



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

物理开放实验报告

复摆的周期规律验证
弹簧摆的混沌特性研究

课程名称: 基础物理实验

姓名:



学院:

钱学森学院

专业:

少年班 2404

学号:



指导老师:

2026 年 4 月 28 日

西安交通大学实验报告

专业：少年班 2404
姓名：
学号：
日期：2026 年 4 月 28 日
地点：

课程名称：基础物理实验
实验名称：复摆的周期规律验证
指导老师：
实验类型：开放实验
成绩：
同组学生姓名：

一、实验原理简述

1. 动力学方程

复摆在重力作用下偏离平衡位置 θ 时，恢复力矩为 $\tau = -MgD \sin \theta$ 。根据牛顿第二定律转动形式：

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + MgD \sin \theta = 0$$

2. 微振幅周期公式

在小角度摆动 ($\theta \leq 5^\circ$) 下， $\sin \theta \approx \theta$ ，系统近似为简谐振动：

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{MgD}{I} \theta = 0$$

固有角频率 $\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}}$ ，由此得到复摆周期理论公式：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

3. 系统质心距和转动惯量

摆锤质量 m_0 ，质心距 d_0 ，转动惯量 I_0 。配重质量 m_w ，厚度 h_w ，底部距转轴 L_{bottom} 。
系统总质心距 $D(n)$ 有：

$$D(n) = \frac{m_0 d_0 + (n \cdot m_w) d_w(n)}{M(n)}$$

其中 $M(n) = m_0 + n \cdot m_w$

将 n 个配重组合视为一个整体，其绕自身质心的转动惯量为：

$$I_{self}(n) = (n \cdot m_w) \left[\frac{r_{in}^2 + r_{out}^2}{4} + \frac{(n \cdot h_w)^2}{12} \right]$$

结合平行轴定理，系统总转动惯量 $I(n)$ 通项公式为：

$$I(n) = I_0 + I_{self}(n) + M_{weights} \cdot d_w(n)^2$$

二、 实验器材

1. 3D 打印件

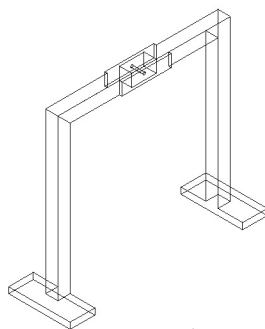


图 1: 支架

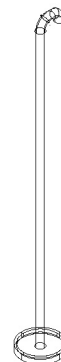


图 2: 摆锤

2. 配重

圆环形配重，内直径 4.0mm，外直径 12.0mm，厚度 2.6mm，重量为 1.76g/个

3. 摆锤

本实验所用摆锤为 3D 打印件，材料密度约为 $\rho = 1.210, \text{g/cm}^3$ (即 $1210, \text{kg/m}^3$)，实测质量 $m_0 = 1.17, \text{g}$ ，模型体积 $V = 966.75, \text{mm}^3$ 。其质心坐标为 $(7.28, 7.00, 45.93), \text{mm}$ 。转动轴平行于 Y 轴，并通过点 $(x = 10.5, z = 102.0), \text{mm}$ 。经计算，质心到转轴的垂直距离为

$$d_0 = 56.17, \text{mm}.$$

绕通过质心且平行于转轴的 Y 轴的质量转动惯量为

$$I_{\text{cm}} = 1529.91, \text{g} \cdot \text{mm}^2,$$

根据平行轴定理，绕实际转轴的总转动惯量为

$$I_0 = I_{\text{cm}} + m_0 d_0^2 = 1529.91 + 3691.07 = 5220.98, \text{g} \cdot \text{mm}^2$$

该参数将作为复摆系统的基础转动惯量 I_0 和质心距 d_0 。用于后续理论周期计算与实验对比。

```

1 clear;close;clc;
2 V = 966.7461; % 模型体积 (mm³) - 由 RigidBodyParams 输出
3 m = 1.17; % 实际打印件质量 (g)
4 C = [7.2750, 7.0000, 45.9254];
5 x0 = 10.5;
6 z0 = 102;
7 fprintf('模型体积 V = %.4f mm³\n', V);
8 rho = m / V; % 密度 (g/mm³)
9 fprintf('打印件质量 m = %.2f g\n', m);
10 fprintf('材料密度 p = %.6f g/mm³ (约 %.1f kg/m³)\n', rho, rho*1e9);
11 RBP = RigidBodyParams(stlread('hook.stl'));
12 I_vol = RBP.inertia_tensor;
13
14 I_vol_yy = I_vol(2,2);
15 I_cm_yy = rho * I_vol_yy;
16 d2 = (C(1) - x0)^2 + (C(3) - z0)^2;
17 d = sqrt(d2);
18 I_axis = I_cm_yy + m * d2;
19
20 fprintf('质心坐标 (mm): [%.4f, %.4f, %.4f]\n', C);
21 fprintf('转动轴位置: 平行于 Y 轴, 经过 (x = %.1f, z = %.1f)\n', x0, z0);
22 fprintf('质心到轴的距离 d = %.4f mm\n', d);
23 fprintf('\n绕质心 Y 轴的体积惯性矩 I_vol_yy = %.2f mm³\n', I_vol_yy);
24 fprintf('绕质心 Y 轴的质量惯性矩 I_cm = %.2f g·mm²\n', I_cm_yy);

```

命令窗口

```

模型体积 V = 966.7461 mm³
打印件质量 m = 1.17 g
材料密度 p = 0.001210 g/mm³ (约 1210.2454 kg/m³)
质心坐标 (mm): [7.2750, 7.0000, 45.9254]
转动轴位置: 平行于 Y 轴, 经过 (x = 10.5, z = 102.0)
质心到轴的距离 d = 56.1673 mm

绕质心 Y 轴的体积惯性矩 I_vol_yy = 1264131.82 mm³
绕质心 Y 轴的质量惯性矩 I_cm = 1529.91 g·mm²
平行轴附加项 m·d² = 3691.07 g·mm²
绕指定轴的转动惯量 I = 5220.98 g·mm²
( = 5.220981e-06 kg·m² )

```

图 3: 数据处理

4. 游标卡尺

5. 电子秤

三、 实验设计

本实验旨在通过精密改变复摆系统的质量分布，探究其微振幅振动周期与系统总转动惯量及总质心距之间的非线性关系，并最终在对数尺度下验证复摆周期的理论公式。

传统的复摆实验大多采用光电门或人工秒表计时，存在较大的系统误差与偶然误差。为实现高精度测量，本实验在设计上进行了以下几项核心创新：

实验摒弃了接触式传感器，采用高帧率视频采集结合 Tracker 视觉追踪技术获取摆锤的二维运动轨迹 (x, y) 。随后利用 MATLAB 算法将空域轨迹转化为真实的角位移时间序列 $\theta(t)$ ，并通过快速傅里叶变换（FFT）提取主频分量以计算真实周期。此设计不仅完全消除了人为读数反应时间带来的误差，还避免了传感器附加质量对弱阻尼摆动系统的干扰。

实验采用 3D 打印支架作为复摆基座，在摆锤底部设计了配重挂载轴。通过逐个增加标准质量的圆环柱配重（单片质量 1.76 g），实现了对系统总质量 M 、总质心距 D 以及总转动惯量 I 的离散化精细调控，从而获得足够多的数据点用于统计回归分析。

针对配重组件的物理特性，实验设计摒弃了粗糙的“质点近似”或“一维线段近似”。考虑到配重块具有不可忽略的内半径（2.0 mm）与外半径（6.0 mm），其实际物理模型为空心圆柱体。因此，本实验在设计阶段便引入了包含径向转动惯量贡献的严密计算模型，以确保自变量系统参数的理论值具备极高的逼真度。

四、 实验步骤

1. 装置预处理与参数记录

组装 3D 打印复摆支架，将其悬挂于支架上，调整底座直至转轴处于严格的水平状态。记录 3D 打印支架的初始参数：空载质量 m_0 、空载质心距 d_0 以及计算空载转动惯量 I_0 。记录单片配重的质量、厚度以及内外径参数。

2. 视觉追踪环境搭建

在复摆正前方架设摄像设备（设定采样频率为 60 fps）。为避免透视误差，需确保摄像机光轴与复摆静止时的摆线垂直，且镜头中心对准复摆转轴正下方。在摆锤末端显眼位置设置高对比度的追踪标记点。

3. 动态数据采集

记录空载状态（配重数量 $n = 0$ ）下的摆动视频。将摆锤拉至偏离平衡位置较小的角度（确保 $\theta < 5^\circ$ ，以满足简谐振动近似条件）后无初速释放。录制至少 10 个完整衰减周期的运动过程。依次在摆锤底部添加配重，数量 n 从 1 递增至 13，重复上述释放与录制过程，确保每次初始摆角基本一致。

4. 视频解析与轨迹导出

将所有视频导入 Tracker 软件。在画面中建立空间比例尺（如利用已知长度的支架杆进行标定）。提取摆锤标记点在二维平面内的轨迹，并导出包含时间 t 、横坐标 x 与纵坐标 y 的时间序列数据表。

五、 数据处理

实验数据的处理分为特征提取与理论验证两个核心环节，全程依托 MATLAB 编程实现自动化与高精度运算。

1. 轨迹修正与主频提取

Tracker 标定的坐标原点往往与复摆真实的物理转动轴存在偏差，且直接利用横坐标 $x(t)$ 替代弧长会引入大角度下的非线性畸变。首先，采用最小二乘法对导出的 (x, y) 轨迹点进行圆拟合，解算出真实的转轴中心坐标 (x_c, y_c) 。随后，通过反正切函数还原出真实的无平移误差角位移：

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y - y_c}{x - x_c}\right)$$

对 $\theta(t)$ 序列进行消除趋势项处理并施加汉宁窗（Hanning Window）后，执行快速傅里叶变换（FFT）。在幅频响应图谱中精确定位振幅最大的峰值频率 f_{peak} ，由此求得对应配重状态下的实验周期 $T_{exp} = 1/f_{peak}$ 。

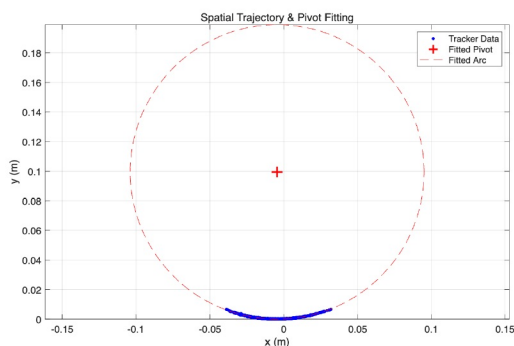


图 4: 确定转动轴

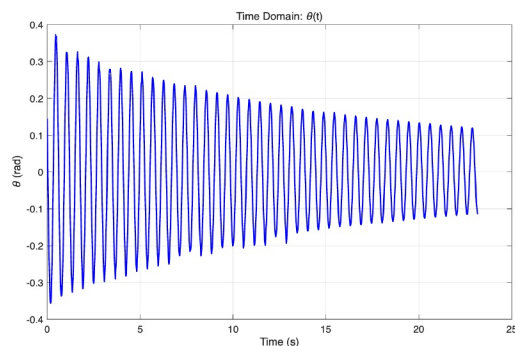


图 5: 角位移-时间图像

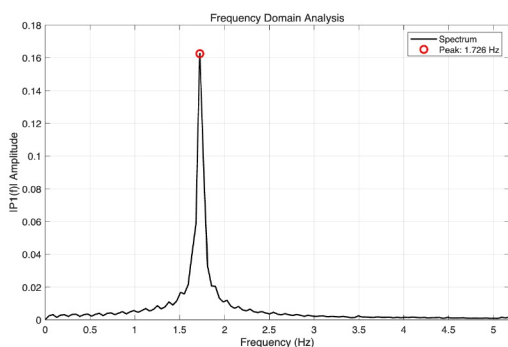


图 6: FFT 频谱图

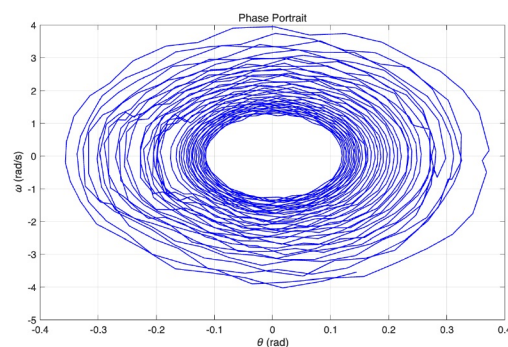


图 7: 相图

2. 理论模型重构与对数线性回归

根据刚体动力学，由 n 个内半径 r_{in} 、外半径 r_{out} 、单片厚度 h_w 的配重组成的复合结构，其绕自身质心的转动惯量为：

$$I_{\text{self}}(n) = (n \cdot m_w) \left[\frac{r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2}{4} + \frac{(n \cdot h_w)^2}{12} \right]$$

结合平行轴定理，计算出每一组实验下系统的总参数：

- 总质量： $M(n) = m_0 + n \cdot m_w$
- 整体质心距： $D(n) = \frac{m_0 d_0 + (n \cdot m_w) d_w(n)}{M(n)}$
- 总转动惯量： $I(n) = I_0 + I_{\text{self}}(n) + (n \cdot m_w) d_w(n)^2$

带入具体数值，有：

$$I(n) = 5220.98 + 1.76n \left[10 + \frac{6.76n^2}{12} \right] + 1.76n(97 - 1.3n)^2 \quad (\text{g} \cdot \text{mm}^2)$$

n	D (m)	I (kg m ²)	M (kg)	T_{theory} (s)	T_{exp} (s)
0	5.61673×10^{-2}	5.22098×10^{-6}	1.17000×10^{-3}	0.565729	0.574400
1	7.99139×10^{-2}	2.13585×10^{-5}	2.93000×10^{-3}	0.606188	0.604100
2	8.48622×10^{-2}	3.66321×10^{-5}	4.69000×10^{-3}	0.608911	0.612600
3	8.64006×10^{-2}	5.10655×10^{-5}	6.45000×10^{-3}	0.607565	0.612500
4	8.67220×10^{-2}	6.46826×10^{-5}	8.21000×10^{-3}	0.604957	0.610700
5	8.64710×10^{-2}	7.75071×10^{-5}	9.97000×10^{-3}	0.601804	0.597400
6	8.59052×10^{-2}	8.95629×10^{-5}	1.17300×10^{-2}	0.598373	0.596200
7	8.51478×10^{-2}	1.00874×10^{-4}	1.34900×10^{-2}	0.594789	0.589800
8	8.42652×10^{-2}	1.11463×10^{-4}	1.52500×10^{-2}	0.591117	0.585600
9	8.32962×10^{-2}	1.21355×10^{-4}	1.70100×10^{-2}	0.587397	0.583800
10	8.22651×10^{-2}	1.30574×10^{-4}	1.87700×10^{-2}	0.583654	0.583200
11	8.11879×10^{-2}	1.39143×10^{-4}	2.05300×10^{-2}	0.579905	0.578100
12	8.00755×10^{-2}	1.47086×10^{-4}	2.22900×10^{-2}	0.576165	0.575000
13	7.89357×10^{-2}	1.54426×10^{-4}	2.40500×10^{-2}	0.572444	0.568800
14	7.77740×10^{-2}	1.61189×10^{-4}	2.58100×10^{-2}	0.568752	0.567800
15	7.65947×10^{-2}	1.67396×10^{-4}	2.75700×10^{-2}	0.565096	0.566600
16	7.54009×10^{-2}	1.73073×10^{-4}	2.93300×10^{-2}	0.561484	0.563100
17	7.41950×10^{-2}	1.78243×10^{-4}	3.10900×10^{-2}	0.557924	0.558500
18	7.29791×10^{-2}	1.82929×10^{-4}	3.28500×10^{-2}	0.554423	0.552800
19	7.17546×10^{-2}	1.87156×10^{-4}	3.46100×10^{-2}	0.550990	0.550100

表 1: 复摆系统参数与周期数据 ($n = 0-19$)

复摆微振幅周期公式为 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$ 。对等式两边取自然对数进行线性化处理：

$$\ln(T) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I}{MgD}\right) + \ln(2\pi)$$

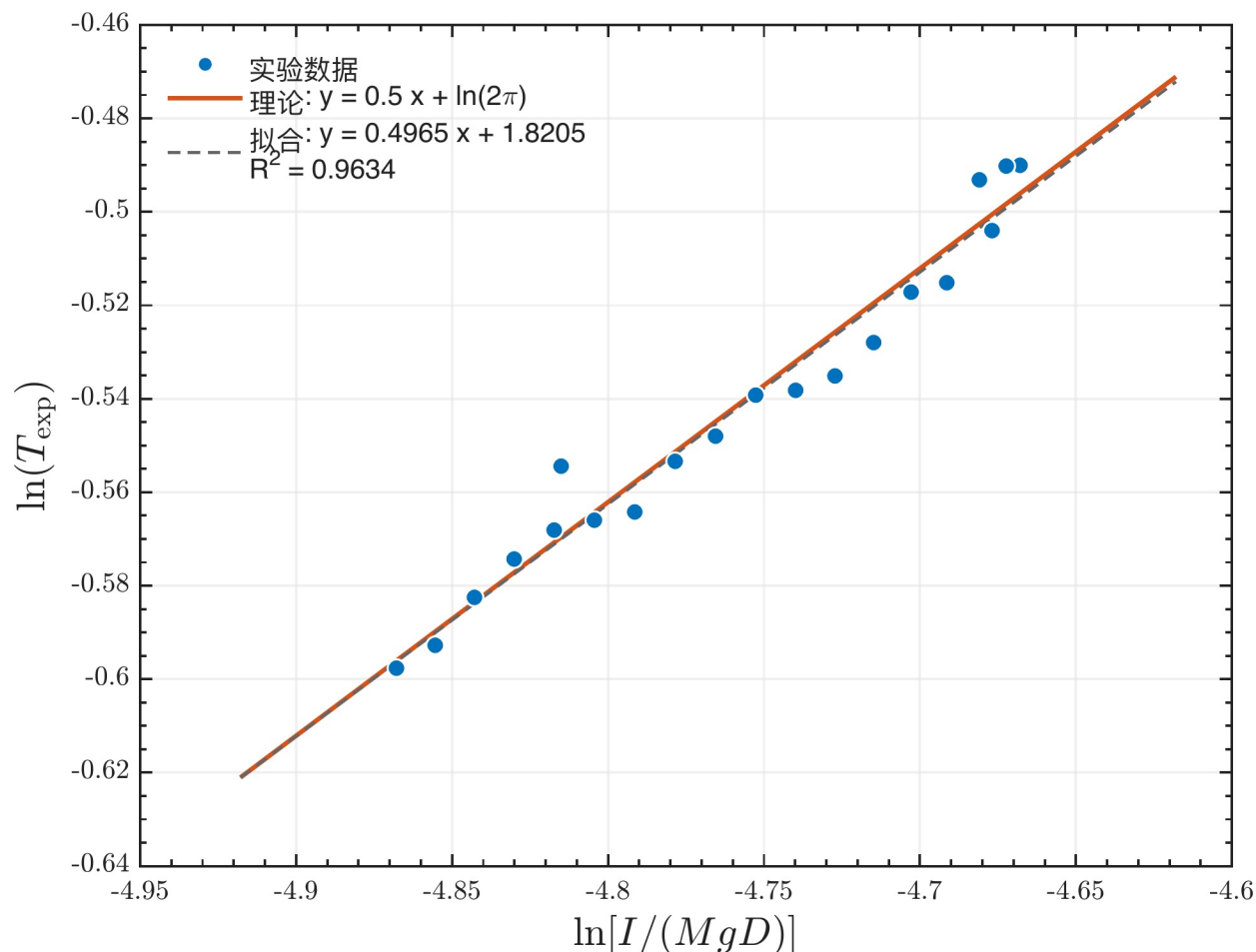


图 8: 实验数据与理论数据对比

令 $X = \ln\left(\frac{I}{MgD}\right)$, $Y = \ln(T_{\text{exp}})$, 使用一元一次多项式对实验散点进行拟合, 计算拟合直线的斜率与截距, 并与理论斜率 (0.5) 和理论截距 ($\ln(2\pi)$) 进行对比。

拟合斜率 0.4965 与理论值 0.5 的偏差仅为 0.0035, 相对误差 0.070%, $p=0.8785$, 在 95% 置信水平下不能拒绝斜率等于 0.5 的假设。微小的截距 (1.8205) 偏离 (理论 1.8379) 可能源于 3D 打印件转动惯量或质心距的标定系统误差, 但不影响核心关系的成立。

六、 误差分析

尽管在数据处理与理论计算层面引入了多项严谨的修正措施, 实验数据的线性回归结果仍可能与理想的理论公式存在微小偏差。主要的系统误差与偶然误差来源分析如下:

1. 3D 打印件的非均质性误差

实验中采用的 3D 打印支架, 其切片文件通常设置了特定的内部网格填充率 (Infill, 如 20% 或 50%)。由于 3D 打印机挤出机在走线时不可避免地存在材料堆积不均、拉丝或孔隙, 导致支架真实的质量分布并不绝对均匀。这使得实验前期代入计算的空载质心距 d_0 和空载转动惯量 I_0 (通常由 CAD

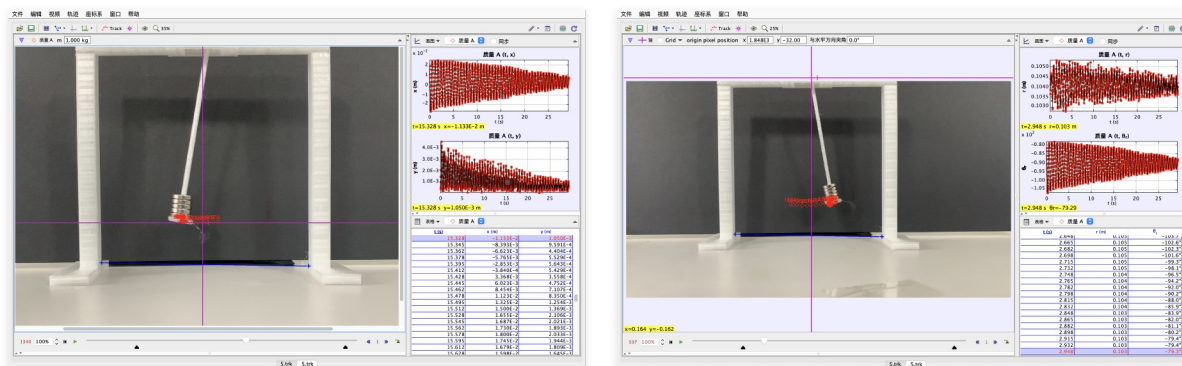
软件的实体模型估算得出）与物理真实值之间存在系统性固有偏差。

2. 空气动力学阻尼效应

复摆周期公式是在无阻尼简谐振动的理想假设下推导得出的。在实际摆动过程中，尤其是在配重数量 n 较大时，摆锤底部的迎风面积显著增加。系统受到的空气阻力以及转轴处的粘滞摩擦力使得复摆表现为阻尼振动。根据阻尼振动理论，实际振动角频率 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ （其中 β 为阻尼系数），这意味着阻尼效应会使得实际测量到的周期 T_{exp} 系统性偏大。

3. 视觉成像系统的光学畸变

在使用摄像机记录轨迹时，若镜头焦距较短（如常规手机主摄），画面边缘容易产生径向畸变（桶形或枕形畸变）。此外，若摄像机光轴未能与复摆运动平面严格垂直，还会引入透视畸变（Perspective Distortion）。这会导致 Tracker 在二维画面中提取的坐标与实际三维空间中的物理位移不再呈严格的线性映射关系，进而对角位移的计算和 FFT 频域分析产生微小的杂波干扰。



七、 改进方法和建议

针对上述分析出的误差来源，为进一步提升该实验的测量精度与物理模型的自洽性，提出以下改进方案：

1. 材料制备与参数预标定

建议废弃内部存在空腔的 3D 打印件，改用密度均匀的高分子材料或铝合金进行数控机床（CNC）加工，以确保结构的绝对均质。在进行主实验前，应使用双线摆或三线摆实验对基座支架的 I_0 和 d_0 进行一次独立的精确物理标定，代替 CAD 软件的粗略估算。

2. 流体力学外形优化

为减小空气阻力带来的阻尼效应，可以优化配重与摆锤的空气动力学外形。例如，将圆柱形配重包裹在具有流线型（如水滴形）外壳的挂载舱内；若条件允许，可将整个实验装置置于低压真空罩内进行，从而最大限度地逼近无阻尼理想物理模型。

3. 视觉采集系统的专业化校准

硬件层面：采用中长焦镜头（如焦距 85 mm 以上）并在较远距离处进行拍摄，利用长焦镜头的空间压缩特性将透视误差降至最低。

软件层面：在正式实验前，使用标准的黑白棋盘格标定板对摄像机进行内参标定（Camera Calibration），求出相机的畸变矩阵，在 MATLAB 中先对视频帧进行抗畸变还原处理，再进行轨迹提取。

西安交通大学实验报告

专业：少年班 2404
姓名：
学号：
日期：2026 年 4 月 28 日
地点：仲英楼 B421

课程名称：基础物理实验 指导老师： 成绩：
实验名称：弹簧摆的混沌特性研究 实验类型：开放实验 同组学生姓名：

一、实验原理简述

弹簧摆是由轻质弹簧和质量为 m 的摆锤组成的二自由度振动系统，可由弹簧伸长量 $r = l - l_0$ 和摆角 θ 描述。忽略弹簧质量与空气阻力时，拉格朗日函数和运动方程为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (l_0 + r)^2\dot{\theta}^2) - \left[\frac{1}{2}kr^2 - mg(l_0 + r)\cos\theta \right],$$
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[m(l_0 + r)^2\dot{\theta}] + mg(l_0 + r)\sin\theta = 0, \\ m\ddot{r} - m(l_0 + r)\dot{\theta}^2 + kr - mg\cos\theta = 0. \end{cases}$$

系统具有两个线性本征频率：摆模频率 $\omega_p = \sqrt{g/(l_0 + r_{eq})}$ 和弹簧模频率 $\omega_s = \sqrt{k/m}$ 。随着初始能量增加，两种模态通过非线性项耦合，运动可从准周期过渡到混沌。本实验通过改变初始摆角和弹簧拉伸量，用视频追踪获得摆锤轨迹，计算最大李雅普诺夫指数并绘制相图，定性判断弹簧摆的混沌运动特征。

实验所用弹簧劲度系数 $k = 5.0 \text{ N/m}$ ，摆球质量 $m = 43.53 \text{ g}$ ，自由静止时摆锤坐标为 $(0, -0.272 \text{ m})$ (y 轴竖直向下，原点在悬挂点)，可求得弹簧原长 $l_0 \approx 0.1867 \text{ m}$ 。

二、实验器材

- 21006 弹簧组弹簧，劲度系数 $k = 5.0 \text{ N/m}$ ，自由长度约 18.7 cm 。
- 摆球，质量 43.53 g ，侧面贴有高对比度追踪标记。
- 固定支架，弹簧上端用热熔胶固结，无导向装置。
- 智能手机（4K 60fps 视频），固定于三脚架，光轴正对运动平面，拍摄距离约 20 cm 。
- 长度标定杆（ 6.45 cm ），用于 Tracker 像素标定。
- Tracker 软件，MATLAB。

三、实验设计

以初始摆角 θ_0 和初始弹簧拉伸量 Δl_0 为控制参数，观察自由释放后的运动形态。

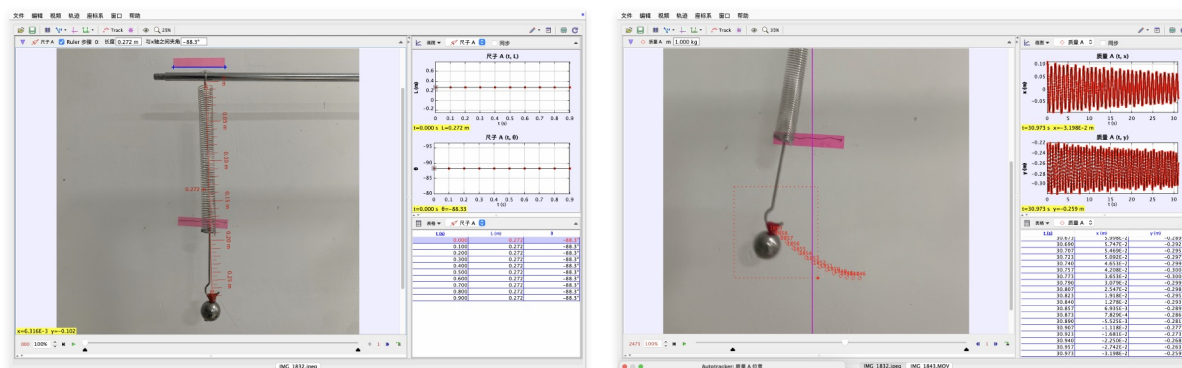
- 固定 $\Delta l_0 = 0$ （静平衡长度），改变 θ_0 ： $5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$ ，观察微幅到大幅摆动时耦合强度变化及可能出现的混沌。

2. 固定 $\theta_0 = 0^\circ$ ，改变 Δl_0 ：1 cm, 2 cm, 4 cm, ...，观察纯垂直激励下的内共振与混沌。

每组录制 30 s 以上视频（60 fps），获得足够数据点数。实验主要输出为 $\theta-\dot{\theta}$ 相图和最大李雅普诺夫指数，定性判断混沌是否发生。

四、实验步骤

1. 搭建装置：弹簧上端固定，手机光轴与运动平面垂直，标定杆置于平面内。
2. 平衡标定：录制静止视频，用 Tracker 测出平衡坐标，计算弹簧原长。
3. 标定：录制标定杆视频，建立像素-实际长度比例。
4. 数据采集：用手将摆锤拉至预设位置（角度和拉伸量复合控制），静止 2 s 后无初速释放，同时录制视频。每组重复 3 次。
5. 视频导入 Tracker，自动追踪标记点，导出时间 t 、水平位移 x 、竖直位移 y 数据。



五、数据处理

1. 坐标变换与运动量提取

以悬挂点为原点， y 轴竖直向下。摆长 $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，伸长量 $r = l - l_0$ ，摆角 $\theta = \arctan(x/y)$ 。用中心差分求出角速度 $\dot{\theta}$ 、径向速度 $\dot{r}$ 。

2. 相图与混沌定性分析

绘制 $\theta-\dot{\theta}$ 相轨迹，观察其几何结构——规则运动对应封闭曲线，混沌运动对应不重复、缠绕的吸引子。

如图 9 所示，相图中展现出吸引子特征。可以认为弹簧摆存在混沌特征。

采用 Rosenstein 算法，从 $\theta(t)$ 时间序列重构相空间（延迟时间 τ 由互信息法确定，嵌入维数 m 由虚假近邻法确定），计算最大 Lyapunov 指数 λ_1 。若 $\lambda_1 > 0$ ，则表明运动对初值敏感，是混沌的有力证据。

在本条件情况下，最大李指数为 0.1338，认为条件下的系统是混沌的。

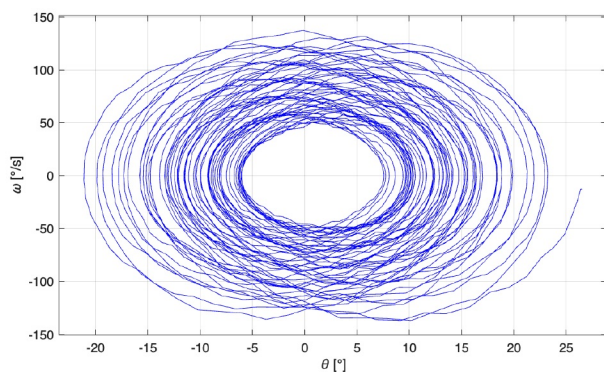


图 9: 弹簧摆的相图

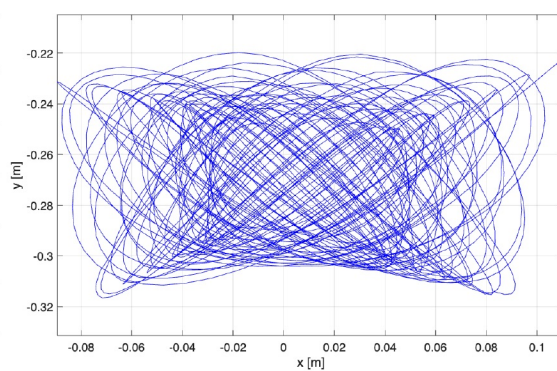


图 10: 弹簧摆的二维轨迹

Δl (cm)	$\lambda_{\max}$ (s^{-1})
0.00	0.0728
2.00	0.1690
4.00	0.0031
6.00	0.0953
8.00	0.0983

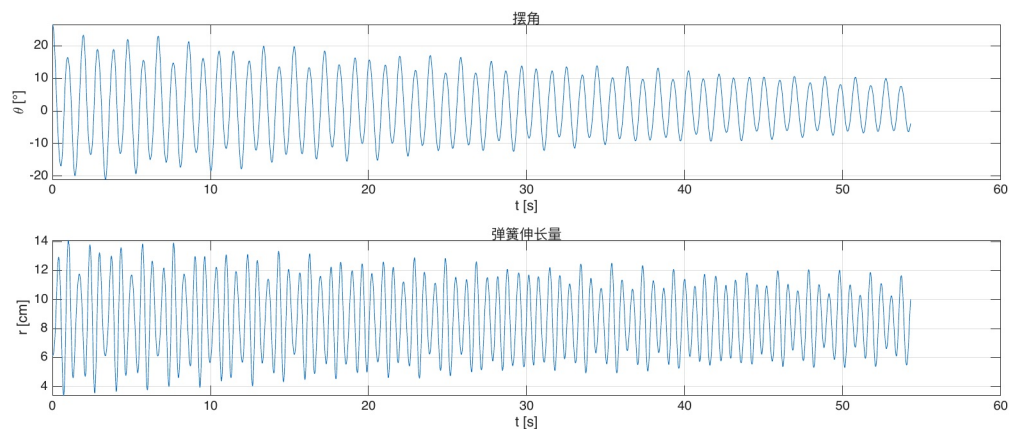
表 2: 固定摆角 $\theta_0 = 30^\circ$

θ_0 ($^\circ$)	$\lambda_{\max}$ (s^{-1})
10	0.1300
20	0.0631
30	0.0033
40	0.1327
50	0.1105
60	0.0943

表 3: 固定拉伸 $\Delta l = 4.00$ cm

六、 误差分析

- 弹簧在大伸长时可能偏离线性，且 21006 弹簧的劲度系数重复性有限。
- 手动释放难以精确复现初始条件，可能引入微小初速度。
- 无导轨约束导致摆动平面旋转，使二维投影模型出现几何偏差。
- 60 fps 采样对高频分量可能存在混叠；手机广角近摄带来径向畸变。
- 空气阻力使系统能量持续衰减，长时间记录下吸引子可能漂移。



七、改进方法和建议

- 采用精密弹簧并预先标定其线性范围和 k 值。
- 使用高速相机（200 fps 以上）与长焦镜头远距离拍摄，并进行相机标定校正畸变。
- 采用电磁铁吸附-断电释放装置精确设定初始条件。
- 在低压舱内进行实验以减小空气阻力。
- 加装透明挡板或气浮导轨，限制运动为二维平面。