U}(x_0)$ ），同理$\{f(y_n)\}$收敛，需证极限也为A 。

构造数列$z_n=\begin{cases}x_k, & n=2k-1\\ y_k, & n=2k\end{cases}$，则$z_n\to x_0$，故$\{f(z_n)\}$收敛，子列极限必相等，即$\lim f(y_n)=A$ 。

由海涅定理，$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ 。

定义2.1.3（无穷小量）：若$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则称$\alpha(x)$是$x\to x_0$时的无穷小量。

定理2.1.9：$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$是$x\to x_0$时的无穷小量。

证明：

2.2 连续函数

定义2.2.1（单侧极限）：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左侧邻域（$(x_0-\delta,x_0)$）内有定义，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限为 A，记为：

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^-)=A$$

类似地，若 $f(x)$ 在 x_0 的右侧邻域（$(x_0,x_0+\delta)$）内有定义，且对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$|f(x)-B|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限为 B，记为：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=B \quad 或 \quad f(x_0^+)=B$$

定理2.2.1：$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是左极限和右极限都存在且相等，即：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

定义2.2.2（函数连续）：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

等价定义（$\varepsilon-\delta$ 语言）：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

定义2.2.3（单侧连续）：

左连续：$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$；右连续：$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$。
函数在 x_0 处连续的充要条件是左连续且右连续。

定义2.2.4（区间上的连续性）：开区间连续：若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续。

闭区间连续：若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在 a 处右连续、在 b 处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。

定理2.2.2（介值定理）：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

证明：不妨设 $f(a)<0$，$f(b)>0$。取区间中点 $c=\frac{a+b}{2}$：

1.若 $f(c)=0$，则 $\xi=c$，结论成立；

2.若 $f(c)\neq 0$，则 $f(c)$ 与 $f(a)$ 或 $f(b)$ 异号，取异号的子区间 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$，满足 $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$。

重复此过程，得区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，满足 $f(a_n)<0$，$f(b_n)>0$，且 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$。

由闭区间套定理，存在唯一 $\xi\in[a_n,b_n]$（对所有 n ），且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$。

由连续性，$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\xi)\leq 0$，$\lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(\xi)\geq 0$，故 $f(\xi)=0$。

推论：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对任意介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的值 γ，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\gamma$。

证明：令 $g(x)=f(x)-\gamma$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

由于 γ 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间，不妨设 $f(a)<\gamma<f(b)$，则：

$$g(a)=f(a)-\gamma<0,\quad g(b)=f(b)-\gamma>0$$

由介值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $g(\xi)=0$，即：

$$f(\xi)=\gamma$$

定理2.2.3（局部有界性）：若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有界，即存在 $M>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，$|f(x)|\leq M$。

定理2.2.4：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界（即存在

$M>0$，对所有 $x\in[a,b]$，有$|f(x)|\leq M$ ）。

证明：假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $|f(x_n)|>n$。

构造区间套 $\{[a_n,b_n]\}$：

1. 初始区间 $[a_1,b_1]=[a,b]$；

2. 二等分 $[a_n,b_n]$ 为 $[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]$ 和 $[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]$，至少有一个子区间含无穷多个 x_n，记为 $[a_{n+1},b_{n+1}]$；

3. 区间长度满足 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}\to 0$。

由闭区间套定理，存在唯一 $c\in[a_n,b_n]$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c$。

由于 $f(x)$ 在 c 处连续，由局部有界性，存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $U(c,\delta)$ 内有界，即存在 $K>0$，当 $x\in U(c,\delta)$ 时，$|f(x)|\leq K$。

但区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 最终会包含于 $U(c,\delta)$（因 $a_n\to c$，$b_n\to c$ ），故对充分大的 n，$[a_n,b_n]\subset U(c,\delta)$，从而 $f(x)$ 在 $[a_n,b_n]$ 内有界，与“$[a_n,b_n]$ 含无穷多个使 $|f(x_n)|>n$ 的点”矛盾。

因此，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

例1：函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内连续，但无界。

定理2.2.5（最值定理）：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则存在 $x',x''\in[a,b]$，使得：

$$f(x')=\max_{x\in[a,b]}f(x)=M,\quad f(x'')=\min_{x\in[a,b]}f(x)=m$$

证明：以最大值为例：对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，由上确界定义，存在 $x_n\in[a,b]$ 使得：

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leq M$$

由有界数列存在收敛子列，$\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x'\in[a,b]$（因

$[a, b]$ 是闭区间）。

由 $f(x)$ 连续，$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x')$。

对不等式 $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M$ 取极限（$k \to \infty$ ），得：

$$M \le f(x') \le M \implies f(x') = M$$

同理可证最小值。

性质1：四则运算保持连续性

性质2：若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g(f(x))$ 在 x_0 处连续。

性质3：若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续

证明：由三角不等式 $||f(x)| - |f(x_0)|| \le |f(x) - f(x_0)|$ 。

2.3 间断点

定理2.3.1：函数在 x_0 处连续的充要条件是左连续且右连续。

定义2.3.1（间断点）：若 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，但在 x_0 处不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。

第一类间断点：若 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在（有限数），则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点，包括：

可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+) \ne f(x_0)$（或 $f(x_0)$ 无定义）；

跳跃间断点：$f(x_0^-) \ne f(x_0^+)$。

第二类间断点：若 $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0^+)$ 至少有一个不存在（或为无穷大），则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点，包括无穷间断点、振荡间断点等。

例1：函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$：

解： $x = 0$ 处，$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，但 $f(0) = 0$，故 $x = 0$ 是可去间断点（第一类）。

黎曼函数：黎曼函数 $R(x)$ 定义为：

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\text{（既约分数，}p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}^*,q>0\text{）}\\ 0, & x\text{ 为无理数或 }x=0\end{cases}$$

黎曼函数性质：黎曼函数 $R(x)$ 在任意无理点 x_0 处连续，在任意有理点 x_0 处间断（第一类间断点）。

证明： 1.无理点连续：

设 x_0 为无理数，需证 $\lim_{x\to x_0}R(x)=0=R(x_0)$。

对 $\forall\varepsilon>0$，考虑区间 (x_0-1,x_0+1) 内的既约分数 $\frac{p}{q}$（$q\in\mathbb{N}^*$ ）。

满足 $\frac{1}{q}\geq\varepsilon$ 的 q 只有有限个（因 $q\leq\frac{1}{\varepsilon}$ ），每个 q 对应的 p 也有限，故在 (x_0-1,x_0+1) 内，满足 $R(x)\geq\varepsilon$ 的有理点 x 只有有限个。

记这些有理点到 x_0 的最小距离为 $\delta>0$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时： - 若 x 为无理数，$R(x)=0<\varepsilon$； - 若 x 为有理数，$R(x)=\frac{1}{q}<\varepsilon$（因 $q>\frac{1}{\varepsilon}$ ）。

因此，$\lim_{x\to x_0}R(x)=0=R(x_0)$，即 $R(x)$ 在无理点连续。

2.有理点间断：

设 $x_0=\frac{p}{q}$ 为有理点（既约分数），则 $R(x_0)=\frac{1}{q}>0$。

取 $\varepsilon=\frac{1}{2q}$，对任意 $\delta>0$，在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内存在无理点 x'，使得 $R(x')=0$，故：

$$|R(x')-R(x_0)|=\frac{1}{q}>\varepsilon$$

因此，$R(x)$ 在有理点不连续。

2.4 一致连续

定义2.4.1（一致连续）：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

证明：

性质：连续 $\nRightarrow$ 一致连续

证明：函数在区间上连续，不一定一致连续。例如：

1.$f(x)=x$ 在 $\mathbb{R}$ 上既连续又一致连续；

2.$f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，但不一致连续。

例1：$f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续

证明：取 $\varepsilon_0=1$，对任意 $\delta>0$，取 $x_1=\frac{1}{\delta}$，$x_2=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$，则：

$$|x_1-x_2|=\frac{\delta}{2}<\delta$$

但：

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{\delta}\right)^2=1+\frac{\delta^2}{4}>1=\varepsilon_0$$

故 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续。

定理2.4.1：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

证明：假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，存在 $x_n',x_n''\in[a,b]$ 使得：

$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon_0$$

由致密性定理，$\{x_n'\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}'\}$ 收敛于 $x_0\in[a,b]$，则 $x_{n_k}''\to x_0$（因 $|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\frac{1}{n_k}\to 0$ ）。

由 $f(x)$ 连续，$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}')=f(x_0)$，$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}'')=f(x_0)$，故：

$$|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\to 0$$

与 $|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geq\varepsilon_0$ 矛盾，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

定理2.4.2：函数 $f(x)$ 在数集 E 上一致连续的充要条件是：对任意满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 的数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset E$，有 $\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$。

证明：1.必要性：

若 $f(x)$ 在 E 上一致连续，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x,y\in E$ 且 $|x-y|<\delta$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。

对满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 的数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，由数列极限定义，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|x_n-y_n|<\delta$。

因此，当 $n>N$ 时，$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$，即 $\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$。

2.充分性：

假设 $f(x)$ 在 E 上不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，存在 $x_n,y_n\in E$ 使得：

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$$

此时 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但 $\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]\neq 0$，与条件矛盾。故 $f(x)$ 在 E 上一致连续。

定理2.4.3：初等函数在定义域内连续。

Chapter 3

区间

定义3.1.1（区间）：数集 $J \subset \mathbb{R}$ 称为区间，当且仅当：对任意 $x, y \in J$（$x < y$ ），区间 $(x, y) \subset J$。

定理3.1.1：若 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ 是一个区间。

定理3.1.2：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调，则 $f(x)$ 在 I 上连续的充要条件是 $f(I)$ 是一个区间。

证明： 1.必要性

若 $f(x)$ 在 I 上连续且单调，则 $f(x)$ 满足介值定理（连续函数在区间上的值域是区间），故 $f(I)$ 是区间。

2.充分性：

若 $f(x)$ 在 I 上单调且 $f(I)$ 是区间，假设 $f(x)$ 在某点 $c \in I$ 处不连续，则 $f(c^-)$ 或 $f(c^+)$ 存在且与 $f(c)$ 不相等（因单调函数单侧极限存在）。

此时，$f(I)$ 会包含“跳跃”，即存在区间 $(f(c^-), f(c))$ 或 $(f(c), f(c^+))$ 不在 $f(I)$ 中，与 $f(I)$ 是区间矛盾。故 $f(x)$ 在 I 上连续。

Chapter 4

指数

指数函数的基本性质1：设 $a \in \mathbb{R}$，$a > 0$，$p, q \in \mathbb{Q}$，则指数函数满足：

1. $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$；

2. 若 $a > 1$ 且 $p > q$，则 $a^p > a^q$；若 $0 < a < 1$ 且 $p > q$，则 $a^p < a^q$（单调性）。

引理1：设 $a > 1$，$p, q \in \mathbb{Q}$，且 $|p-q| < 1$，则：

$$|a^p - a^q| \leq a^q(a-1)|p-q|$$

证明： $|a^p - a^q| = a^q|a^{p-q} - 1|$，故只需证 $|a^{p-q} - 1| \leq (a-1)(p-q)$。

先证 $|a^r - 1| \leq r(a-1)$，对 $r \in \mathbb{Q}$ 且 $|r| < 1$ 成立。

情形 1：$r = 0$ 显然 $|a^0 - 1| = 0 = 0 \cdot (a-1)$，成立。

情形 2：$y = \frac{m}{n} \in (0,1)$（$m, n \in \mathbb{N}^*$，$m < n$ ）

$$a^y = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^m \cdot 1^{n-m})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{ma + (n-m)}{n} = y(a-1) + 1$$

移项得：

$$|a^y - 1| = a^y - 1 \leq y(a-1)$$

情形 3：$y=-s\in(-1,0)$（$s\in(0,1)$ ）

$$|a^y-1|=|a^{-s}-1|=\left|\frac{1}{a^s}-1\right|=1-\frac{1}{a^s}\leq a^s-1$$

由情形 2，对 $s\in(0,1)$ 有 $a^s-1\leq s(a-1)$，故：

$$|a^y-1|\leq(a-1)s=(a-1)|y|$$

引理2：设 $a>0$，$x\in\mathbb{R}$，$\{p_n\},\{q_n\}$ 是有理数序列，满足 $p_n\to m$，$q_n\to m$，则：

$$\lim_{n\to\infty}a^{p_n}=\lim_{n\to\infty}a^{q_n}=a^m$$

证明：设$q_n\to m$（m 为某实数，$n\to\infty$ 时）。因$\lim_{n\to\infty}(p_n-q_n)=0$，故对任意$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}^*$，当$n>N$ 时，$|p_n-q_n|<\varepsilon<1$。

此时，利用指数函数性质$|a^{p_n}-a^{q_n}|\leq a^{q_n}(a-1)|p_n-q_n|$，又因$q_n\to m$，当$n$ 足够大时$a^{q_n}\leq a^m$（不妨设$a>1$，若$0<a<1$ 类似推导），故：

$$|a^{p_n}-a^{q_n}|\leq a^{q_n}(a-1)|p_n-q_n|\leq a^m(a-1)|p_n-q_n|\leq a^m(a-1)\varepsilon$$

取极限$n\to\infty$，$\lim_{n\to\infty}(a^{p_n}-a^{q_n})=0$，因此：

$$\lim_{n\to\infty}a^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left[(a^{p_n}-a^{q_n})+a^{q_n}\right]=\lim_{n\to\infty}a^{q_n}$$

指数函数的基本性质2：设 $a>1$，则指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且严格递增连续；若 $0<a<1$，则 $y=a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且严格递减连续。

Chapter 5

泰勒展开

5.1 无穷小（大）量的比较

定义5.1.1（无穷小量与无穷大量）：设 $\alpha(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，若 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量；若 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量。

定义5.1.2（无穷小量的阶）：设 $\varphi(x),\psi(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，且 $\varphi(x)\neq 0$，$\psi(x)$ 在 x_0 处附近非零，讨论 $x\to x_0$ 时 $\psi(x)$ 关于 $\varphi(x)$ 的阶：

1. 若 $\lim_{x\to x_0}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=0$，则称 $\psi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小，记为 $\psi(x)=o(\varphi(x))$；

2. 若 $\lim_{x\to x_0}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1$，则称 $\psi(x)$ 与 $\varphi(x)$ 为等价无穷小，记为 $\psi(x)\sim\varphi(x)$；

3. 若 $\lim_{x\to x_0}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=C$（$C$ 为非零常数），则称 $\psi(x)$ 与 $\varphi(x)$ 同阶，记为 $\psi(x)=O(\varphi(x))$（或 $\varphi(x)=O(\psi(x))$ ）。

例1：设 $f(x)=a^x$（$a>1$ ），$g(x)=x^M$（$M>0$ ），则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$，即 $x^M=o(a^x)$（$x\to+\infty$ ）。

定理5.1.1（等价无穷小充要条件）：$\psi(x)\sim\varphi(x)$（$x\to x_0$ ）的充要条件是 $\psi(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x))$。

定理5.1.2（无穷小的运算性质）：若 $o(\varphi(x))$ 和 $O(\varphi(x))$ 表示无穷小的

阶，则：

$$o(\varphi(x))+o(\varphi(x))=o(\varphi(x)),\quad O(\varphi(x))+O(\varphi(x))=O(\varphi(x))$$

重要极限：（1）$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，（2）$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

证明：先考虑 $x\to+\infty$，对整数 n，由 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，对任意 $x>0$，取 $n=\lfloor x\rfloor$，则 $n\le x<n+1$，故：

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

令 $x\to+\infty$，则 $n\to\infty$，由夹逼定理得 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$。

对 $x\to-\infty$，令 $t=-x$，则 $t\to+\infty$，故：

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=e$$

推广： $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

常见等价无穷小： $\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$

$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x$

5.2 泰勒展开（带皮亚诺余项）

定义5.2.1（泰勒多项式）： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒展开式（带皮亚诺余项）为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

特别地，当 $x_0 = 0$ 时，称为麦克劳林展开式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

常见函数的麦克劳林展开（带皮亚诺余项）

1. 指数函数：e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0$$

2. 正弦函数：$\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k}), \quad x \to 0$$

（通常取 $n = 2k$，保留到 x^{2k-1} 项）

3. 余弦函数：$\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}), \quad x \to 0$$

4. 自然对数：$\ln(1 + x)$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0^+$$

5. 幂函数：$(1 + x)^\alpha$（$\alpha \in \mathbb{R}$ ）

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), \quad x \to 0$$

可见等价无穷小代换极为泰勒展开前几项。

例2： 求 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$

解：

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x \sim x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

故：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Chapter 6

导数

6.1 导数定义及其运算法则

定义6.1.1（导数）：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若极限：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限称为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$。

基本函数的导数：1.常函数：设 $f(x)=C$（C 为常数），则导数：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0$$

2.幂函数：设 $f(x)=x^m$（$m\in\mathbb{N}^*$ ），利用二项式定理展开：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{mx^{m-1}h+\binom{m}{2}x^{m-2}h^2+\cdots+h^m}{h}=mx^{m-1}$$

3.指数函数：设 $f(x)=e^x$，则导数：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$$

设 $f(x)=a^x$（$a>0$ ），利用 $a^x=e^{x\ln a}$ 及链式法则：

$$f'(x)=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\ln a$$

4.对数函数：设 $f(x)=\ln x$，则导数：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}$$

设 $f(x)=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$ ），利用换底公式 $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$：

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$$

定理6.1.2（和差法则）： $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$

证明：根据导数定义：

$$\begin{aligned}(u(x)\pm v(x))'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\&=u'(x)\pm v'(x)\end{aligned}$$

定理6.1.3（乘法法则）： $(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

证明：根据导数定义：

$$\begin{aligned}(u(x)\cdot v(x))'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[v(x+\Delta x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

由于 $v(x)$ 可导，故 $v(x)$ 连续，即 $\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)=v(x)$，因此：

$$(u(x)\cdot v(x))' = v(x)\cdot u'(x) + u(x)\cdot v'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

定理6.1.3（除法法则）： 若 $v(x)\neq 0$，则：$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

证明：先证明 $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{v(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x)v(x+\Delta x)}\\
&= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)}\\
&= -v'(x)\cdot\frac{1}{[v(x)]^2} = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}
\end{aligned}$$

再结合乘法法则：

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} + u(x)\cdot\left(\frac{1}{v(x)}\right)'$$

代入 $\left(\frac{1}{v(x)}\right)'$ 的结果：

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

6.2 单侧倒数

定义6.2.1（单侧导数）： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左侧邻域（$x_0-\delta, x_0$ ）内有定义，若极限：

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左可导，$f'_-(x_0)$ 为左导数。

类似地，若 $f(x)$ 在 x_0 的右侧邻域（$x_0, x_0+\delta$ ）内有定义，且极限：

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右可导，$f'_+(x_0)$ 为右导数。

定理6.2.1：函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是：左导数和右导数都存在且相等，即：

$$f'(x_0)\text{ 存在 } \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

例1：$f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 处的可导性

解：计算左右导数：右导数（$x\to 0^+$）：

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1$$

左导数（$x\to 0^-$）：

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1$$

因 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$，故 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导。

例2：$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的可导性。

证明：补充定义 $f(0)=0$，计算导数：

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}$$

由有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，$\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$。

定义6.2.2（导数的几何意义）：函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率：

右导数 $f'_+(x_0)$ 对应右侧切线斜率；

左导数 $f'_-(x_0)$ 对应左侧切线斜率。

定理6.2.2：若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

证明：由导数定义：

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)] = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

故 $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

注意：连续不一定可导（如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导）。

例3：设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1 \\ x^2, & x\le 1 \end{cases}$，求 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。

解：1.连续性条件：$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b, \quad \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1, \quad f(1)=1$$

故 $a+b=1$。

2.可导性条件：$f'_+(1) = f'_-(1)$

左导数（$x\to 1^-$）：

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$$

右导数（$x\to 1^+$）：

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+(1-a)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1} =$$

故 $a=2$，代入 $a+b=1$ 得 $b=-1$。

例4：$y=\sin x$ 的导数

证明：利用和角公式 $\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$，导数定义：

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)$$

由重要极限 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$，$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0$，得：

$$y' = \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x$$

即 $(\sin x)' = \cos x$。

类似地可推导 $(\cos x)' = -\sin x$，$(\tan x)' = \sec^2 x$ 等三角函数的导数公式。

例5：设$\varphi(x)$在$x=1$处可导，且$\varphi'(1)=1$，又$f(x)=\varphi(1+2x)-\varphi(1-3x)$，试求$f'(0)$。

证明：首先计算$f(0)$：

$$f(0) = \varphi(1+2\cdot 0) - \varphi(1-3\cdot 0) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0$$

根据导数定义，$f'(0)$为：

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(1+2x)-\varphi(1-3x)-0}{x}$$

凑导数定义形式得：

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\varphi(1+2x)-\varphi(1)}{2x} + 3\cdot\frac{\varphi(1)-\varphi(1-3x)}{-3x}\right)$$

得：

$$f'(0) = 2\varphi'(1) + 3\varphi'(1) = 5\varphi'(1) = 5$$

例6：设 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性。

证明：

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|(a+\Delta x) - a|\varphi(a+\Delta x) - 0}{\Delta x} = -\varphi(a)$$

$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|(a+\Delta x) - a|\varphi(a+\Delta x) - 0}{\Delta x} = \varphi(a)$$

若 $\varphi(a) = 0$，则 $f'_-(a) = f'_+(a) = 0$，$f(x)$ 在 $x = a$ 处可导；若 $\varphi(a) \neq 0$，则 $f'_-(a) \neq f'_+(a)$，$f(x)$ 在 $x = a$ 处不可导。

例7：设 $f'(x)$ 存在，且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -1$，求 $f'(1)$。

解：令 $h = -x$（当 $x \to 0$ 时，$h \to 0$ ），则 $x = -h$，代入整理得：

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2$$

由导数定义，$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$，故： $f'(1) = -2$

6.3 反函数求导

定理6.3.1（反函数求导法则）：设 $y = \varphi(x)$ 在 x_0 的某邻域内严格单调且连续，若 $\varphi(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\varphi'(x_0) \neq 0$，则其反函数 $x = \psi(y)$ 在 $y_0 = \varphi(x_0)$ 处可导，且满足：

$$\psi'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)} = \frac{1}{\varphi'\left(\psi(y_0)\right)}$$

例1：设 $y = e^x$，其反函数为 $x = \ln y$。

证明：原函数导数：$\frac{dy}{dx} = e^x$ ；反函数导数：$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^x}$

故 $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1$，满足反函数求导法则 $\psi'(y) \cdot \varphi'(x) = 1$（其中 $\psi(y) = \ln y$ 是 $\varphi(x) = e^x$ 的反函数）。

例2：设 $y = \sin x$（$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ），其反函数为 $x = \arcsin y$。

证明：原函数导数：$\frac{dy}{dx} = \cos x$，且 $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$（因

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$\cos x > 0$ ）。

反函数导数：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

即 $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，习惯上写为 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

6.4 初等函数与原函数对照表

函数 $f(x)$	原函数 $\int f(x)dx$（C 为常数）
C	$Cx + C$
$x^n\ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$	$\ln\|x\| + C$
$\sqrt{x}\ (x \geq 0)$	$\dfrac{2}{3}x^{3/2} + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ (x > 0)$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x\ (a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln x\ (x > 0)$	$x\ln x - x + C$
$\log_a x\ (x > 0)$	$\dfrac{x\ln x - x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\| + C$
$\cot x$	$\ln\|\sin x\| + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$
$\csc^2 x$	$-\cot x + C$
$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
$\csc x \cot x$	$-\csc x + C$

Table 6.1: 初等函数与原函数对照表

6.5 复合函数求导

定理6.5.1（复合函数求导法则）： 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，$g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导，则复合函数 $\varphi(x) = g(f(x))$ 在 x_0 处可导，且：

$$\varphi'(x_0) = g'\left[f(x_0)\right] \cdot f'(x_0)$$

习惯上用微分形式表示为：

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

证明：定义辅助函数 $G(y)$：

$$G(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0\ (y_0=f(x_0))\\ g'(y_0), & y=y_0\end{cases}$$

由 $g(y)$ 在 y_0 处可导，$G(y)$ 在 y_0 处连续。

考虑复合函数 $\varphi(x)=g(f(x))$ 在 x_0 处的增量：

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=g(f(x))-g(f(x_0))$$

分两种情况讨论 x 趋近于 x_0 时的行为：

1. 当 $f(x)\neq f(x_0)$（即 $y\neq y_0$ ）时：

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=G(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. 当 $f(x)=f(x_0)$（即 $y=y_0$ ）时：此时 $\varphi(x)-\varphi(x_0)=0$，且 $G(f(x))=G(y_0)=g'(y_0)$，故：

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=g'(y_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=G(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

对上述等式取 $x\to x_0$ 的极限：

因 $f(x)$ 在 x_0 处可导，故 $f(x)$ 在 x_0 处连续，即 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=y_0$。

又 $G(y)$ 在 y_0 处连续，故 $\lim_{x\to x_0}G(f(x))=G\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)=G(y_0)=$

$g'(y_0)$。

因此：

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}G(f(x))\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$$

即 $\varphi'(x_0)=g'\left[f(x_0)\right]\cdot f'(x_0)$，链式法则得证。

6.6 隐函数求导

隐函数定义：若变量 x 和 y 的关系由方程 $F(x,y)=0$ 确定，且当 x 在某区间内取值时，相应地总有满足该方程的唯一 y 值值存在，则则称方程 $F(x,y)=0$ 在该区间间内确定了一个**隐函数** $y=f(x)$。

求导方法：隐函数求导无需显式表达 $y=f(x)$，直接对等式 $F(x,y)=0$ 两边关于 x 求导，将含 y' 的项移到一边，其他项移到另一边，即可解出 y'。核心是将 y 视为 x 的函数，对含 y 的表达式项使用链式法则。

基本步骤：1. 对方程 $F(x,y)=0$ 两边同时关于 x 求导；

2. 遇到含 y 的项时，需用链式法则（如 $\frac{d}{dx}[g(y)]=g'(y)\cdot y'$）；

3. 整理方程，解出 y'（结果中可保留 y）。

例1：设方程 $x^2+y^2=r^2$（r 为常数）确定隐函数 $y=f(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：方程两边对 x 求导：

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(r^2)$$

左侧第二项用链式法则：$\frac{d}{dx}(y^2)=2y\cdot y'$，右侧导数为0：

$$2x+2y\cdot y'=0$$

解出 y'：

$$y' = -\frac{x}{y}$$

6.7 对数求导法

对数求导法：对 $y = f(x)$（$f(x) > 0$ ），先对等式两边取自然对数，再利用隐函数求导法求导。

适用：1. 幂指型函数：$y = u(x)^{v(x)}$（如 $y = x^x$，$y = (\sin x)^{\cos x}$ 等）；

2. 含较多乘、除、乘方、开方运算的函数（取对数可简化运算）。

形式：对幂指型函数 $y = u(x)^{v(x)}$（$u(x) > 0$ ）：

1. 取对数：

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$$

2. 隐函数求导：两边对 x 求导（注意 y 是 x 的函数，用链式法则）：

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

3. 解出 y'：

$$y' = y \cdot \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right] = u(x)^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right]$$

例1：求 $y = x^x$ 的导数。

解：步骤1：取对数因 $y = x^x > 0$（$x > 0$ 时），两边取自然对数：

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

步骤2：隐函数求导两边对 x 求导，左边用链式法则 $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y} \cdot y'$，右

边用乘积法则：

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{d}{dx}(x) \cdot \ln x + x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

步骤3：解出 y' 两边乘以 $y = x^x$：

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

6.8 参数方程确定的函数求导

参数方程确定的函数求导：设参数方程为：

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 可导，且 $u'(t) \neq 0$，则 y 是 x 的函数，可通过链式法则求导。

一阶导数：由链式法则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$，而 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{u'(t)}$，因此：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \frac{1}{u'(t)} = \frac{v'(t)}{u'(t)}$$

二阶导数：二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 是一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 对 x 的导数，再次用链式法则：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

先计算 $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v'(t)}{u'(t)}\right) = \frac{v''(t)u'(t) - v'(t)u''(t)}{\left[u'(t)\right]^2}$$

再乘以 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{u'(t)}$，得：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{v''(t)u'(t)-v'(t)u''(t)}{[u'(t)]^2}\cdot\frac{1}{u'(t)}=\frac{v''(t)u'(t)-v'(t)u''(t)}{[u'(t)]^3}$$

6.9 高阶导数

定义6.9.1：函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$ 定义为：

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

即 n 阶导数是 $(n-1)$ 阶导数的导数，极限形式为：

$$y^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

常用函数的高阶导数公式：

$y=\sin x$，其 n 阶导数为： $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$y=\cos x$，其 n 阶导数为： $y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$y=e^x$，其 n 阶导数为： $y^{(n)}=e^x$

$y=x^\mu$（μ 为常数），其 n 阶导数为： $y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$

特别地，当 $\mu=k$（正整数）且 $n>k$ 时，$y^{(n)}=0$。

$y=\ln x$，其 n 阶导数为： $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

$y=\frac{1}{x}$，其 n 阶导数为： $y^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{x^{n+1}}$

定理6.9.1（高阶导数的莱布尼茨公式）：若 $u(x)$ 和 $v(x)$ 均 n 阶可导，则复合函数 $(uv)^{(n)}$ 满足：

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

其中 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 是组合数，且规定 $u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$（0 阶导数为函数本身）。

证明：1.基例（$n=1$）：

$$(uv)'=u'v+uv'=\binom{1}{0}u^{(0)}v^{(1)}+\binom{1}{1}u^{(1)}v^{(0)}$$

公式成立。

2.归纳假设：假设 $n=m$ 时公式成立，即：

$$(uv)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k)}$$

归纳步骤（$n=m+1$）：对 $(uv)^{(m)}$ 求导：

$$(uv)^{(m+1)}=\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k)}\right]'=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(u^{(k+1)}v^{(m-k)}+u^{(k)}v^{(m-k+1)}\right)$$

拆分求和项：

$$(uv)^{(m+1)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k+1)}v^{(m-k)}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k+1)}$$

对第一个和式令 $k'=k+1$，则：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k+1)}v^{(m-k)}=\sum_{k'=1}^{m+1}\binom{m}{k'-1}u^{(k')}v^{(m+1-k')}$$

利用组合数性质 $\binom{m}{k'-1}+\binom{m}{k'}=\binom{m+1}{k'}$，合并两个和式：

$$(uv)^{(m+1)}=\sum_{k'=0}^{m+1}\binom{m+1}{k'}u^{(k')}v^{(m+1-k')}$$

故 $n=m+1$ 时公式成立，由数学归纳法，莱布尼茨公式对所有 $n\geq 1$ 成立。

例1：求 $y=\frac{4}{x^2+2x-3}$ 的 n 阶导数。

解：

$$y=\frac{4}{(x+3)(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}$$

由 $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$，得：

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}$$

例2：求 $y=x^2e^x$ 的 n 阶导数。

解：应用莱布尼茨公式可得

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}=\binom{n}{0}u^{(0)}v^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u^{(2)}v^{(n-2)}$$

代入 u 和 v 的导数：

$$y^{(n)}=1\cdot x^2\cdot e^x+n\cdot 2x\cdot e^x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot e^x$$

化简得：

$$y^{(n)}=e^x\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)$$

Chapter 7

微分

7.1 微分定义

定义7.1.1（微分）：设函数 $y = f(x)$，若存在常数 A，使得当 $\Delta x \to 0$ 时，函数增量 Δy 可表示为：

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则称 $A\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分，记作 dy，即：

$$dy = A\Delta x$$

此时称函数 $f(x)$ 在点 x 处可微。

定理7.1.1：对一元函数 $y = f(x)$，可微与可导等价，且 $A = f'(x)$。

证明：（1）可导 $\implies$ 可微

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$。

由极限与无穷小的关系，存在无穷小 $\alpha(\Delta x)$（当 $\Delta x \to 0$ 时，$\alpha(\Delta x) \to 0$ ），使得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

两边乘以 Δx，得函数增量：

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$（因 $\alpha(\Delta x) \to 0$ ），故：

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

由微分定义，$f(x)$ 在 x_0 处可微，且微分 $dy = f'(x_0)\Delta x$。

（2）可微 $\implies$ 可导

若 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$（$\Delta x \to 0$ ），其中 A 为常数。

两边除以 Δx（$\Delta x \neq 0$ ），得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

取极限 $\Delta x \to 0$，因 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$，故：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = A$。

一阶微分形式不变性：设 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 的微分：

若 u 是自变量，$dy = f'(u)du$；

若 u 是中间变量（$u = \varphi(x)$ ），则 $du = \varphi'(x)dx$，故：

$$dy = f'(u) \cdot \varphi'(x)dx = f'(u)du$$

即无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变，称为一阶微分形式不变性。

例1： 求 $y = (\arcsin x - x^2)^2$ 的微分 dy。

解：设 $u = \arcsin x - x^2$，则 $y = f(u) = u^2$；由一阶微分形式不变性：

$$dy = f'(u)du = 2u \cdot du$$

计算 du：

$$du = d(\arcsin x - x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - 2x\,dx$$

代入得：

$$dy = 2(\arcsin x - x^2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2x\right) dx$$

7.2 微分的几何意义（以直代曲）

几何意义： 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分 $dy = f'(x_0)dx$ 表示：

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的增量；

当 Δx 很小时，可用切线增量 dy 近似曲线增量 Δy（以直代曲）。

几何上，$f'(x_0) = \tan\alpha$（α 为切线与 x 轴夹角），故：

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan\alpha \cdot \Delta x$$

定义7.2.1（内点与端点）： 内点：设区间 I，若存在 $\delta > 0$ 使得 $U(x_0, \delta) \subset I$（$U(x_0, \delta)$ 是 x_0 的 δ 邻域），则 x_0 是 I 的内点；

端点：区间 I 中不是内点的点（如闭区间 $[a, b]$ 的 a 和 b ）；
所有内点构成的集合称为区间 I 的内部。

定义7.2.1（极值）： 极大值：若存在 $\delta > 0$，当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \leq f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值，x_0 是极大值点；

极小值：若存在 $\delta > 0$，当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \geq f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，x_0 是极小值点。

7.3 微分中值定理

费马引理：若函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则：

$$f'(x_0) = 0$$

证明：因 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值（不妨设为极大值），则对 $\forall \Delta x$（$|\Delta x|$ 充分小），有：

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \implies f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

当 $\Delta x > 0$ 时：取极限 $\Delta x \to 0^+$，由极限保号性：

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

当 $\Delta x < 0$ 时：取极限 $\Delta x \to 0^-$，由极限保号性：

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

因 $f(x)$ 在 x_0 处可导，故 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$，因此：

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0 \implies f'(x_0) = 0$$

罗尔定理：若函数 $f(x)$ 满足： 1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续； 2. 在开区间 (a, b) 内可导； 3. 端点函数值相等，即 $f(a) = f(b)$；

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得：

$$f'(\xi) = 0$$

证明：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据最值定理，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m。

分两种情况：情况1：$M = m$ 此时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常函数，故 $f'(x) = 0$ 对 $\forall x \in (a,b)$ 成立，取任意 $\xi \in (a,b)$ 即可。

情况2：$M > m$ 因 $f(a) = f(b)$，故 M 和 m 中至少有一个在 (a,b) 内取得（否则 $M = f(a) = f(b) = m$，矛盾）。

不妨设 $f(x)$ 在 $\xi \in (a,b)$ 处取得最大值 M，则 ξ 是极值点。又 $f(x)$ 在 ξ 处可导（开区间内可导），由费马引理：

$$f'(\xi) = 0$$

注意：罗尔定理的三个条件缺一不可。

拉格朗日（Lagrange）中值定理：若函数 $f(x)$ 满足： 1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续； 2. 在开区间 (a,b) 内可导；

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得：

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

证明：构造辅助函数：

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

验证 $F(x)$ 满足罗定理条件： 1. $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（由 $f(x)$ 连续和线性函数连续）； 2. $F(x)$ 在 (a,b) 内可导（由 $f(x)$ 可导和线性函数可导）； 3.

端点值：

$$F(a)=f(a)-f(a)-0=0,\quad F(b)=f(b)-f(a)-(f(b)-f(a))=0$$

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$。

计算 $F'(x)$：

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

令 $F'(\xi)=0$，得：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\implies f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

推论： 若 $f'(x)=0$ 对 $\forall x\in I$ 成立，则 $f(x)$ 在 I 上是常函数。
例1： 证明当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

证明：步骤1：构造函数并应用拉格朗日中值定理设 $f(t)=\ln(1+t)$，在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得：

$$\ln(1+x)-\ln(1+0)=f'(\xi)(x-0)$$

步骤2：计算导数并分析 $f'(t)=\frac{1}{1+t}$，故：

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$$

因 $0<\xi<x$，有：

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$$

即：

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\quad(x>0)$$

柯西（Cauchy）中值定理： 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足： 1. 在闭区间

$[a, b]$ 上连续； 2. 在开区间 (a, b) 内可导； 3. $g'(x) \neq 0$ 对 $\forall x \in (a, b)$ 成立；

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得：

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明：构造辅助函数：

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

验证 $F(x)$ 满足罗尔定理条件： 1. $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续； 2. $F(x)$ 在 (a, b) 内可导； 3. 端点值：

$$F(a) = 0, \quad F(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

由罗尔定理，存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $F'(\xi) = 0$。

计算 $F'(x)$：

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$$

令 $F'(\xi) = 0$，得：

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi)$$

因 $g'(\xi) \neq 0$（条件3 ），整理得：

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

例2：设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，证明：至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$，使得：

$$f'(\xi) = 2\xi\,[f(1) - f(0)]$$

证明：构造辅助函数 $g(x)=x^2$，分析 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足柯西中值定理条件，由柯西中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得：

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$g(1)-g(0)=1^2-0^2=1,\quad g'(\xi)=2\xi$$

整理后即：

$$f'(\xi)=2\xi\,[f(1)-f(0)]$$

证毕。

例3：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0<a<b$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得：

$$af(b)-bf(a)=[f(\xi)-\xi f'(\xi)]\,(a-b)$$

证明：构造辅助函数 $u(x)=\frac{f(x)}{x}$ 和 $v(x)=\frac{1}{x}$，满足柯西中值定理条件，

由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得：

$$\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)}=\frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}$$

经计算得：

$$u(b)-u(a)=\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}=\frac{af(b)-bf(a)}{ab}$$

$$v(b)-v(a)=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$$

$$\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)}=\frac{\frac{af(b)-bf(a)}{ab}}{\frac{a-b}{ab}}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$$

代入 $u'(\xi)$ 和 $v'(\xi)$：

$$\frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

联立等式得结论，由柯西中值定理：

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

整理后即：

$$af(b)-bf(a)=\left[f(\xi)-\xi f'(\xi)\right](a-b)$$

证毕。

Chapter 8

无穷级数

8.1 级数的收敛与发散

定义8.1.1（常数项无穷级数）：数列 $\{u_n\}$ 的无穷和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 称为常数项无穷级数（简称级数）。

定义8.1.2（部分和数列）：级数的前 n 项和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为部分和，全体部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 称为部分和数列。

定义8.1.3（级数的收敛与发散）：若部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限存在，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$（$S$ 为有限数），则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，且 S 称为级数的和，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$。若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在（或为 $\pm\infty$ ），则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

性质1：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，k 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且：

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

性质2：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，其和分别为 S 和 σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$$

性质3：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$（k 为正整数）同收敛或同发散。

证明：设原级数部分和为 $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$，去掉前 k 项后的级数部分和为 $\sigma_n = \sum_{i=k+1}^{k+n} u_i = S_{k+n} - S_k$。

若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S - S_k$（存在），故新级数收敛；

若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ 也不存在，故新级数发散。

性质4：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，任意加括号后得到的新级数（如 $(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots$ ）仍收敛，且和与原级数相同。

注意：加括号后的级数收敛，不能推出原级数收敛（即逆命题不成立）。

定理8.1.1（级数收敛的必要条件）：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其通项的极限为 0，即：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

证明：由级数收敛，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 且 $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$（$n \geq 2$ ）。

通项 $u_n = S_n - S_{n-1}$，故：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

应用：若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散；

若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，不能推出级数收敛（如调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，但 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ）。

8.2 正项数列审敛准则

定义8.2.1（正项级数）：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项 $u_n \geq 0$，则称其为正项级数。

正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列（因 $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$ ）。

定理8.2.1：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$（$u_n \geq 0$ ）收敛 $\iff$ 其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

比较判别法（不等式形式）：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $u_n \leq$

v_n（$n \geq N$，N 为某正整数），则：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

推论1：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $v_n \leq k u_n \, (n \geq N, \, k > 0)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。

推论2：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $k u_n \leq v_n \, (n \geq N, \, k > 0)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

比较判别法（极限形式）：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \, (v_n > 0)$，且：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$$

则： 1.若 $0 < \rho < +\infty$，两级数同收敛或同发散；

2.若 $\rho = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

3.若 $\rho = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

比值判别法：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，且：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

则： 1.若 $\rho < 1$，级数收敛；

2.若 $\rho > 1$（或 $\rho = +\infty$ ），级数发散；

3.若 $\rho = 1$，判别法失效。

证明：

根值判别法：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，且：

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

则： 1.若 $\rho < 1$，级数收敛；

2.若 $\rho > 1$（或 $\rho = +\infty$ ），级数发散；

3.若 $\rho=1$，判别法失效。

常用级数：

1. **几何级数：**$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$，当$|r|<1$时收敛，且其和为$\frac{a}{1-r}$；当$|r|\geq 1$时发散。

2. **调和级数：**$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

3. **p - 级数：**$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当$p>1$时收敛，$p\leq 1$时发散。

8.3 交错级数及其审敛准则

定义8.3.1（交错级数）：正、负项交替相间的级数称为交错级数。

莱布尼茨（Leibniz）判别法：设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$（$a_n>0$），满足条件： 1.$a_n\geq a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$； 2.$\lim_{n\to\infty} a_n=0$。则该级数收敛。

证明：先求S_{2n}的极限：

$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$，使得$a_n-a_{n+1}\geq 0$，则由上知S_{2n}单调递减且$S_{2n}\leq u_1$。

此时，$S_{2n}\to S\leq u_1$，故收敛。

类似地，$S_{2n-1}=S_{2n}+a_{2n}\to S$（当$n\to\infty$时）。

综上，原交错级数收敛。

定义8.3.2（绝对收敛）：若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛。

定义8.3.3（条件收敛）：若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛。

定理8.3.1：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则任意交换它的各项次序所得的新级数也绝对收敛，并且其和不变。

定理8.3.2（乘积收敛性）：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都绝对收敛，则他们各项乘积以任意次序所得级数也绝对收敛，且其和为AB（其中$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ）。

定理8.3.3（级数重排）： 设$\{u_n\}$，记$\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$为双射，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的重排。

例1： 证明$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$，其中$u_n > 0$。

证明：令$u_n^* = u_{\sigma(n)}$，则原命题转化为证明$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$。

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和为S_n，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$的部分和为$S_n^*$。

对$\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^*$足够大，$S_n^*$各项必出现在$S_m$中（$m$足够大）。设$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则$S_n^* \le S_m \le S$（正项级数）。

又$\{S_n^*\}$单调有界，故$\lim_{n\to\infty} S_n^*$存在，即$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^* \le S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$。

另一方面，将$\{u_n\}$看成$\{u_n^*\}$的重排，则有$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \le \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$。

综上，有$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$。

例2： 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$绝对收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$。

证明：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，由上面结论可得：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{\sigma(n)}|$收敛，此时$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$绝对收敛。

令$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$，则$u_n = 2v_n - |u_n|$。

相应地，有$u_{\sigma(n)} = 2v_{\sigma(n)} - |u_{\sigma(n)}|$成立。

$v_n \ge 0$，且$v_n \in \{|u_n|\}$，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，由比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛。

又$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$都为收敛的正项级数，那么：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} v_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} |u_{\sigma(n)}| = 2\sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

故$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$。

重要结论： $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

例3： 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$的敛散性。

解：当$x \to 0$时，$e^x - 1 \sim x$，则$n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1}$。

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n\cdot n^{\frac{3}{2}}}{n^2+1}=0$（利用极限运算），而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛（$p=\frac{3}{2}>1$的p级数），由比较审敛法的极限形式知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$收敛。

例4：判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+\alpha^2})$的敛散性。

解：$\sin(\pi\sqrt{n^2+\alpha^2})=\sin\left(n\pi+\pi(\sqrt{n^2+\alpha^2}-n)\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi\alpha^2}{\sqrt{n^2+\alpha^2}+n}\right)$

当$n\to\infty$时，$\frac{\pi\alpha^2}{\sqrt{n^2+\alpha^2}+n}\sim\frac{\pi\alpha^2}{2n}$，$\sin\left(\frac{\pi\alpha^2}{\sqrt{n^2+\alpha^2}+n}\right)\sim\frac{\pi\alpha^2}{2n}$，且$\sin\left(\frac{\pi\alpha^2}{\sqrt{n^2+\alpha^2}+n}\right)$单调递减趋于0，由莱布尼茨判别法可知该交错级数收敛。

由比较判别法的极限形式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\pi\alpha^2}{2n}=\frac{\pi\alpha^2}{2}>0$$

得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。因此，原级数条件收敛。

例5：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是收敛的正项级数，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

证明：设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 的前 n 项和为 S_n，则：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$$

由收敛性得 a_n 有界：因 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，设其和为 S，则：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\implies\lim_{n\to\infty}a_n=S+a_0$$

收敛数列必有界，故存在 $M>0$，使得对所有 n，有 $|a_n|\le M$。得：

$$|a_nb_n|\le M\cdot b_n$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是收敛的正项级数，由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\implies\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

Chapter 9

习题课

例1：已知 $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$，$a_n \geq -6$，求 $\lim_{n\to\infty} a_n$

解：方法 1：

有界性：若 $a_1 > 3$，下面用数学归纳法证明 $a_n > 3$。当 $n = 1$ 时，$a_1 > 3$ 成立。假设当 $n = k$ 时，$a_k > 3$，则当 $n = k+1$ 时：

$$a_{k+1} = \sqrt{6+a_k} > \sqrt{6+3} = 3$$

所以由数学归纳法，对任意 n，$a_n > 3$，即数列 $\{a_n\}$ 有下界 3。

单调性：计算 $a_{n+1} - a_n$：

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{6+a_n} - a_n = \frac{6+a_n-a_n^2}{\sqrt{6+a_n}+a_n} = \frac{-(a_n-3)(a_n+2)}{\sqrt{6+a_n}+a_n}$$

因为 $a_n > 3$，所以 $(a_n-3)(a_n+2) > 0$，且 $\sqrt{6+a_n}+a_n > 0$，故 $a_{n+1}-a_n < 0$，即数列 $\{a_n\}$ 单调递减。

由单调有界准则，数列 $\{a_n\}$ 收敛。设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，对 $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ 两边取极限：

$$A = \sqrt{6+A}$$

极限 $A \geq 3$，所以舍去负根，得 $A = 3$。

方法 2：计算 $|a_{n+1}-3|$：

$$|a_{n+1}-3| = \left|\sqrt{6+a_n}-3\right| = \frac{|a_n-3|}{\sqrt{6+a_n}+3}$$

因为 $a_n \geq -6$，当 n 足够大时（或结合前面有界性分析），$\sqrt{6+a_n}+3 \geq \sqrt{6-6}+3=3$，所以 $\frac{1}{\sqrt{6+a_n}+3} \leq \frac{1}{3}$，进而有：

$$|a_{n+1}-3| \leq \frac{1}{3}|a_n-3|$$

递推可得：

$$|a_{n+1}-3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |a_1-3|$$

由夹逼准则，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n|a_1-3|=0$，所以 $\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$，即 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$。

例2：求极限：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}$$

解：方法 1：等价无穷小替换（换元法）令 $t=1-\sin x$，当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$t\to 0$。当 $t\to 0$ 时，对于任意正整数 k，有：

$$(1-t)^{\frac{1}{k}}-1 \sim -\frac{1}{k}t$$

因此：

$$1-\sqrt[k]{\sin x} = 1-(1-t)^{\frac{1}{k}} \sim \frac{1}{k}t$$

分子为多个因子的乘积：

$$(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x}) \sim \frac{t}{2}\cdot\frac{t}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{t}{n}$$

分母为 $(1-\sin x)^{n-1}=t^{n-1}$

因此，原极限可化简为：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{t^{n-1}}{n!}}{t^{n-1}}=\frac{1}{n!}$$

方法 2：考虑函数 $f(x)=x^{\frac{1}{k}}$，利用导数定义：

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=f'(1)$$

对于单因子 $\frac{1-\sqrt[k]{\sin x}}{1-\sin x}$，令 $x=\sin x$（换元后 $x\to 1$ 当原 $x\to\frac{\pi}{2}$），则：

$$\lim_{\sin x\to 1}\frac{1-\sqrt[k]{\sin x}}{1-\sin x}=\lim_{u\to 1}\frac{1-u^{\frac{1}{k}}}{1-u}=\left(u^{\frac{1}{k}}\right)'\Big|_{u=1}=\frac{1}{k}$$

原极限为 $n-1$ 个单因子极限的乘积：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{1-\sqrt[k]{\sin x}}{1-\sin x}=\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}=\frac{1}{n!}$$

例3：证明极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$ 存在。

证明：方法 1：令 $f(x)=\ln x$，对 $f(x)$ 在区间 $[n,n+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_n\in(n,n+1)$，使得：

$$\ln(n+1)-\ln n=f'(\xi_n)=\frac{1}{\xi_n}$$

由于 $\xi_n\in(n,n+1)$，因此：

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi_n}<\frac{1}{n}$$

代入中值定理的结果，得：

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

定义数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$，分析其单调性：

$$S_{n+1} - S_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

由不等式 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$（因 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ 当 $x > 0$ ），得：

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

因此，数列 $\{S_n\}$ 单调递减。

由不等式 $\ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$（累加 $\frac{1}{k} > \ln(k+1) - \ln k$ ），得：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n > \ln(n+1) - \ln n > 0$$

因此，数列 $\{S_n\}$ 有下界 0。

由单调有界准则，数列 $\{S_n\}$ 收敛，即：

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \text{ 存在}$$