



物理开放实验报告

复摆的周期规律验证 弹簧摆的混沌特性研究

钱学森学院 少年班 240

2026 年 4 月 29 日





Table of Contents

1 复摆的周期规律验证

► 复摆的周期规律验证

► 弹簧摆的混沌特性研究



一、实验原理简述

1 复摆的周期规律验证

复摆在重力作用下偏离平衡位置 θ 时，恢复力矩为 $\tau = -MgD \sin \theta$ 。根据转动定律：

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + MgD \sin \theta = 0$$

小角度下 ($\theta \leq 5^\circ$) $\sin \theta \approx \theta$ ，系统近似简谐振动：

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{MgD}{I} \theta = 0$$

固有角频率 $\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}}$ ，周期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}}$$



一、实验原理简述

1 复摆的周期规律验证

摆锤质量 m_0 ，质心距 d_0 ，转动惯量 I_0 。配重质量 m_w ，厚度 h_w 。系统总质心距：

$$D(n) = \frac{m_0 d_0 + (n \cdot m_w) d_w(n)}{M(n)}, \quad M(n) = m_0 + n \cdot m_w$$

n 个配重绕自身质心的转动惯量：

$$I_{\text{self}}(n) = (n \cdot m_w) \left[\frac{r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2}{4} + \frac{(n \cdot h_w)^2}{12} \right]$$

系统总转动惯量（平行轴定理）：

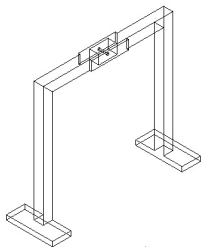
$$I(n) = I_0 + I_{\text{self}}(n) + (n \cdot m_w) d_w(n)^2$$



二、实验器材

1 复摆的周期规律验证

- 3D 打印件（支架与摆锤）



图：支架



图：摆锤



二、实验器材

1 复摆的周期规律验证

- **配重**: 圆环形, 内径 4.0 mm, 外径 12.0 mm, 厚 2.6 mm, 单片 1.76 g
- **摆锤参数**: 3D 打印件, 密度 $\rho = 1.21 \text{ g/cm}^3$, 实测质量 $m_0 = 1.17 \text{ g}$, 体积 $V = 967 \text{ mm}^3$; 质心坐标 (7.3, 7.0, 45.9) mm, 转轴通过 (10.5, 102.0) mm, 质心距 $d_0 = 56.2 \text{ mm}$; 绕质心转动惯量 $I_{\text{cm}} = 1.53 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$, 绕实际转轴 $I_0 = 5.22 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$



二、实验器材

1 复摆的周期规律验证

```
1 clear;close;clc;
2 V = 966.7461; % 模型体积 (mm³) - 由 RigidBodyParams 输出
3 m = 1.17; % 实际打印件质量 (g)
4 C = [7.2750, 7.0000, 45.9254];
5 x0 = 10.5;
6 z0 = 102;
7 fprintf('模型体积 V = %.4f mm³\n', V);
8 rho = m / V; % 密度 (g/mm³)
9 fprintf('打印件质量 m = %.2f g\n', m);
10 fprintf('材料密度 ρ = %.6f g/mm³ (约 %.1f kg/m³)\n', rho, rho*1e9);
11 RBP = RigidBodyParams(stlread('hook.stl'));
12 I_vol = RBP.inertia_tensor;
13
14 I_vol_yy = I_vol(2,2);
15 I_cm_yy = rho * I_vol_yy;
16 d2 = (C(1) - x0)^2 + (C(3) - z0)^2;
17 d = sqrt(d2);
18 I_axis = I_cm_yy + m * d2;
19
20 fprintf('质心坐标 (mm): [%.4f, %.4f, %.4f]\n', C);
21 fprintf('转动轴位置: 平行于 Y 轴, 经过 (x = %.1f, z = %.1f)\n', x0, z0);
22 fprintf('质心到轴的距离 d = %.4f mm\n', d);
23 fprintf('\n绕质心 Y 轴的体积惯性矩 I_vol_yy = %.2f mm⁵\n', I_vol_yy);
24 fprintf('绕质心 Y 轴的质量惯性矩 I_cm = %.2f g·mm²\n', I_cm_yy);
```

命令行窗口

模型体积 V = 966.7461 mm³
打印件质量 m = 1.17 g
材料密度 ρ = 0.001210 g/mm³ (约 1210245.4 kg/m³)
质心坐标 (mm): [7.2750, 7.0000, 45.9254]
转动轴位置: 平行于 Y 轴, 经过 (x = 10.5, z = 102.0)
质心到轴的距离 d = 56.1673 mm

绕质心 Y 轴的体积惯性矩 I_vol_yy = 1264131.82 mm⁵
绕质心 Y 轴的质量惯性矩 I_cm = 1529.91 g·mm²
平行轴附加项 m·d² = 3691.07 g·mm²
绕指定轴的转动惯量 I = 5220.98 g·mm²
(= 5.220981e-06 kg·m²)

图: 数据处理界面



三、实验设计

1 复摆的周期规律验证

本实验通过精密改变质量分布，探究复摆微振幅周期与 I 、 D 的非线性关系，并在对数坐标下验证理论公式。

核心创新：

- 采用高帧率视频 + Tracker 视觉追踪 + MATLAB FFT 提取周期，消除人为误差和传感器附加质量干扰。
- 3D 打印支架带配重挂载轴，离散改变总质量 M 、质心距 D 、转动惯量 I ，获得丰富数据用于回归分析。



四、实验步骤

1 复摆的周期规律验证

1. 装置预处理与参数记录：组装支架，调平转轴；记录空载质量 m_0 、质心距 d_0 、转动惯量 I_0 及配重参数。
2. 视觉追踪环境搭建：架设摄像机（60 fps），光轴垂直于摆平面，对准转轴正下方，设置高对比度标记点。
3. 动态数据采集：空载（ $n = 0$ ）释放，录制至少 10 个周期；依次增加配重 $n = 1 \sim 19$ ，重复录制，保持初始摆角一致。
4. 视频解析与轨迹导出：Tracker 标定比例尺，提取标记点 (x, y, t) 时间序列。



五、数据处理

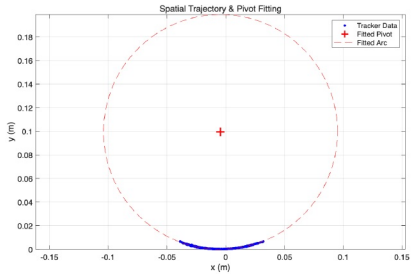
1 复摆的周期规律验证

- 最小二乘圆拟合得真实转轴中心 (x_c, y_c) 。
- 角位移 $\theta(t) = \arctan \frac{y-y_c}{x-x_c}$ 。
- 去趋势项 + 汉宁窗 $\rightarrow$ FFT, 取峰值频率 f_{peak} , 实验周期 $T_{\text{exp}} = 1/f_{\text{peak}}$ 。

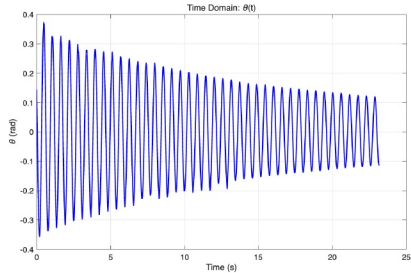


五、数据处理

1 复摆的周期规律验证



图：确定转动轴



图：角位移-时间



五、数据处理

1 复摆的周期规律验证

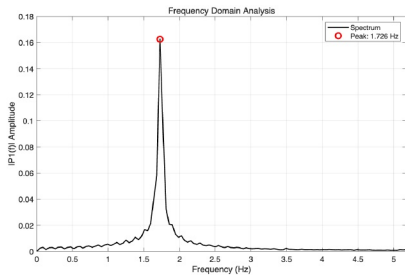


图: FFT 频谱

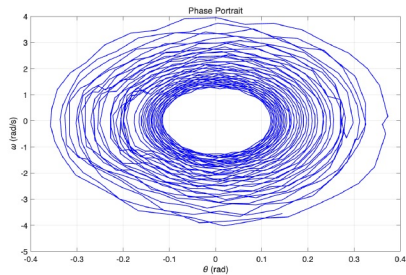


图: 相图



五、数据处理

1 复摆的周期规律验证

$$I_{\text{self}}(n) = (nm_w) \left[\frac{r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2}{4} + \frac{(nh_w)^2}{12} \right]$$

$$M(n) = m_0 + nm_w, \quad D(n) = \frac{m_0 d_0 + (nm_w) d_w(n)}{M(n)}, \quad I(n) = I_0 + I_{\text{self}}(n) + (nm_w) d_w(n)^2$$

代入数值 (单位 $\text{g} \cdot \text{mm}^2$):

$$I(n) = 5.22 \times 10^3 + 1.76n \left[10 + \frac{6.76n^2}{12} \right] + 1.76n(97 - 1.3n)^2$$



数据表 ($n = 0 \sim 9$)

1 复摆的周期规律验证

n	D (m)	I ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	M (kg)	T_{theory} (s)	T_{exp} (s)
0	5.62×10^{-2}	5.22×10^{-6}	1.17×10^{-3}	0.566	0.574
1	7.99×10^{-2}	2.14×10^{-5}	2.93×10^{-3}	0.606	0.604
2	8.49×10^{-2}	3.66×10^{-5}	4.69×10^{-3}	0.609	0.613
3	8.64×10^{-2}	5.11×10^{-5}	6.45×10^{-3}	0.608	0.613
4	8.67×10^{-2}	6.47×10^{-5}	8.21×10^{-3}	0.605	0.611
5	8.65×10^{-2}	7.75×10^{-5}	9.97×10^{-3}	0.602	0.597
6	8.59×10^{-2}	8.96×10^{-5}	1.17×10^{-2}	0.598	0.596
7	8.51×10^{-2}	1.01×10^{-4}	1.35×10^{-2}	0.595	0.590
8	8.43×10^{-2}	1.12×10^{-4}	1.53×10^{-2}	0.591	0.586
9	8.33×10^{-2}	1.21×10^{-4}	1.70×10^{-2}	0.587	0.584

表: 复摆系统参数与周期数据



数据表 ($n = 10 \sim 19$)

1 复摆的周期规律验证

n	D (m)	I ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	M (kg)	T_{theory} (s)	T_{exp} (s)
10	8.23×10^{-2}	1.31×10^{-4}	1.88×10^{-2}	0.584	0.583
11	8.12×10^{-2}	1.39×10^{-4}	2.05×10^{-2}	0.580	0.578
12	8.01×10^{-2}	1.47×10^{-4}	2.23×10^{-2}	0.576	0.575
13	7.89×10^{-2}	1.54×10^{-4}	2.41×10^{-2}	0.572	0.569
14	7.78×10^{-2}	1.61×10^{-4}	2.58×10^{-2}	0.569	0.568
15	7.66×10^{-2}	1.67×10^{-4}	2.76×10^{-2}	0.565	0.567
16	7.54×10^{-2}	1.73×10^{-4}	2.93×10^{-2}	0.561	0.563
17	7.42×10^{-2}	1.78×10^{-4}	3.11×10^{-2}	0.558	0.559
18	7.30×10^{-2}	1.83×10^{-4}	3.29×10^{-2}	0.554	0.553
19	7.18×10^{-2}	1.87×10^{-4}	3.46×10^{-2}	0.551	0.550

表: 复摆系统参数与周期数据 (续)



线性回归验证

1 复摆的周期规律验证

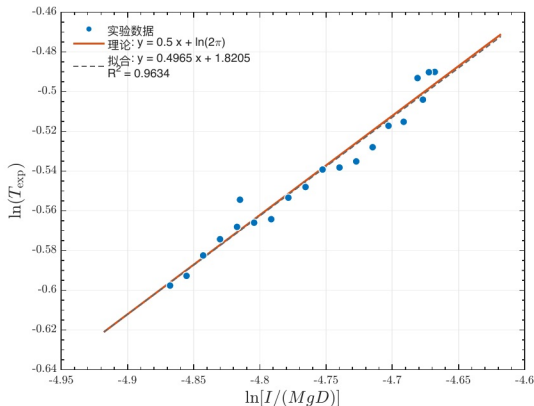
对周期公式取对数：

$$\ln T = \frac{1}{2} \ln \frac{I}{MgD} + \ln(2\pi)。$$

令 $X = \ln \frac{I}{MgD}$, $Y = \ln T_{\text{exp}}$, 线性拟合得：

- 斜率：0.4965（理论 0.5，偏差 0.0035，相对误差 0.070%）
- 截距：1.8205（理论 $\ln(2\pi) \approx 1.8379$ ）
- $p = 0.8785$ ，在 95% 置信水平下不拒绝斜率 = 0.5 的假设。

微小截距偏差可能源于 3D 打印件参数的系统误差，但不影响核心物理关系。



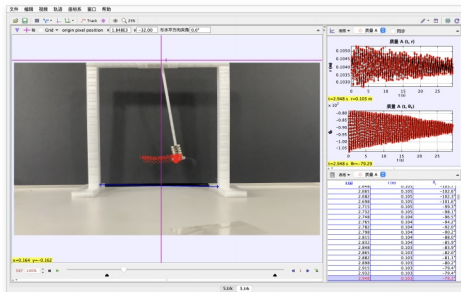
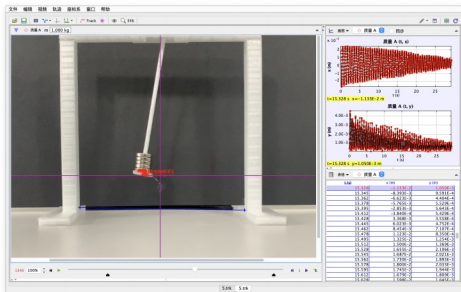
图：实验数据与理论对比



六、误差分析

1 复摆的周期规律验证

1. **3D 打印非均质性**: 内部网格填充率导致质量分布不均, CAD 估算的 d_0 、 I_0 与真实值存在系统偏差。
2. **空气阻尼效应**: 实测周期 T_{exp} 因阻尼而略大于无阻尼理论值 ($\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$)。
3. **光学畸变**: 短焦镜头产生径向畸变, 光轴不垂直引入透视畸变, 破坏坐标线性映射。





七、改进方法和建议

1 复摆的周期规律验证

- **材料与标定：**采用均质 CNC 加工件，用双线摆/三线摆精确标定 I_0 、 d_0 。
- **减阻设计：**流线型外壳包裹配重，或置于低压真空罩中。
- **视觉校准：**使用 85mm 以上中长焦镜头，棋盘格标定相机内参，MATLAB 抗畸变处理。



Table of Contents

2 弹簧摆的混沌特性研究

► 复摆的周期规律验证

► 弹簧摆的混沌特性研究



一、实验原理简述

2 弹簧摆的混沌特性研究

弹簧摆：轻质弹簧 + 摆锤，自由度 r （伸长量）和 θ （摆角）。拉格朗日函数：

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (l_0 + r)^2\dot{\theta}^2) - \left[\frac{1}{2}kr^2 - mg(l_0 + r)\cos\theta \right]$$

运动方程：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[m(l_0 + r)^2\dot{\theta}] + mg(l_0 + r)\sin\theta = 0 \\ m\ddot{r} - m(l_0 + r)\dot{\theta}^2 + kr - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

两个线性本征频率：摆模 $\omega_p = \sqrt{g/(l_0 + r_{eq})}$ ，弹簧模 $\omega_s = \sqrt{k/m}$ 。大初始能量下非线性耦合可导致混沌。本实验通过改变初始摆角和拉伸量，视频追踪获取轨迹，计算最大 Lyapunov 指数并绘制相图，定性判断混沌。

参数：弹簧 $k = 5.0 \text{ N/m}$ ，摆球 $m = 43.5 \text{ g}$ ，平衡坐标 $(0, -0.272 \text{ m})$ ，弹簧原长 $l_0 \approx 0.187 \text{ m}$ 。



二、实验器材

2 弹簧摆的混沌特性研究

- 21006 弹簧 ($k = 5.0 \text{ N/m}$, 自由长度约 18.7 cm)
- 摆球 (43.5 g , 带高对比度标记)
- 固定支架 (热熔胶固定弹簧上端)
- 智能手机 ($4\text{K } 60\text{fps}$), 三脚架, 光轴垂直于运动平面, 拍摄距离约 20 cm
- 标定杆 (6.45 cm)
- Tracker 软件, MATLAB



三、实验设计

2 弹簧摆的混沌特性研究

控制参数：初始摆角 θ_0 与初始拉伸 Δl_0 。

1. 固定 $\Delta l_0 = 0$ ，改变 $\theta_0 = 5^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ$ 。
2. 固定 $\theta_0 = 0^\circ$ ，改变 $\Delta l_0 = 1, 2, 4, \dots$ cm。

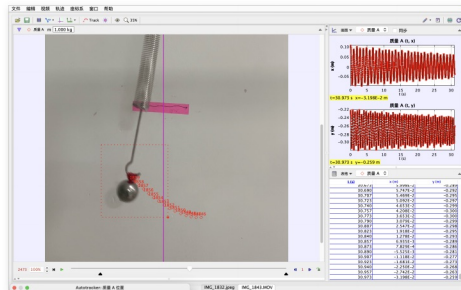
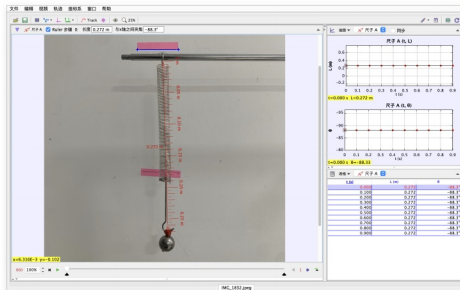
每组录制 30 s 以上 (60 fps)，输出 θ - $\dot{\theta}$ 相图和最大 Lyapunov 指数 λ_1 ，定性判断混沌。



四、实验步骤

2 弹簧摆的混沌特性研究

1. 搭建装置，手机光轴与运动平面垂直，标定杆放入平面。
2. 平衡标定：录制静止视频，Tracker 测平衡坐标，计算弹簧原长。
3. 标定：录制标定杆，建立像素 - 实际长度关系。
4. 数据采集：手拉摆锤至预设位置（角度 + 拉伸），静止 2s 后无初速释放，每组重复 3 次。
5. 视频导入 Tracker，自动追踪标记点，导出 (t, x, y) 数据。



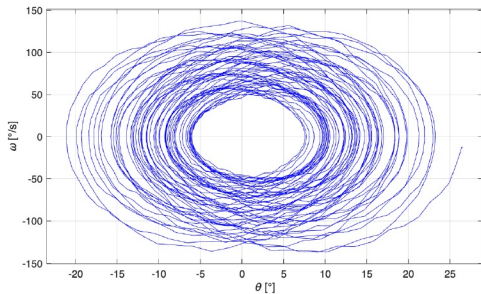


五、数据处理

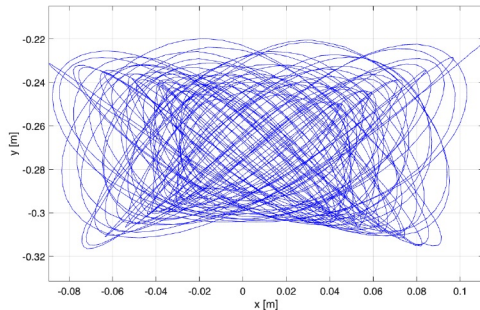
2 弹簧摆的混沌特性研究

悬挂点为原点， y 轴向下。摆长 $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，伸长量 $r = l - l_0$ ，摆角 $\theta = \arctan(x/y)$ 。中心差分求 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{r}$ 。

绘制 θ - $\dot{\theta}$ 相图：规则运动为封闭曲线，混沌为不重复的吸引子。



图：弹簧摆相图



图：二维轨迹



五、数据处理

2 弹簧摆的混沌特性研究

采用 Rosenstein 算法从 $\theta(t)$ 重构相空间（互信息法确定 τ ，虚假近邻法确定 m ），计算最大 Lyapunov 指数 λ_1 。若 $\lambda_1 > 0$ ，则存在混沌。本实验条件下 $\lambda_1 = 0.134$ ，表明系统混沌。



Lyapunov 指数结果

2 弹簧摆的混沌特性研究

Δl (cm)	$\lambda_{\max}$ (s^{-1})
0.00	0.0728
2.00	0.1690
4.00	0.0031
6.00	0.0953
8.00	0.0983

表: 固定 $\theta_0 = 30^\circ$

θ_0 ($^\circ$)	$\lambda_{\max}$ (s^{-1})
10	0.1300
20	0.0631
30	0.0033
40	0.1327
50	0.1105
60	0.0943

表: 固定 $\Delta l = 4.00$ cm



六、误差分析

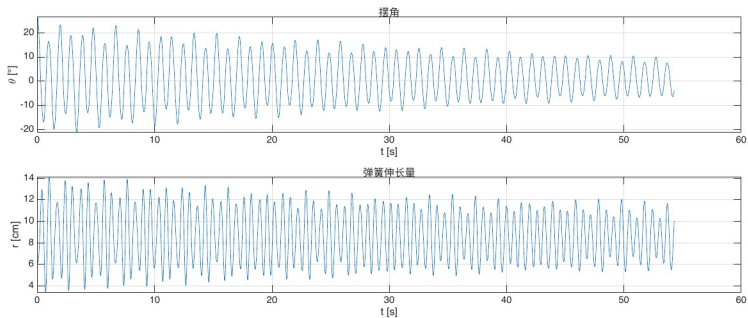
2 弹簧摆的混沌特性研究

- 弹簧大伸长下可能偏离线性，劲度系数重复性有限。
- 手动释放难以精确复现初始条件，可能引入微小初速度。
- 无导向约束使摆动平面旋转，二维投影偏差。
- 60 fps 采样可能对高频分量混叠；手机广角近摄产生径向畸变。
- 空气阻力使能量持续衰减，吸引子可能长时间漂移。



六、误差分析

2 弹簧摆的混沌特性研究





七、改进方法和建议

2 弹簧摆的混沌特性研究

- 精密弹簧，预先标定线性范围和 k 值。
- 高速相机（200 fps 以上）+ 长焦镜头远摄，相机标定校正畸变。
- 电磁铁吸附 - 断电释放装置，精确设定初始条件。
- 低压舱内实验，减小空气阻力。
- 加装透明挡板或气浮导轨约束运动为二维平面。