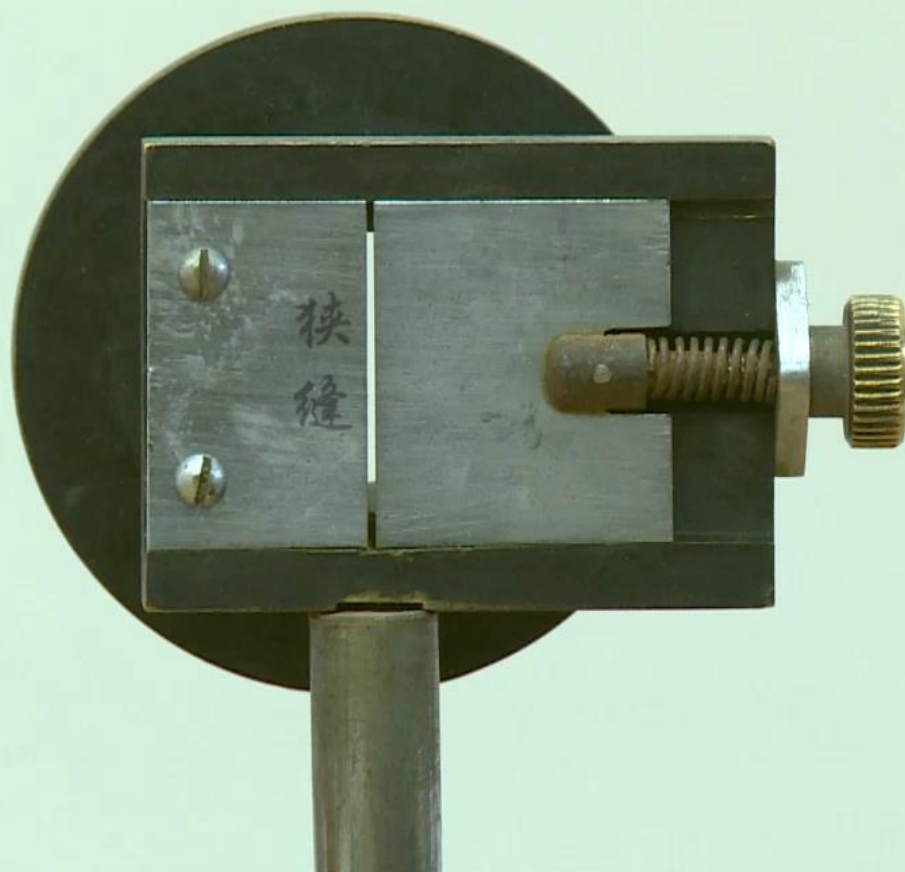


光的衍射

单缝衍射



思考：

(1)请描述下你观看到的现象

定性描述



中央明条纹宽度很宽、很亮，其他明条纹亮度依次减少很多

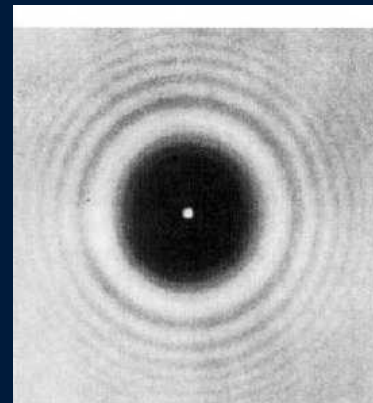
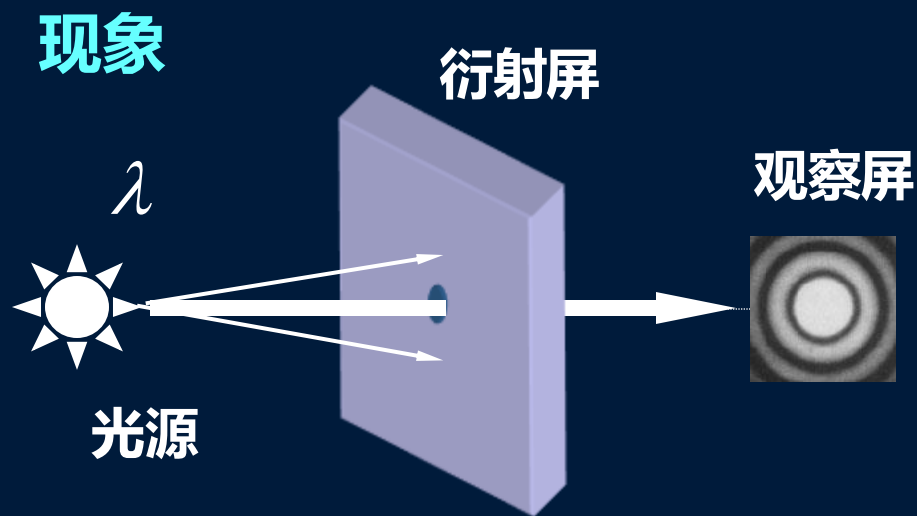
(2)从物理本质上去分析产生现象的原因

定量描述

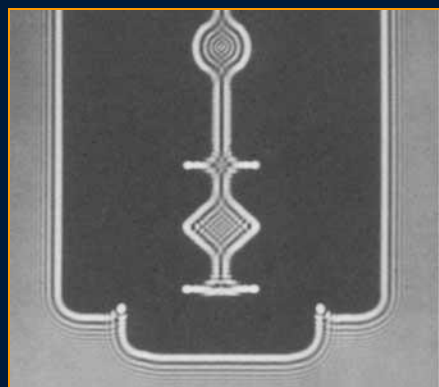
明、暗条纹位置，明条纹宽度，强度分布等

§14.7 惠更斯—菲涅耳原理

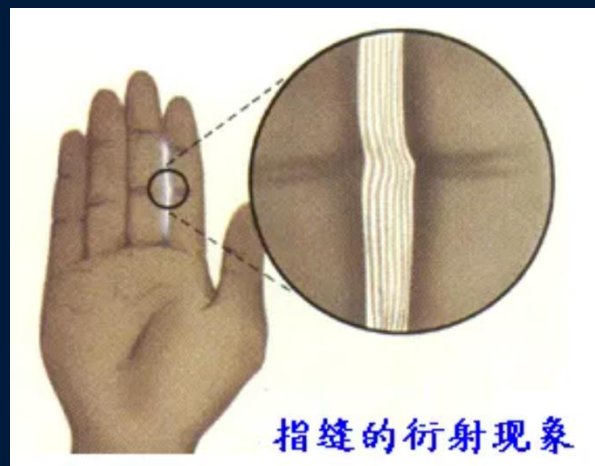
一. 光的衍射现象



圆盘衍射 (泊松点)



(剃须刀边缘衍射)



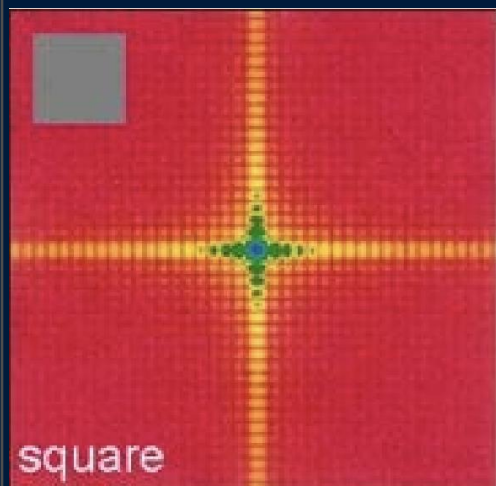
指缝的衍射现象

什么是衍射

- 发现：意大利物理学家格里马尔迪在17世纪首先观察到光的衍射现象；
- 定义：光在传播过程中绕过障碍物而偏离直线传播，并在屏幕上出现光强不均匀的分布现象，叫做**光的衍射**。

★ 说明

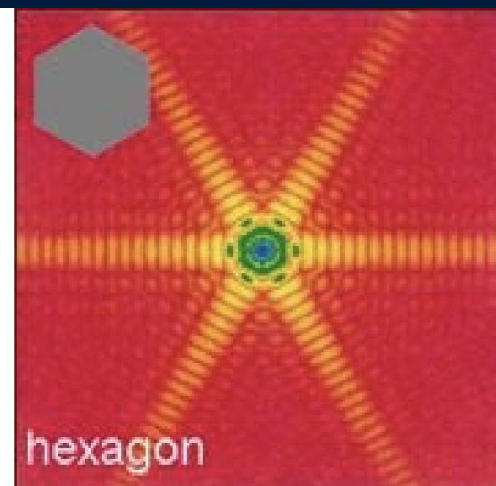
衍射现象是否明显取决于障碍物线度与波长的对比，波长越大，障碍物越小，衍射越明显。



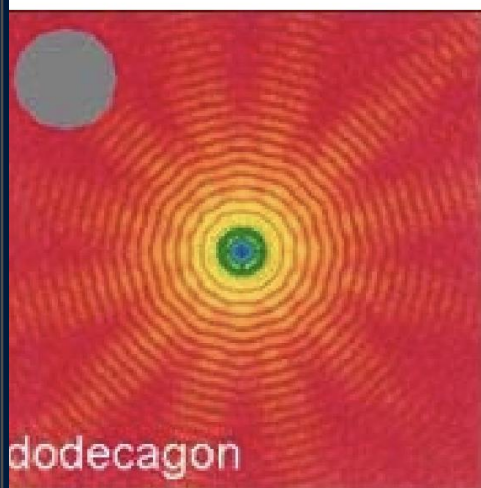
正方形



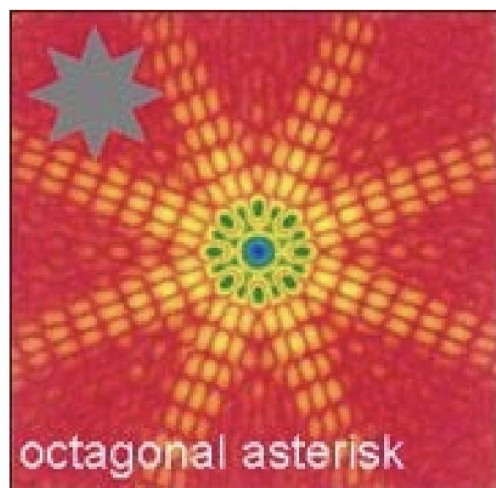
正五边形



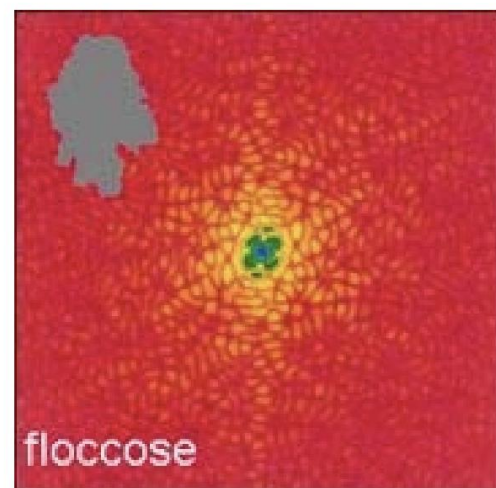
正六边形



正十二边形



星形



不规则形状

惠更斯原理



惠更斯 (Christian Haygen, 1629—1695)

荷兰物理学家、数学家、天文学家。1655年获得法学博士学位，1663年成为伦敦皇家学会的第一位外国会员。他的重要贡献有：

(1) 建立了光的波动学说，打破了当时流行的光的微粒学说，提出了光波面在媒质中传播的惠更斯原理。

(2) 1673年，解决了物理摆的摆动中心问题，测定了重力加速度之值，改进了摆钟，得出了离心力公式，还发明了测微计。

(3) 首先发现了双折射光束的偏振性，并用波动观点作了解释。

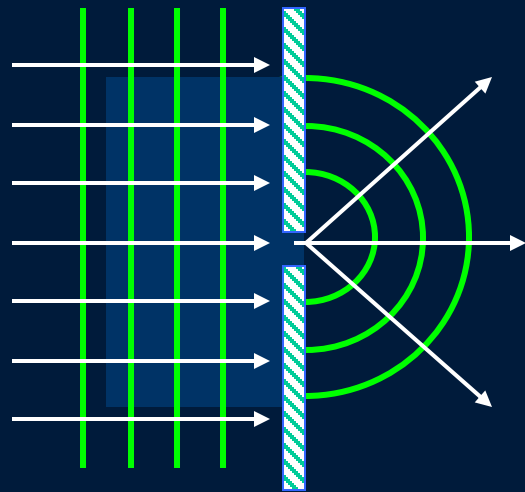
(4) 在天文学方面，他协助自己设计和制造的望远镜，于1665年发现了土星卫星——土卫六，且观察到了土星环。

惠更斯1690年出版著作《论光》，共有22卷。

一. 惠更斯原理

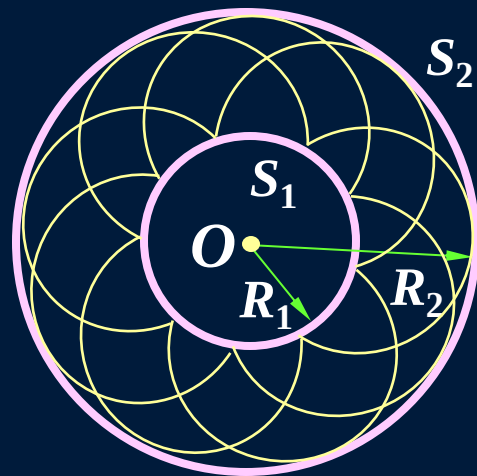
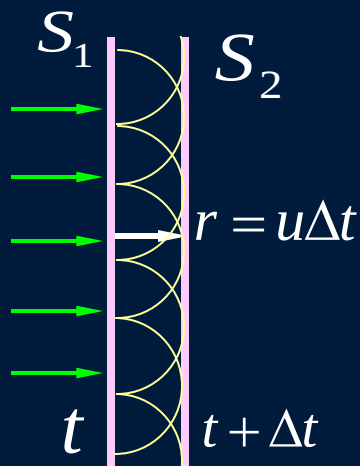
惠更斯提出：（子波原理）

- (1) 光波波面上任意一点都可看作是新的次级波源，并各自向外发出子波；
- (2) 各个子波所形成的包络面，就是原波面在一定时间内所传播到的新波面；
- (3) 波的传播方向即沿子波源与子波面和包络面的切点的连接方向。



说明

知某一时刻波前，
可用几何方法决定
下一时刻波前；

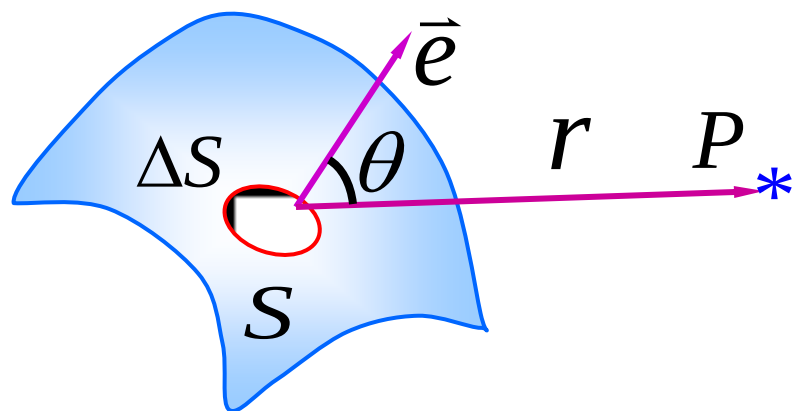


惠更斯原理的成功和局限性：

- 1) 可以解释光的直线传播、反射和折射等现象；
- 2) 惠更斯原理会导致有倒退波的存在，而实际上倒退波是不存在的；
- 3) 原理没有涉及波动的时空周期特性，即波长、振幅、相位等。虽然可以用于确定光的传播方向，但无助于确定沿不同方向传播的光波的振幅和相位大小。

二. 惠更斯—菲涅耳原理

从同一波阵面上各点所发出的子波，经传播而在空间某点相遇时，也可以相互叠加而产生干涉现象。



$S \ t$: 时刻波阵面

ΔS : 波阵面上面元
(子波波源)

ds 子波源发出的子波在P点引起的振动为：

$$dE = C \frac{K(\theta)}{r} \cos(\omega t - kr) dS$$

面积元 dS 所发出的次波的振幅和相位符合以下四个假设：

① 所有次波都有相同的初相位 (令 $\varphi_0 = 0$)

② 次波是球面波

$$dE \propto \frac{1}{r}$$

③ $K(\theta)$: 倾斜因子 $\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0, \quad K = K_{\max} \\ \theta \uparrow \rightarrow K(\theta) \downarrow \\ \theta \geq \frac{\pi}{2}, \quad K = 0 \end{array} \right.$ (无倒退子波, K 无负数)

④ 次波在 P 点处的相位落后于 dS 处振动的相位

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} r = kr$$

❖ 波阵面上所有 dS 面元发出的子波在 P 点引起的合振动为：

$$E = \int dE = \int C \frac{K(\theta)}{r} \cos(\omega t - kr) dS$$

原理内容

- 同一波前上的各点发出的都是相干次波。
- 各次波在空间某点的相干叠加，就决定了该点波的强度。

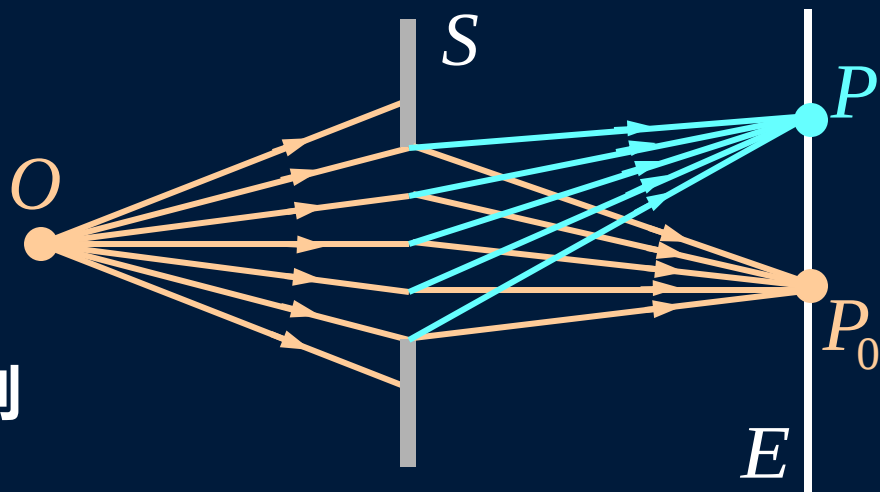
说明

- (1) 对于一般衍射问题，用积分计算相当复杂，实际中常用半波带法和振幅矢量法分析。
- (2) 惠更斯—菲涅耳原理在惠更斯原理的基础上给出了次波源在传播过程中的振幅变化及位相关系。

三. 光的衍射分类

◆菲涅耳衍射 (近场衍射)

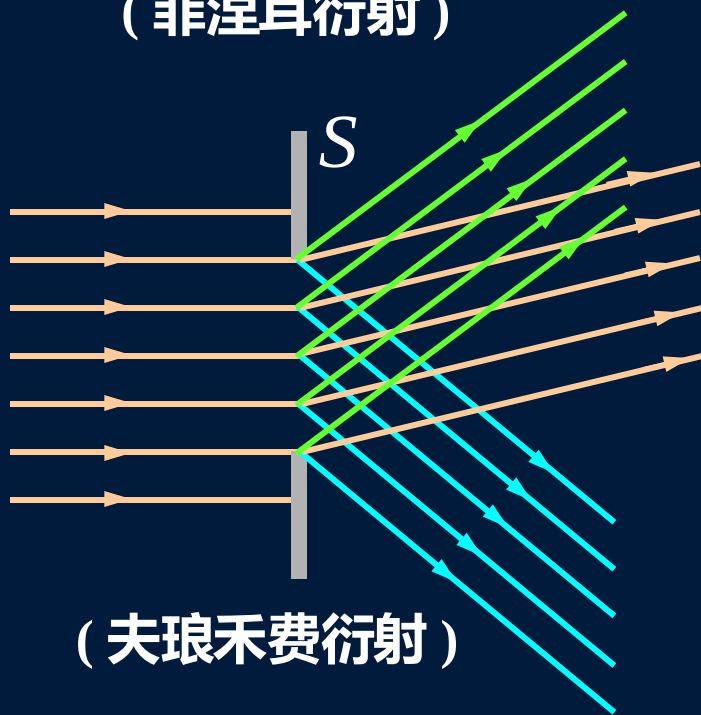
光源 O , 观察屏 E (或二者之一) 到衍射屏 S 的距离为有限的衍射。



(菲涅耳衍射)

◆夫琅禾费衍射 (远场衍射)

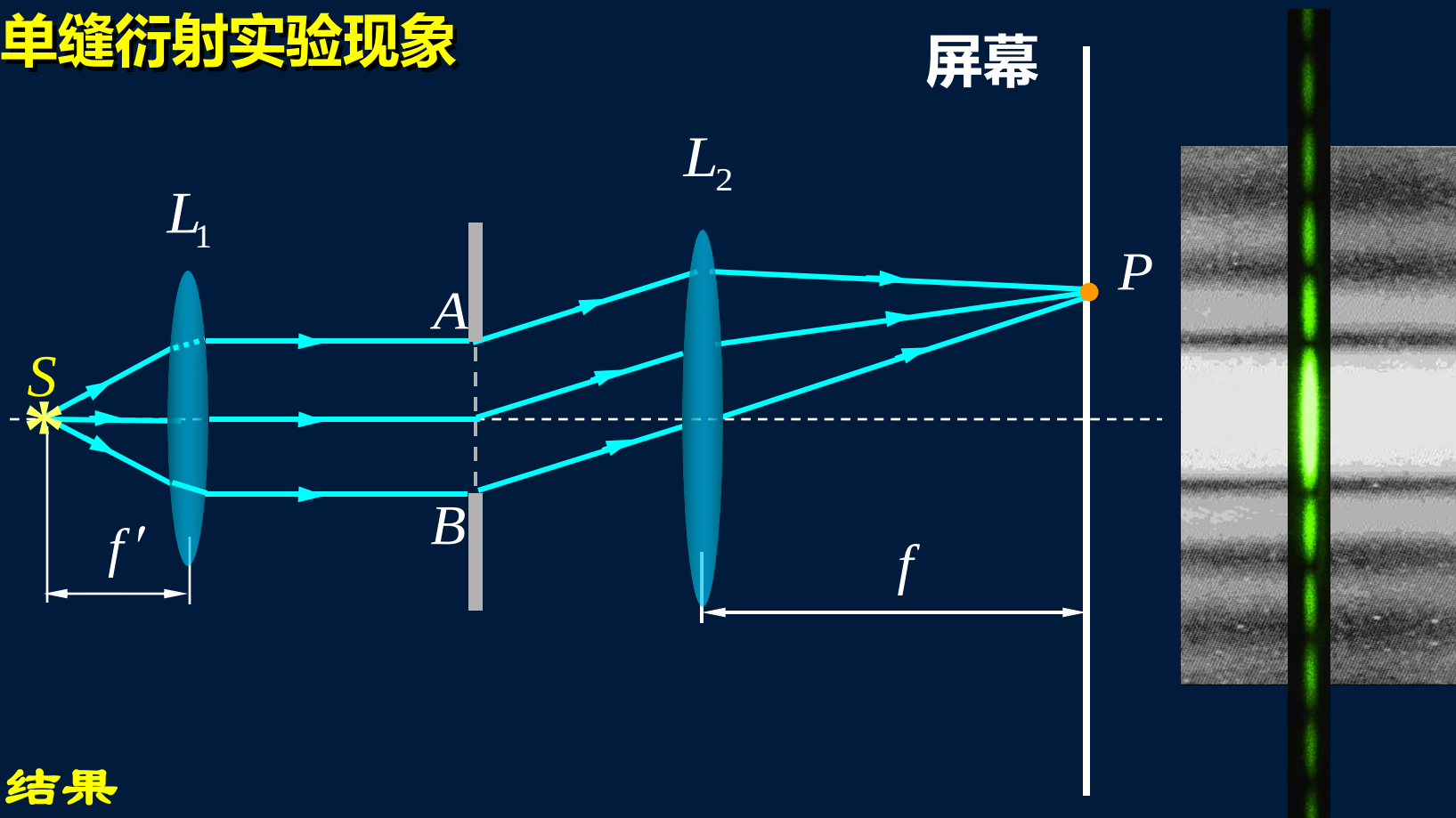
光源 O , 观察屏 E 到衍射屏 S 的距离均为无穷远的衍射。



(夫琅禾费衍射)

§14.8 单缝的夫琅禾费衍射

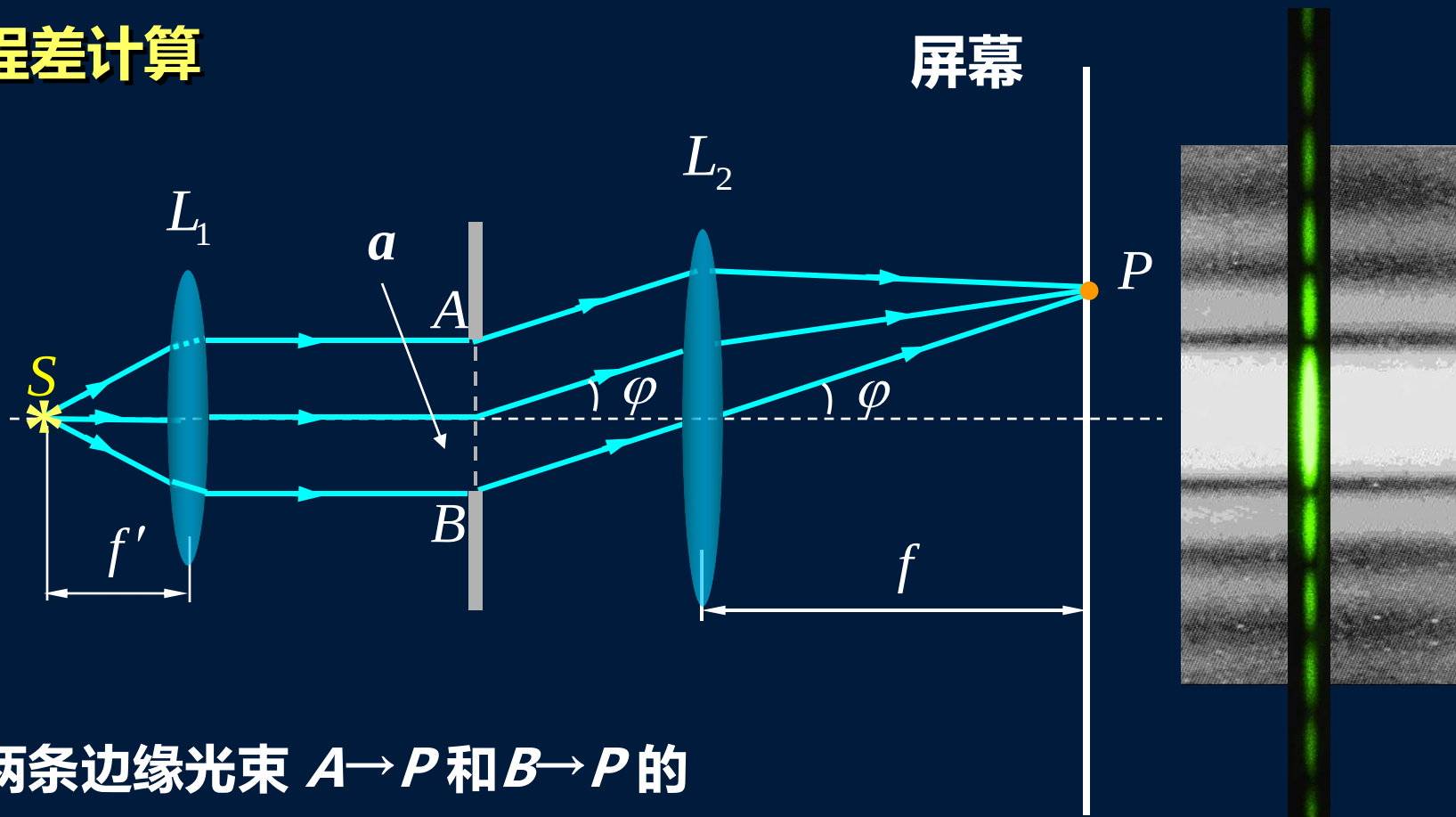
一. 单缝衍射实验现象



★ 结果

屏幕上出现中心很亮，两侧对称分布的一系列亮斑。
衍射图样在竖直方向上展开。

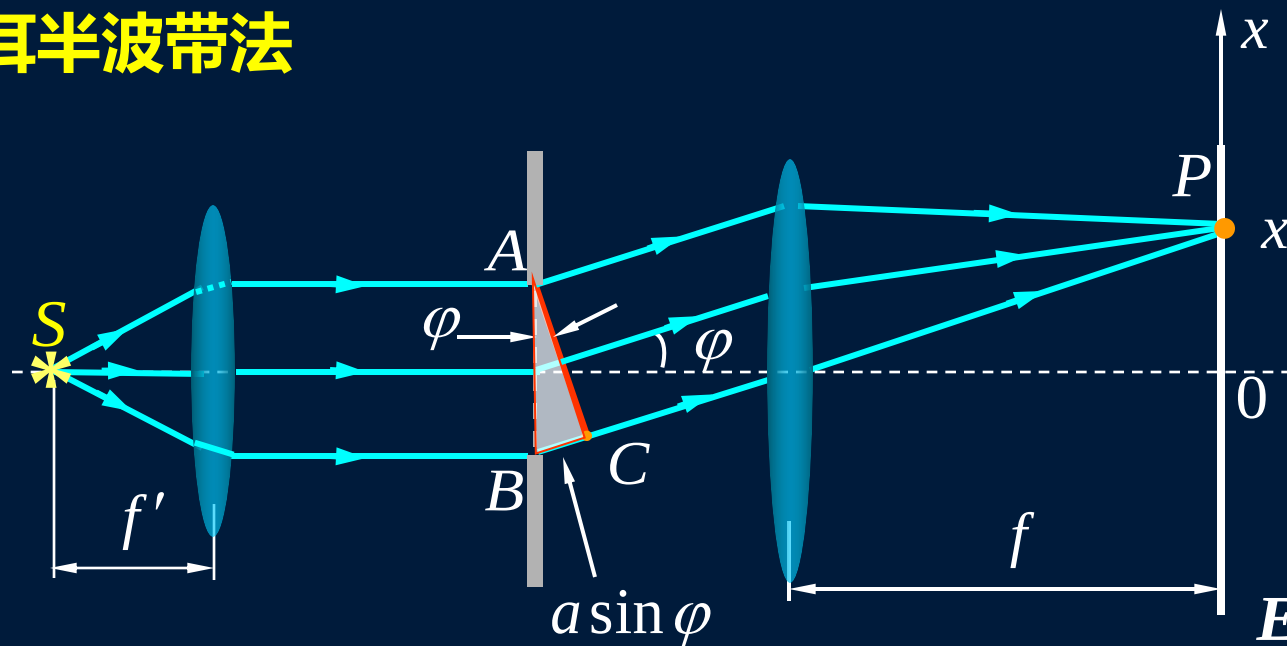
光程差计算



两条边缘光束 $A \rightarrow P$ 和 $B \rightarrow P$ 的光程差，可由几何关系得到： $\delta = a \sin \varphi$

$\varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \delta = 0 \quad \text{—— 中央明纹(中心)}$

二. 菲涅耳半波带法

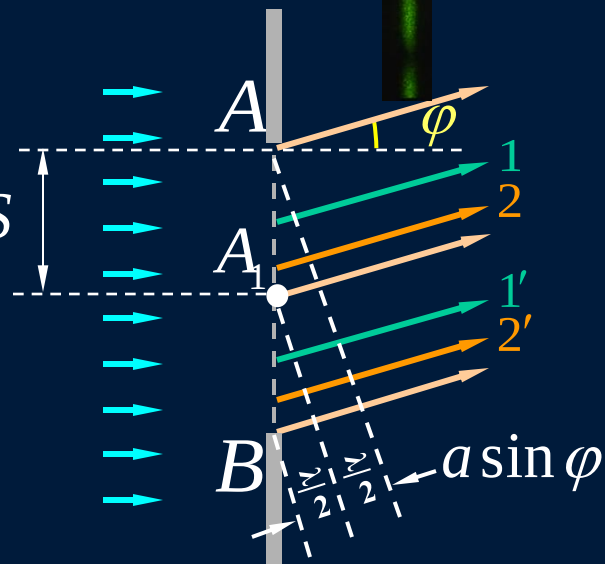


◆半波带数目为整数

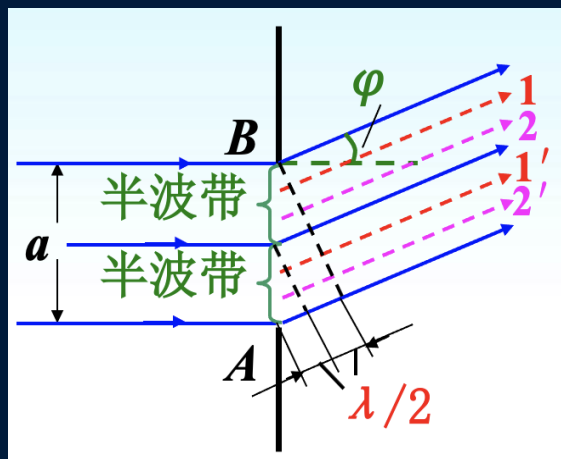
狭缝波面上的半
波带的数目为

$$N = \frac{a \sin \varphi}{\frac{\lambda}{2}}$$

半波带 ΔS

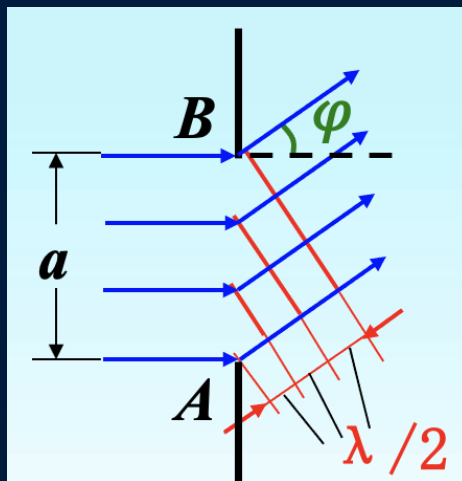


□ 当 $a \sin \varphi = \frac{2}{2} \lambda$ 时
缝可分为两个“半波带”



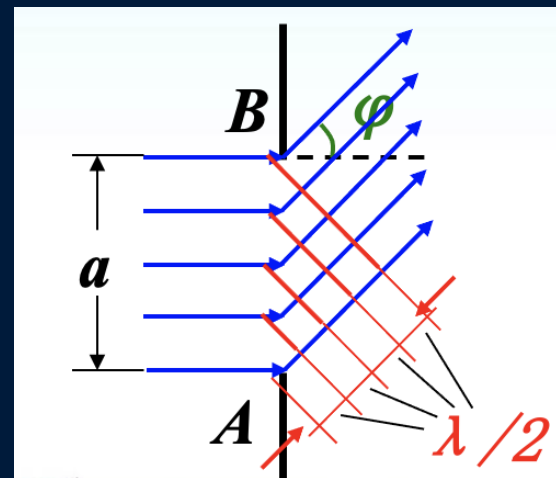
两相邻半波带上对应点发光在 P 处干涉相消形成暗纹。

□ 当 $a \sin \varphi = \frac{3}{2} \lambda$ 时
缝可分为3个“半波带”

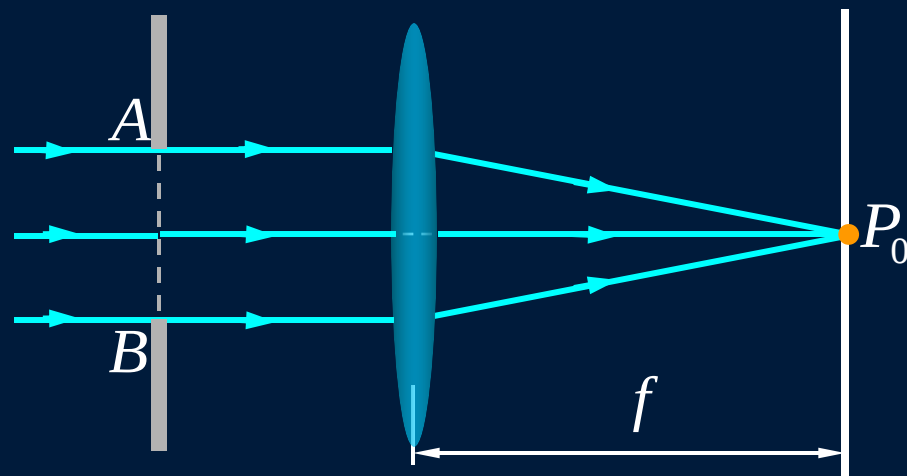
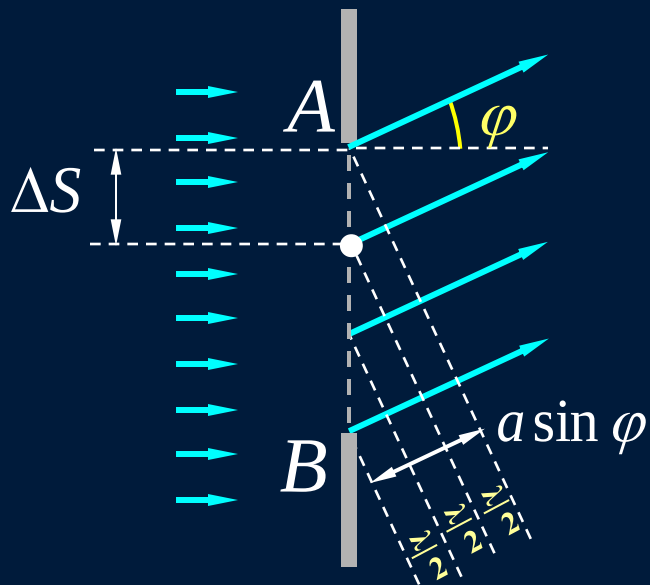


剩余一个未相消的半波带，所以 P 处干涉相消形成明纹。

□ 当 $a \sin \varphi = \frac{4}{2} \lambda$ 时
缝可分为4个“半波带”



暗纹



中央明纹中心

$$\varphi = 0 \longrightarrow a \sin \varphi = 0$$

暗纹条件

$$a \sin \varphi = \pm (2k) \lambda / 2$$

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

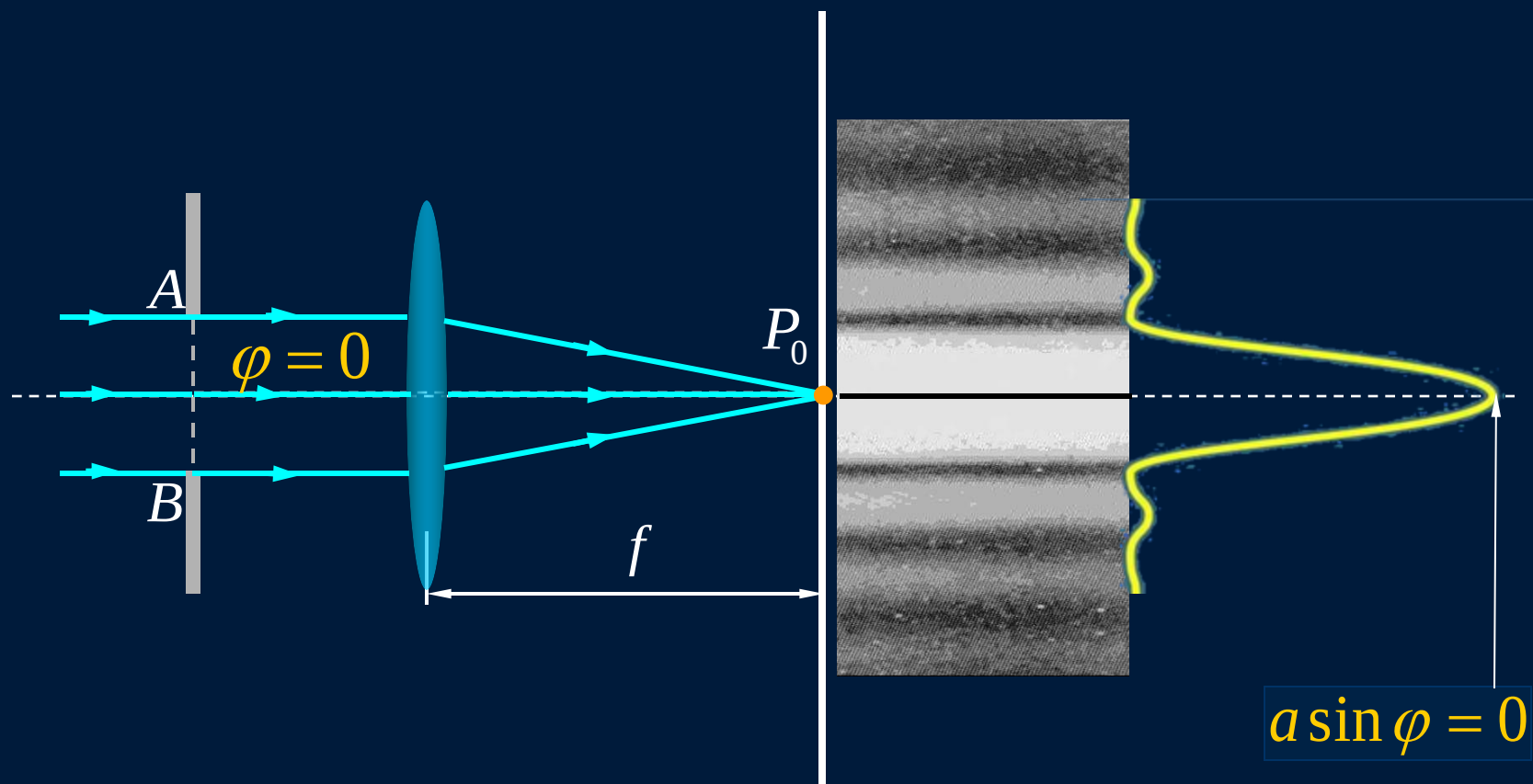
(半波带数目为偶数)

明纹条件

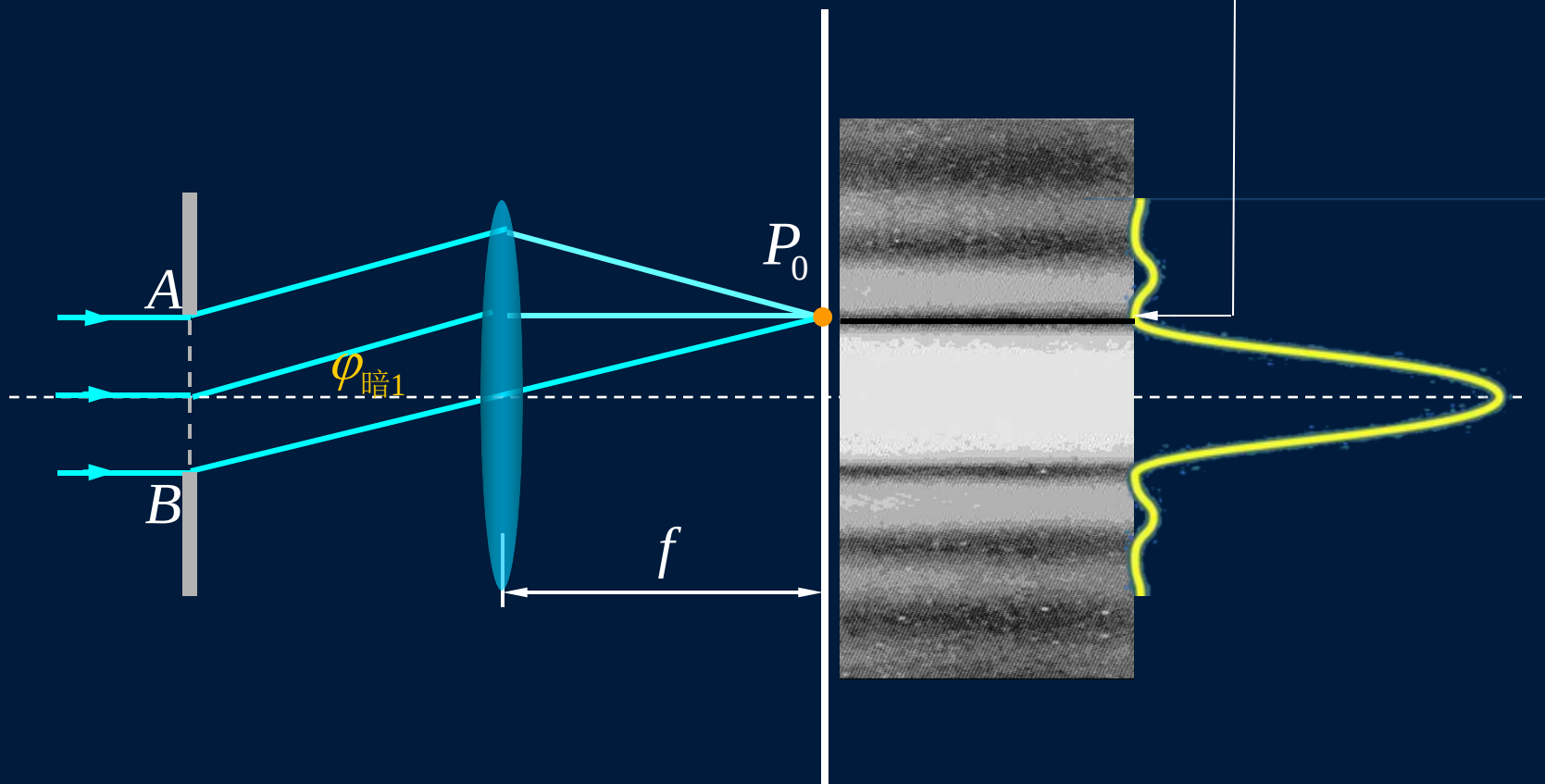
$$a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \lambda / 2$$

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

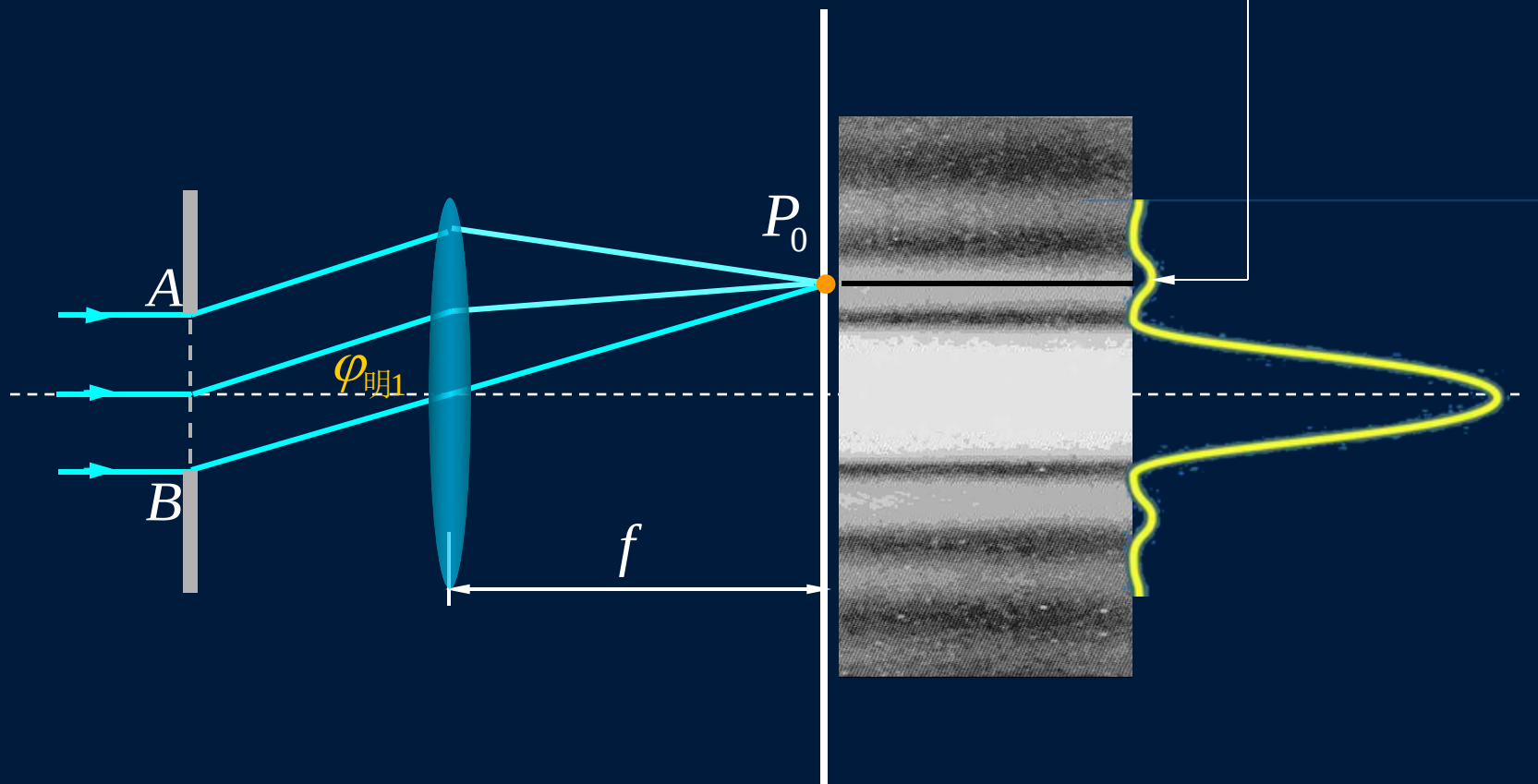
(半波带数目为奇数)



$$a \sin \varphi = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad k = 1, 2, 3 \cdots$$

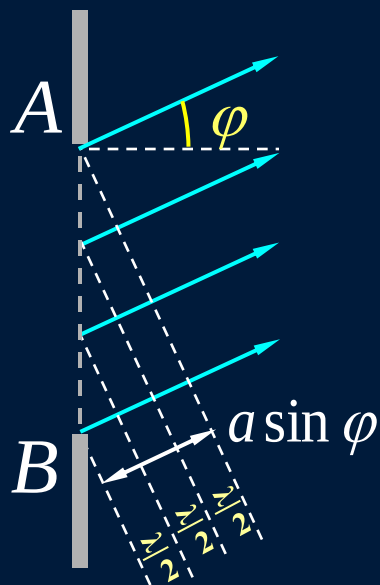


$$a \sin \varphi = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad k = 1, 2, 3 \cdots$$

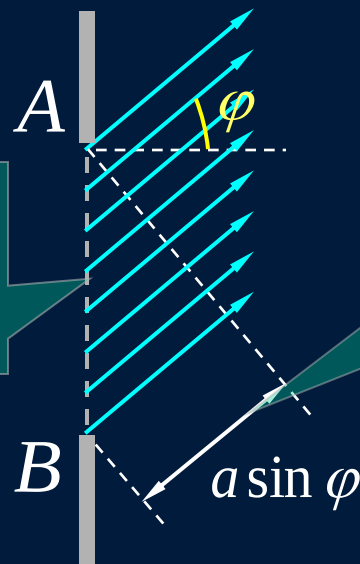


➤ 说明

- (1) 得到的暗纹和**中央**明纹位置精确,其它明纹位置只是近似。
- (2) 随着衍射角 φ 的增大, 明条纹的强度减少。



每份半波带的
能量就愈少

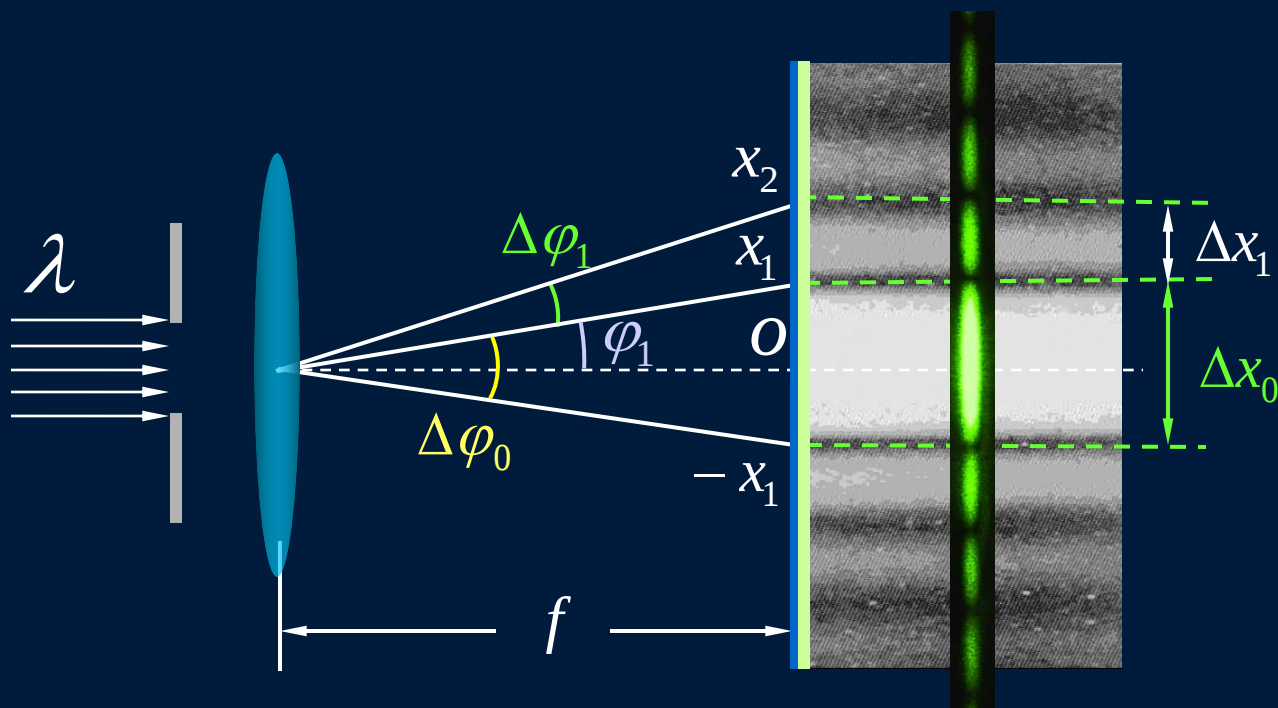


分成 $\lambda/2$ 的
份数愈多

三. 单缝衍射明纹角宽度和线宽度

明纹角宽度： 相邻暗纹对应的衍射角之差。

明纹线宽度： 观察屏上相邻暗纹中心的距离。

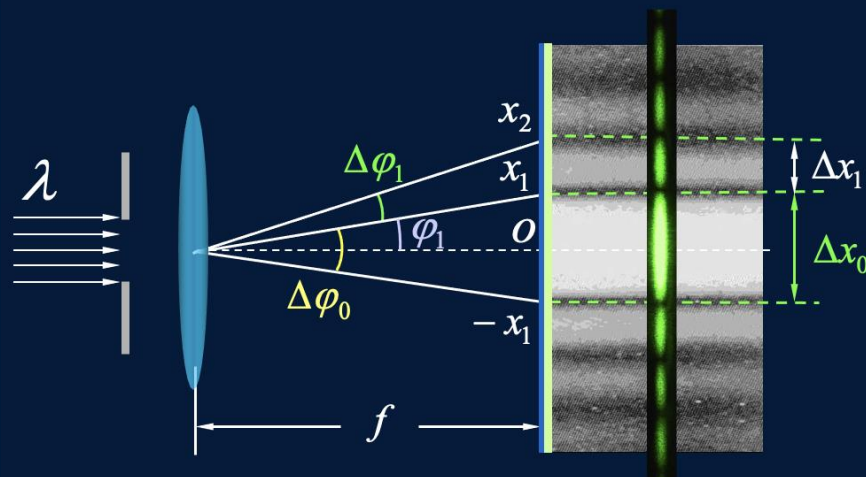


- 正负第一级暗纹中心对透镜光心所张的角度称为中央明纹的角宽度

$$-\lambda < a \sin \varphi < \lambda$$

φ 一般很小 $\sin \varphi \approx \varphi$

$$-\frac{\lambda}{a} < \varphi < \frac{\lambda}{a}$$



中央明纹角宽度

$$\Delta\varphi = 2\varphi \approx 2\lambda/a$$

中央明纹线宽度

$$\Delta x_0 = 2f \cdot \tan \varphi_1 = 2f \varphi_1 = 2f \lambda / a$$

第 k 级明纹角宽度

$$\Delta\varphi_k \approx \lambda / a$$

📖 **结论** 中央明条纹的角宽度是其他明条纹角宽度的两倍。

□ 缝宽对条纹宽度的影响

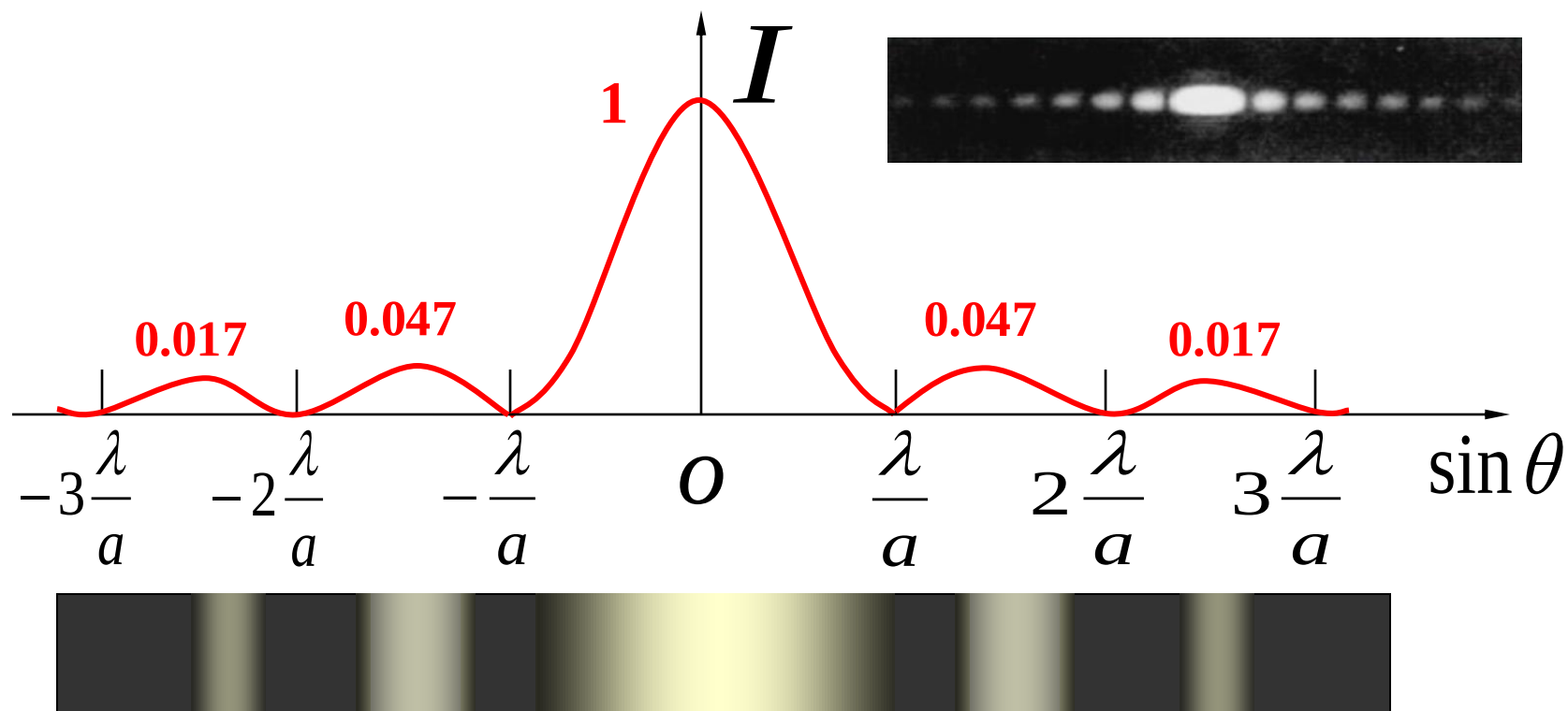
- 缝宽 a 愈小，即缝对入射光的限制愈甚，条纹铺展愈宽，此时屏幕呈一片明亮；
- 当 $a \gg \lambda$ 时，条纹都向中央明纹靠近，形成一个亮点，这亮点就是光经过透镜后所形成的几何像。（几何光学）

□ 波长对条纹宽度的影响：

对第 k 级条纹， λ 愈大，条纹宽度越宽（ φ 愈大）。

若如用白光入射，则可产生衍射光谱。

衍射光谱光强分布

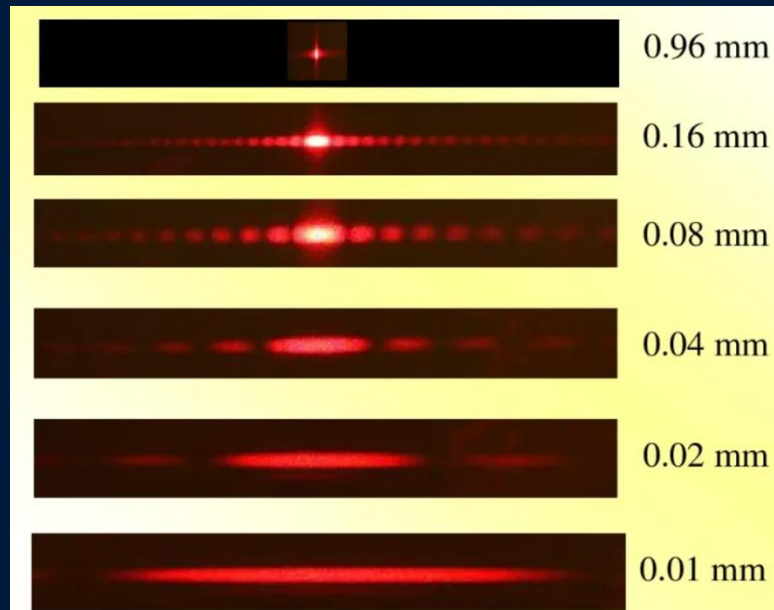


中央极大值对应的明条纹称 **中央明纹**。

中央极大值两侧的其他明条纹称 **次极大**。

中央极大值两侧的各极小值称 **暗纹**。

□ 缝宽对条纹宽度的影响

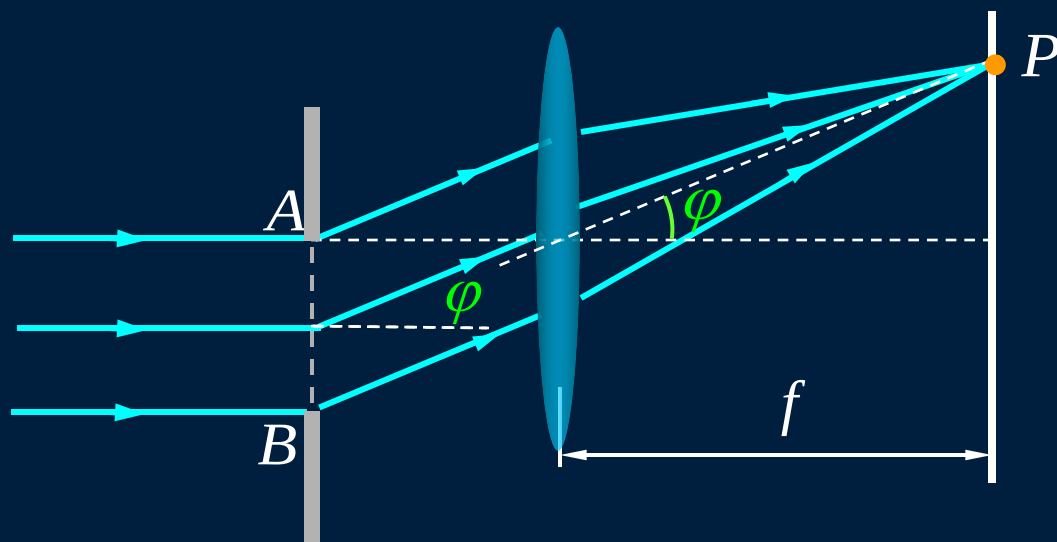


□ 白光的单缝衍射：



📖 讨论

- (1) $\Delta\varphi_0 = 2\varphi_1 \approx 2\lambda/a$ 波长越长，缝宽越小，条纹宽度越宽。
- (2) $\lambda/a \rightarrow 0$ $\Delta\varphi_0 \rightarrow 0$ 波动光学退化到几何光学。
- (3) $\lambda/a \rightarrow 1$ $\Delta\varphi_0 \rightarrow \pi$ 观察屏上不出现暗纹。
- (4) 缝位置微小的变化不影响条纹位置分布



例 用波长为 λ 的光垂直照射狭缝，得到单缝的夫琅禾费衍射图样，第三级暗纹位于屏上的P点，问

(1) 若将狭缝宽度减小一半，P点是明纹还是暗纹

(2) 若用波长为 1.5λ 的光照射狭缝，P点是明纹还是暗纹

解 (1) 原 $a \sin \varphi = 3\lambda$ ，狭缝减小一半后 $a \sin \varphi = \frac{3}{2}\lambda$ ，

所以P点变成一级明纹

(2) 波长增大 1.5倍，半波带数目变为原来的1.5分之一，即4个，所以P点是二级暗纹

例 用波长为 λ_1 和 λ_2 的平行光平行照射一单缝，在距缝很远的屏上观察衍射条纹，如果 λ_1 的第一级衍射暗纹与 λ_2 的第二级衍射暗纹重合

求 (1) 两种波长之间的关系；

(2) 这两种波长的衍射图样中是否还有其它级的暗纹重合

解 (1) 单缝衍射暗纹条件

$$a \sin \varphi = k \lambda$$

$$a \sin \varphi_1 = \lambda_1$$

$$a \sin \varphi_2 = 2 \lambda_2$$

重合，即

$$\varphi_1 = \varphi_2$$



$$\lambda_1 = 2 \lambda_2$$

(2) 单缝衍射暗纹条件

$$a \sin \varphi = k \lambda$$

$$a \sin \varphi_1 = k_1 \lambda_1$$

$$a \sin \varphi_2 = k_2 \lambda_2$$

重合，即

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\lambda_1 = 2 \lambda_2$$

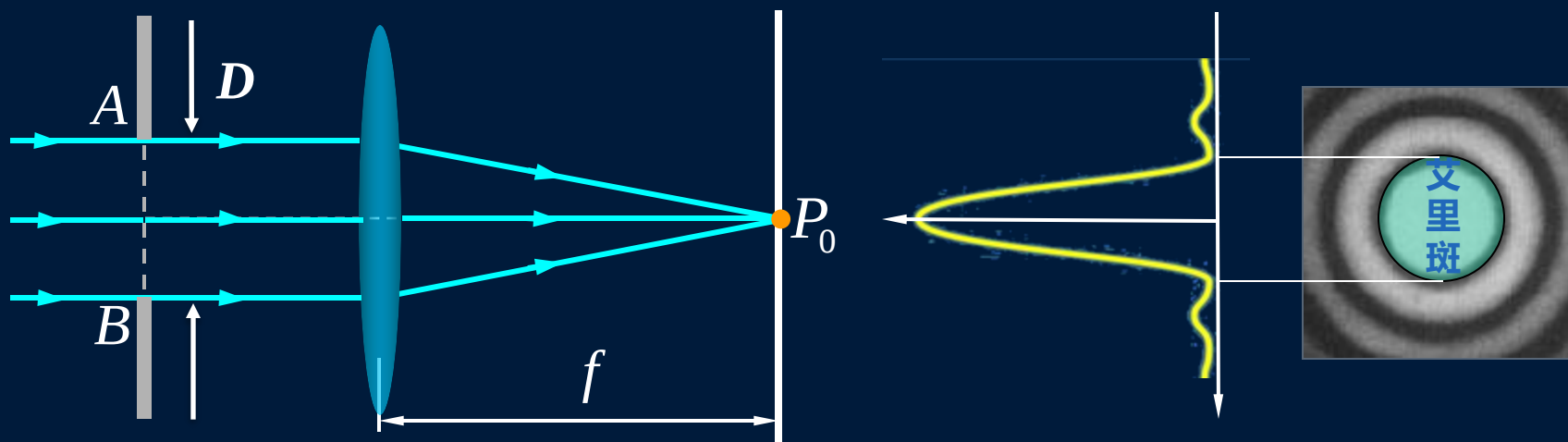


$$k_2 = 2k_1$$

可见，还有 λ_1 的 k_1 级暗纹与 λ_2 的 $2k_1$ 级暗纹重合。

五. 光学仪器的分辨本领

1. 圆孔的夫琅禾费衍射



经圆孔衍射后,一个点光源对应一个艾里斑;

2. 艾里斑 由第一暗环所包围的中央亮斑。

■ 艾里斑的半角宽度 $\varphi_0 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$

■ 艾里斑的半径 $r_0 = f \varphi_0 = 1.22 \frac{f \lambda}{D}$

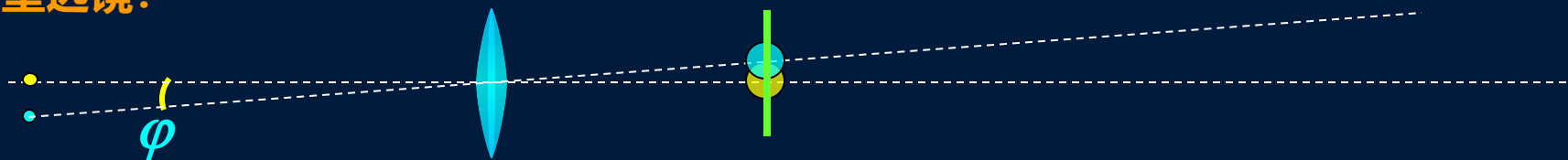
约集中了84%的光能

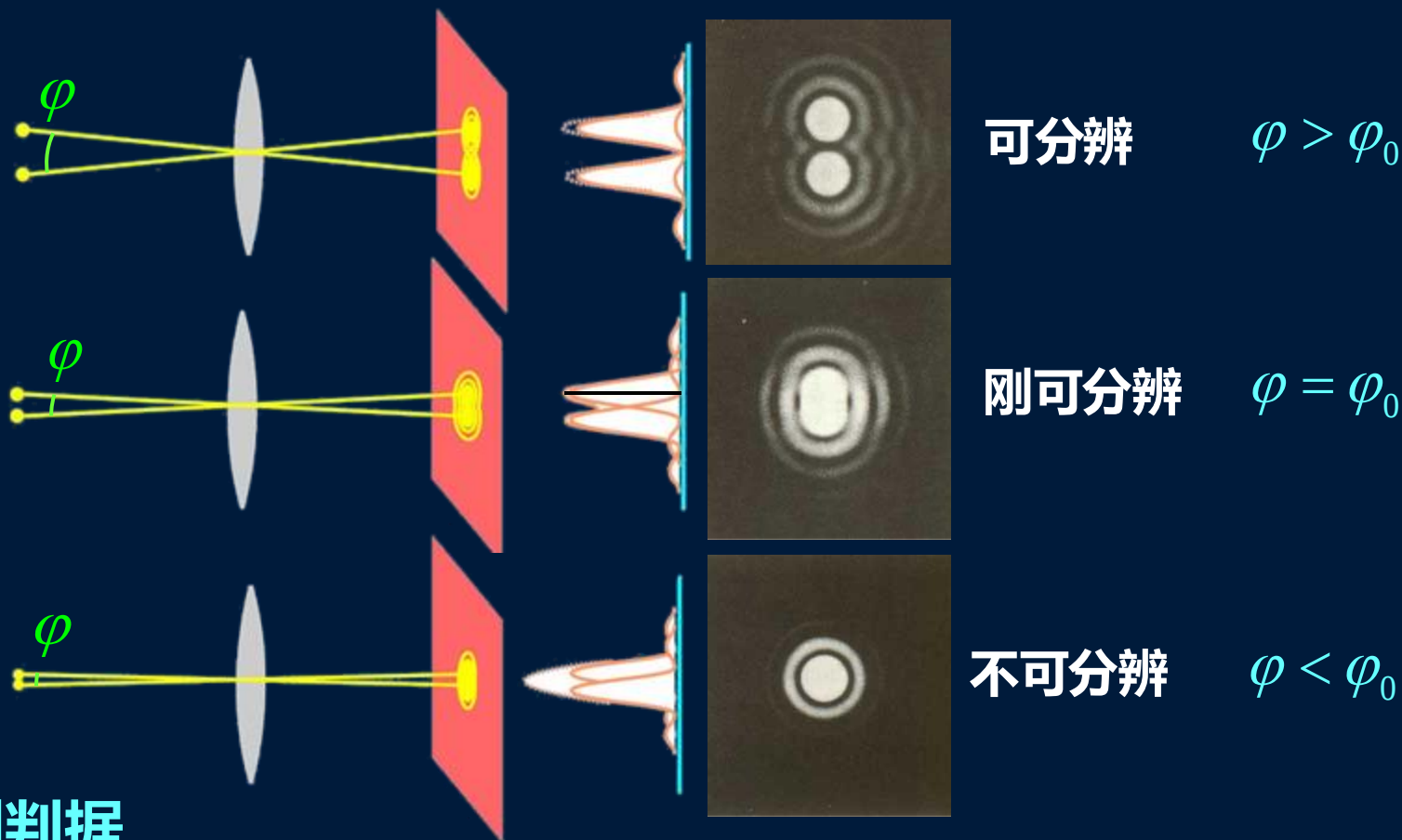
3. 分辨本领



距离很近的两个物点的象斑有可能重叠，从而分辨不清。

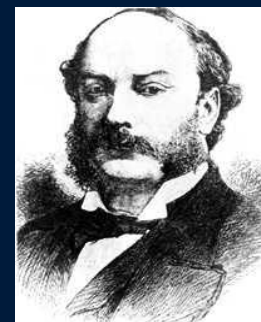
望远镜：





瑞利判据

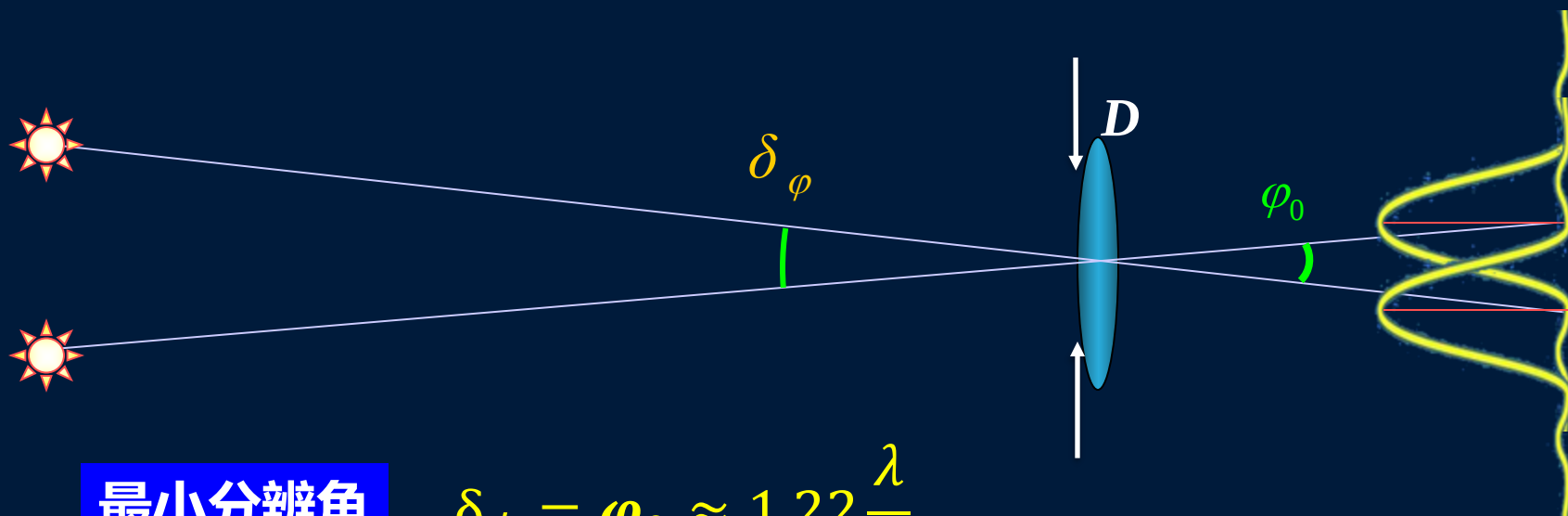
对于两个等光强的非相干物点,如果一个像斑中心恰好落在另一像斑的中央亮斑的边缘(第一级暗纹处)上时,就认为这两个像刚刚能够被分辨。



4. 光学仪器分辨本领

光学仪器的最小分辨角 δ_ϕ

两像恰可分辨



最小分辨角

$$\delta_\phi = \phi_0 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

光学仪器分辨本领

$$R = \frac{1}{\delta_\phi}$$

对被观察物，为提高望远镜分辨本领可以：

$$\uparrow D \rightarrow \uparrow R$$

4.光学仪器分辨本领

提高光学仪器分辨本领的两条基本途径

□ 对望远镜, λ 不变, 尽量增大透镜孔径 D , 以提高分辨率。

一般天文望远镜的口径都很大, 世界上最大的天文望远镜在智利, 直径16米, 由4片透镜组成。

□ 对显微镜, 主要通过减小波长来提高分辨率。

电子显微镜用加速的电子束代替光束, 其波长约0.1nm, 用它来观察分子结构。

荣获 1986 年诺贝尔物理学奖的扫描隧道显微镜最小分辨距离已达 0.01 A, 能观察到单个原子的运动图像。

例 在迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距 120 cm ，设夜间人眼瞳孔直径为 5.0 mm ，入射光波为 550 nm 。

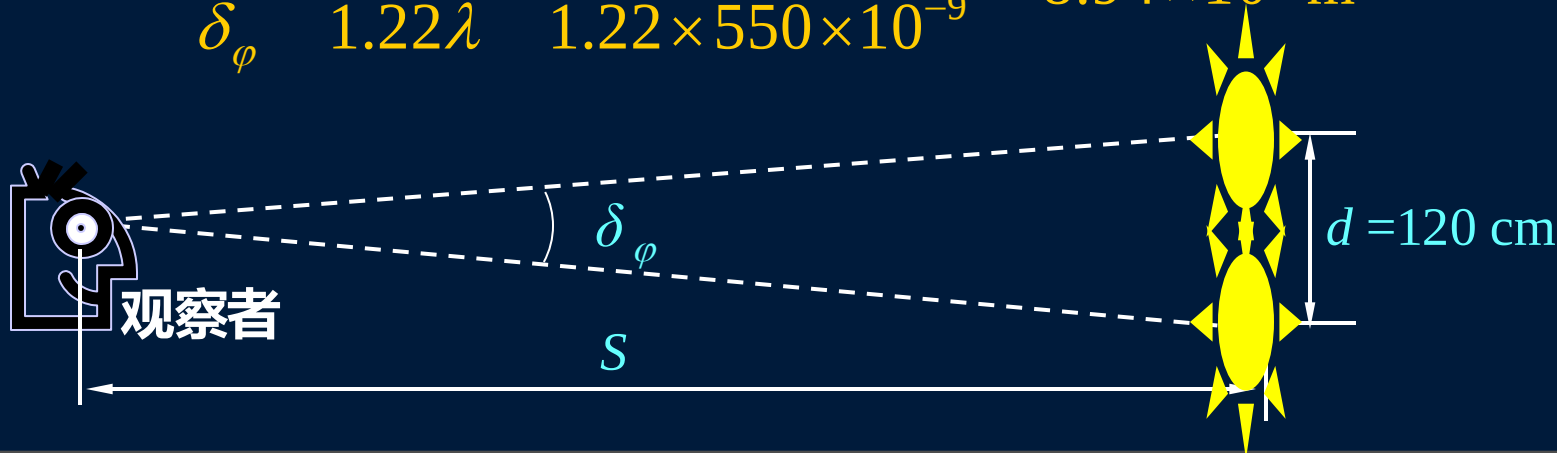
求 人在离汽车多远的地方，眼睛恰能分辨这两盏灯？

解 设人离车的距离为 S 时，恰能分辨这两盏灯。

由题意有 $d = 120\text{ cm}$ $D = 5.0\text{ mm}$ $\lambda = 550\text{ nm}$

眼睛的最小分辨角为 $\delta_\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ 取 $d \approx S \cdot \delta_\varphi$

$$S \approx \frac{d}{\delta_\varphi} = \frac{Dd}{1.22\lambda} = \frac{5.0 \times 10^{-3} \times 1.20}{1.22 \times 550 \times 10^{-9}} = 8.94 \times 10^3\text{ m}$$

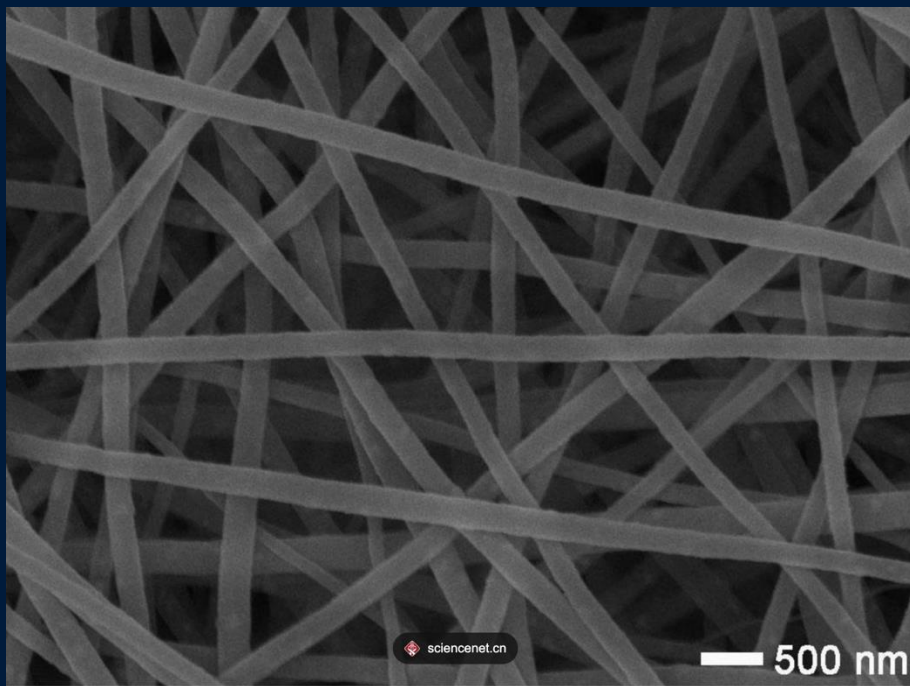


空间站看地球

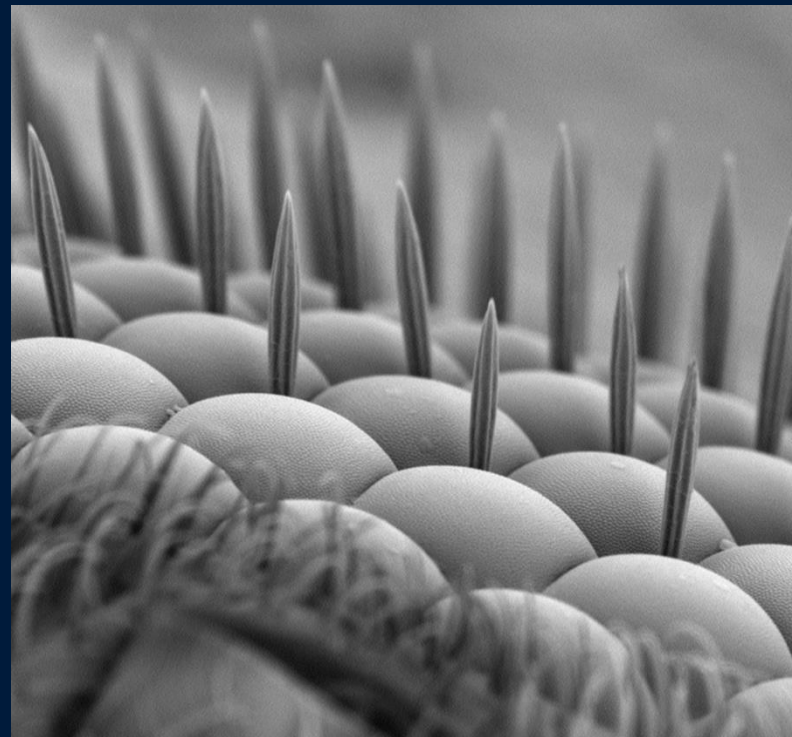


轨道高度 400km , 可辨别最小宽度约100m

电子显微镜



碳纳米管



苍蝇的眼睛

衍射光栅



光栅



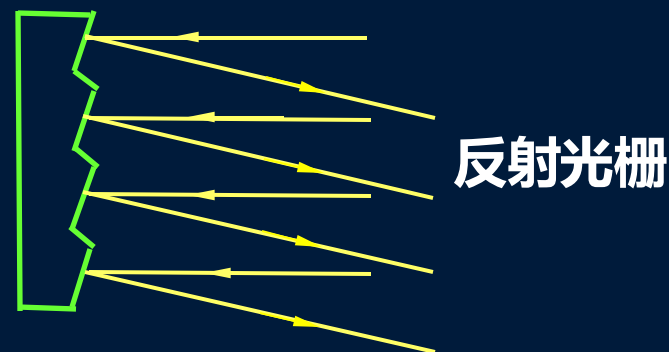
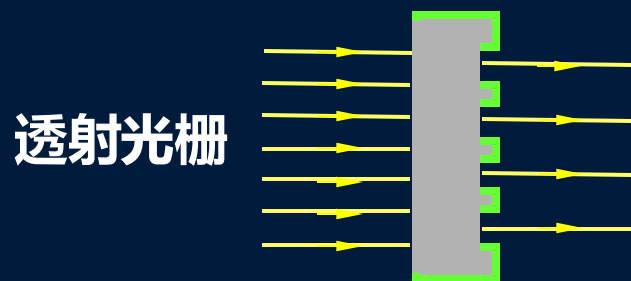
**光盘的凹槽形成一个衍射光栅，在白光
下能观察到入射光被分离成彩色光谱**



§14.9 衍射光栅

一. 光栅

光栅 — 大量等宽等间距的平行狭缝(或反射面)构成的光学元件

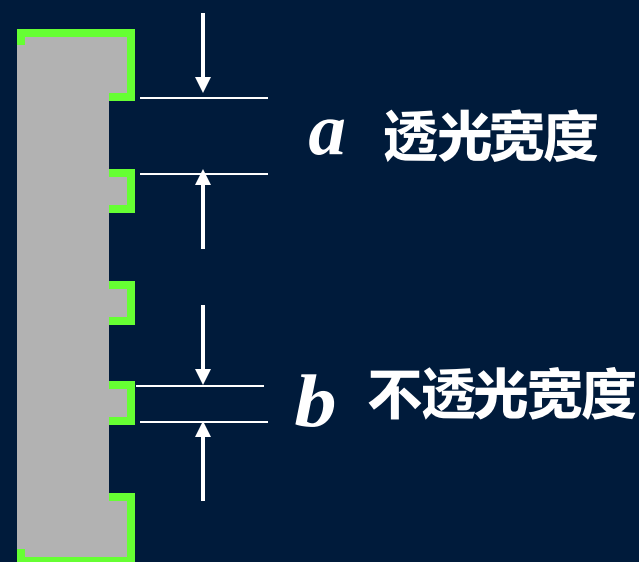


● **光栅常数** $d = a + b$

● **总缝数**

光栅宽度为 l mm, 每毫米缝数为 m , 则为**总缝数**

$$N = m \times l$$



§ 14.9 衍射光栅



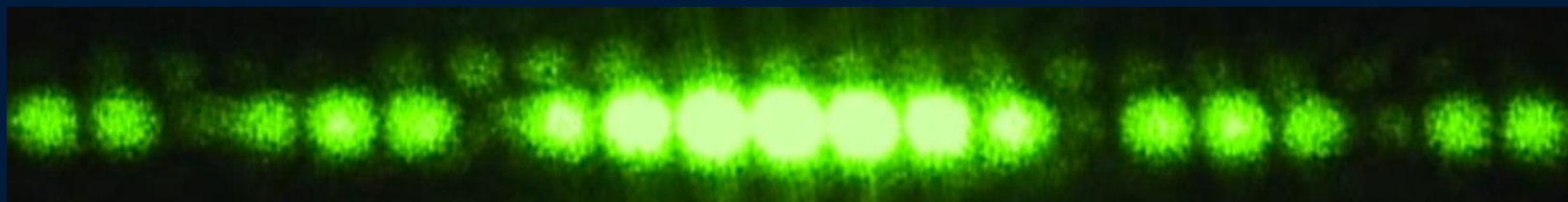
思考1:

(1) 使用语言描述下你观看到的现象

定性描述



主极大很明亮、很尖锐、主极大之间一片暗区



平行、等间距、直条纹

思考1:

(1) 使用语言描述下你观看到的现象

定性描述



主极大很明亮、很尖锐、主极大之间一片暗区

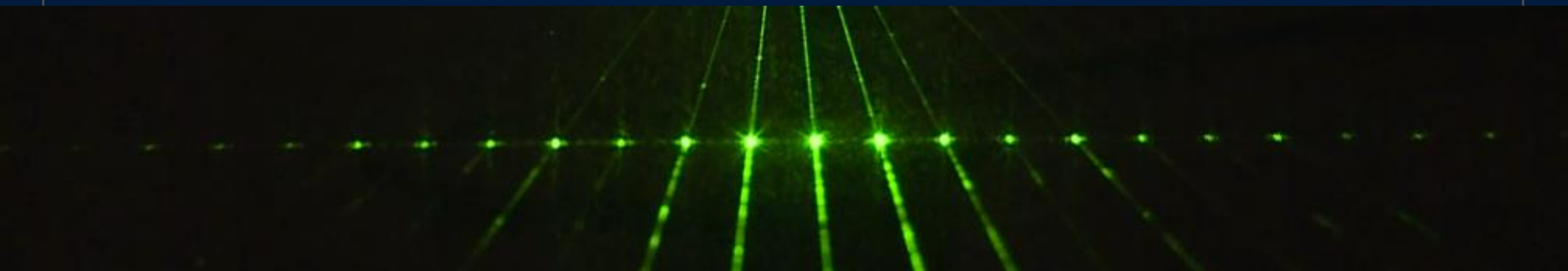
(2) 从物理本质上去分析产生现象的原因

定量描述

明条纹位置、暗条纹位置、明条纹宽度

思考2:

(1)学过了衍射、干涉，光栅衍射是。。。？

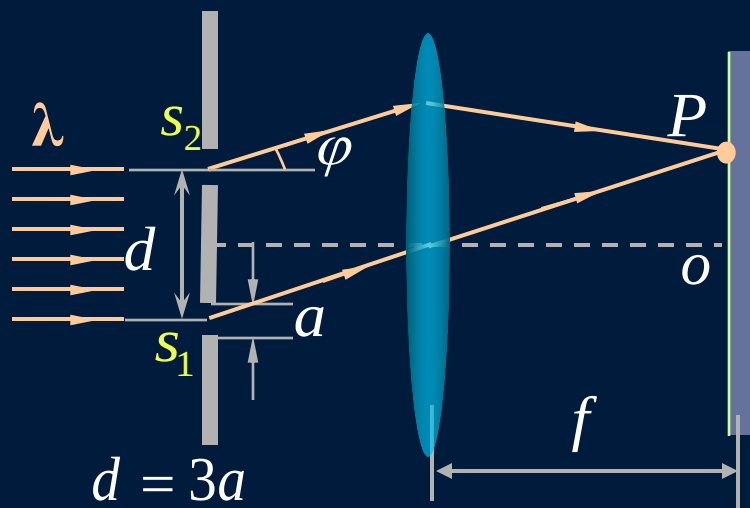


既有衍射、也有干涉

(2) 光栅衍射与衍射、干涉的关系？

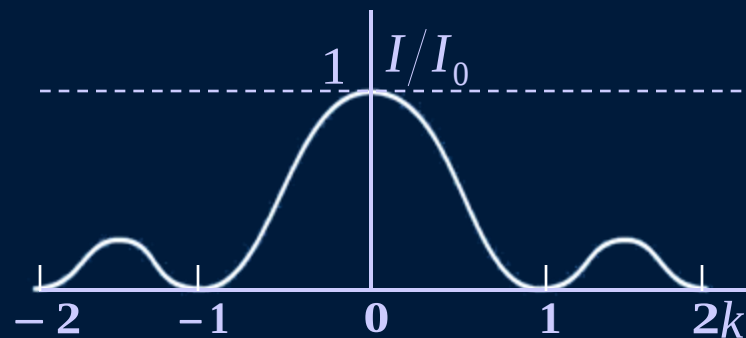
二. 光栅衍射的基本特点

以二缝光栅为例

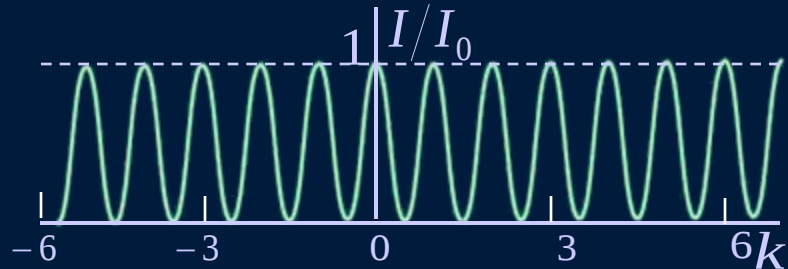


★ 结论

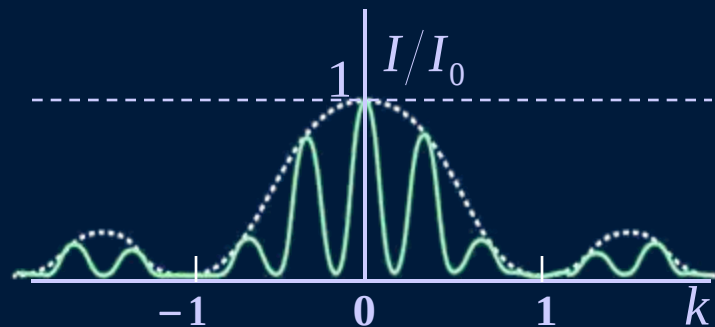
屏上的强度为单缝衍射和缝间干涉的共同结果。



只考虑单缝衍射强度分布



只考虑双缝干涉强度分布



双缝光栅强度分布

三. 光栅衍射条纹

1. 光栅方程

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

主极大级数

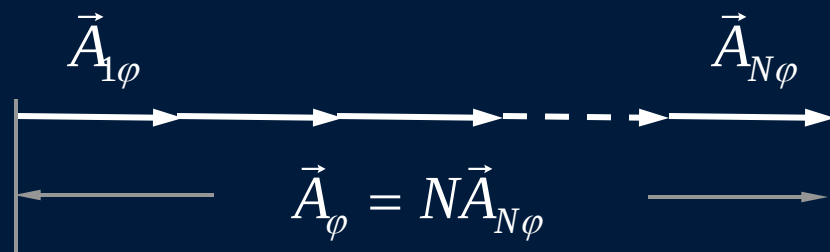
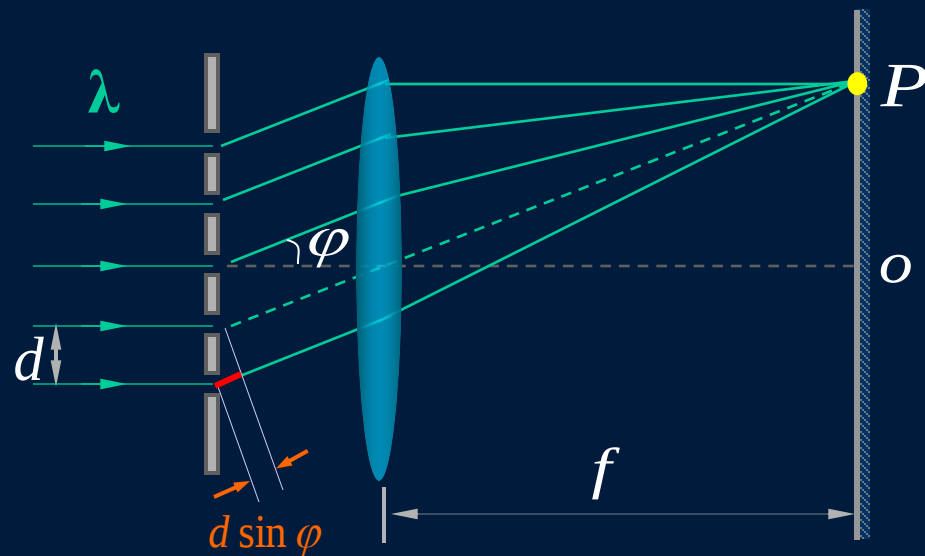
• 主极大强度

相邻两缝发出的光在 P 点引起的光振动相位差为

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi = \pm 2k\pi$$

P 点光强

$$I_{\varphi} = A_{\varphi}^2 = N^2 I_{N\varphi}$$



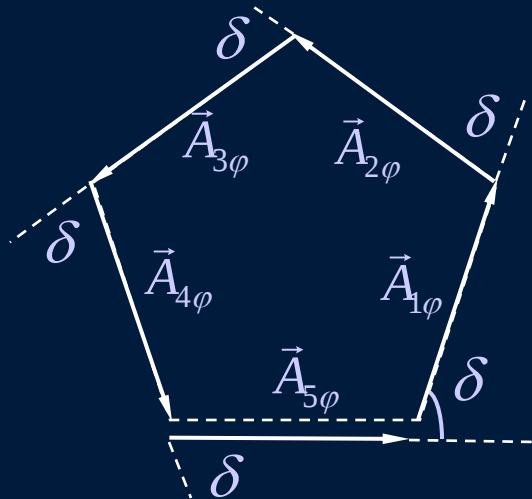
★ **结论** 随着 N 的增大, 主极大变得更为明亮

2. 暗纹条件

相邻振动相位差

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$$

如果 $N\Delta\delta = \pm m \cdot 2\pi$

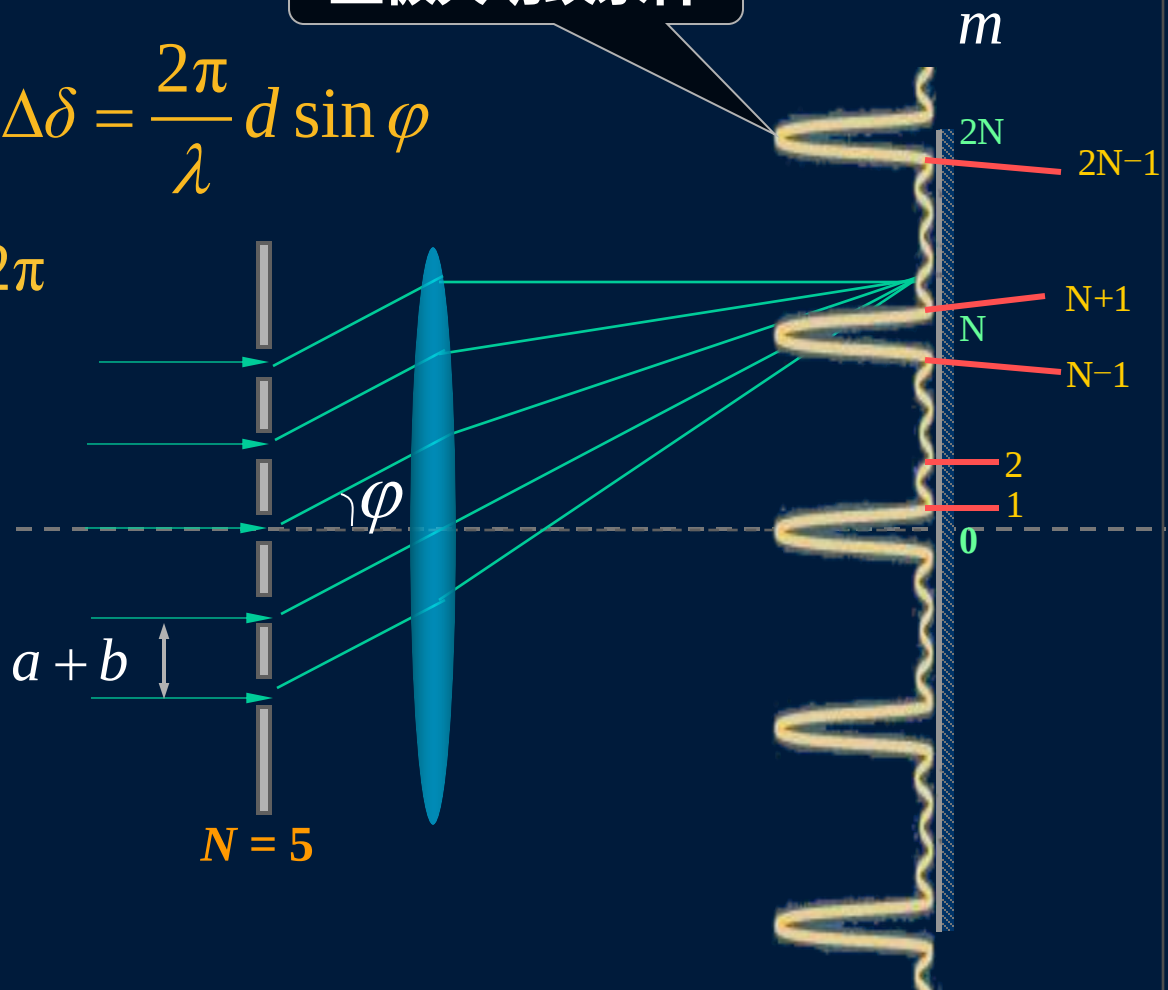


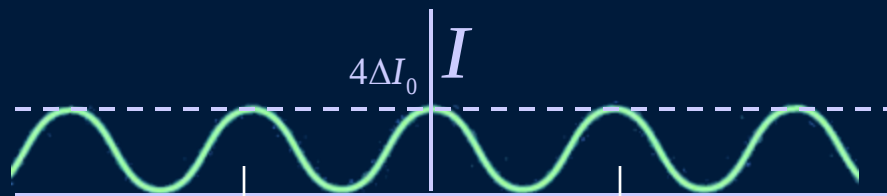
暗纹条件

$$Nd \sin \varphi = \pm m \lambda \quad m \text{ 为 } \neq kN \text{ 的整数}$$

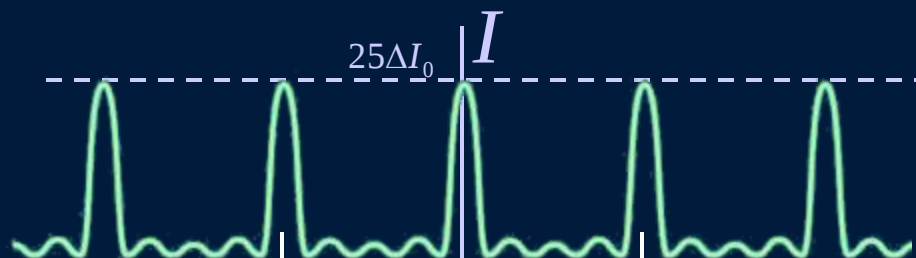
$$m = 1, 2, 3 \cdots (N-1), (N+1), \cdots (2N-1), (2N+1) \cdots$$

主极大明纹条件

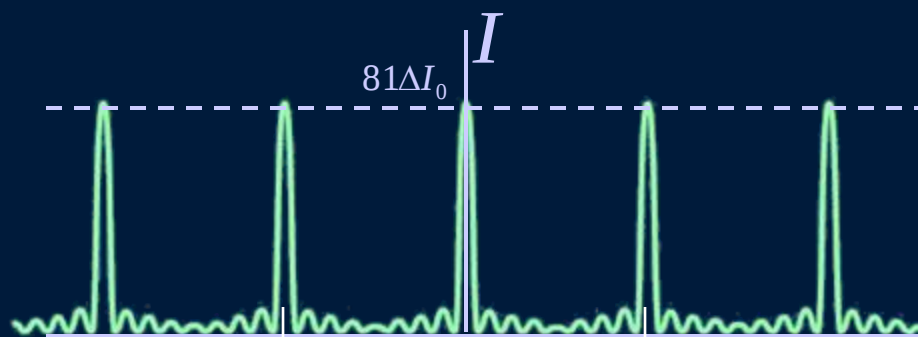




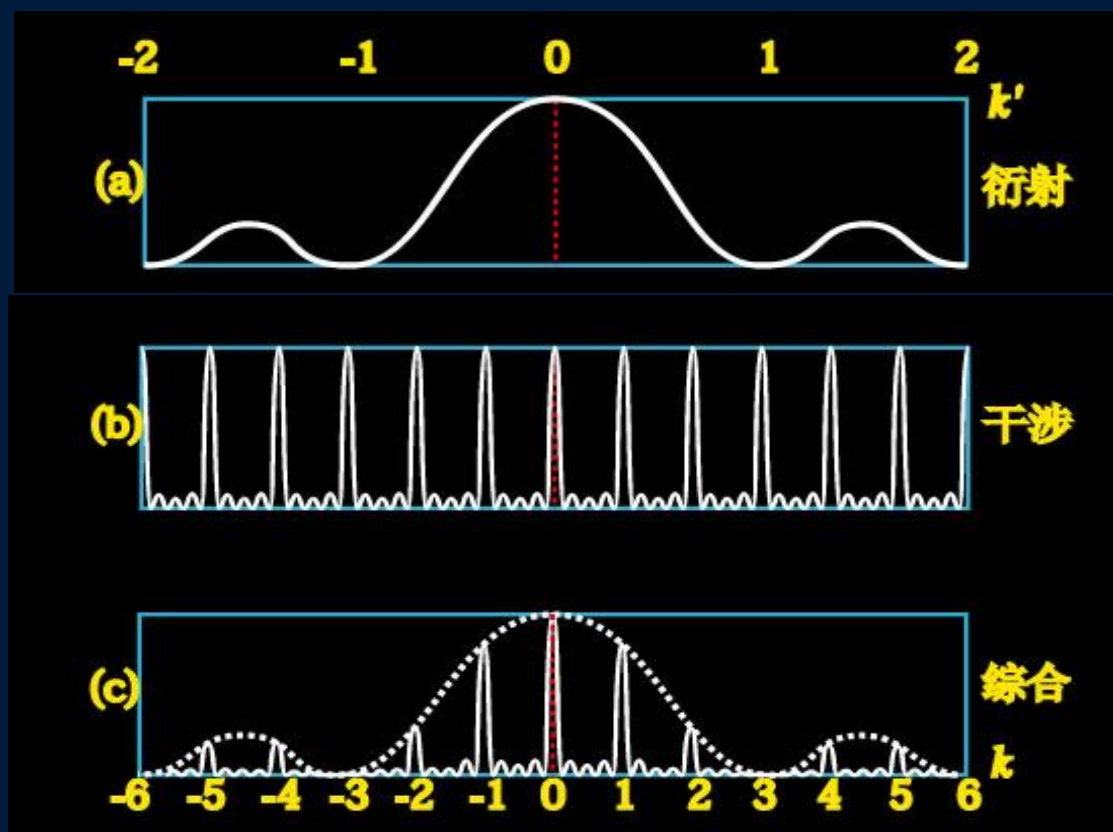
$N = 2$ 缝干涉强度分布



$N = 5$ 缝干涉强度分布



$N = 9$ 缝干涉强度分布



单缝衍射
强度分布

多缝干涉
强度分布

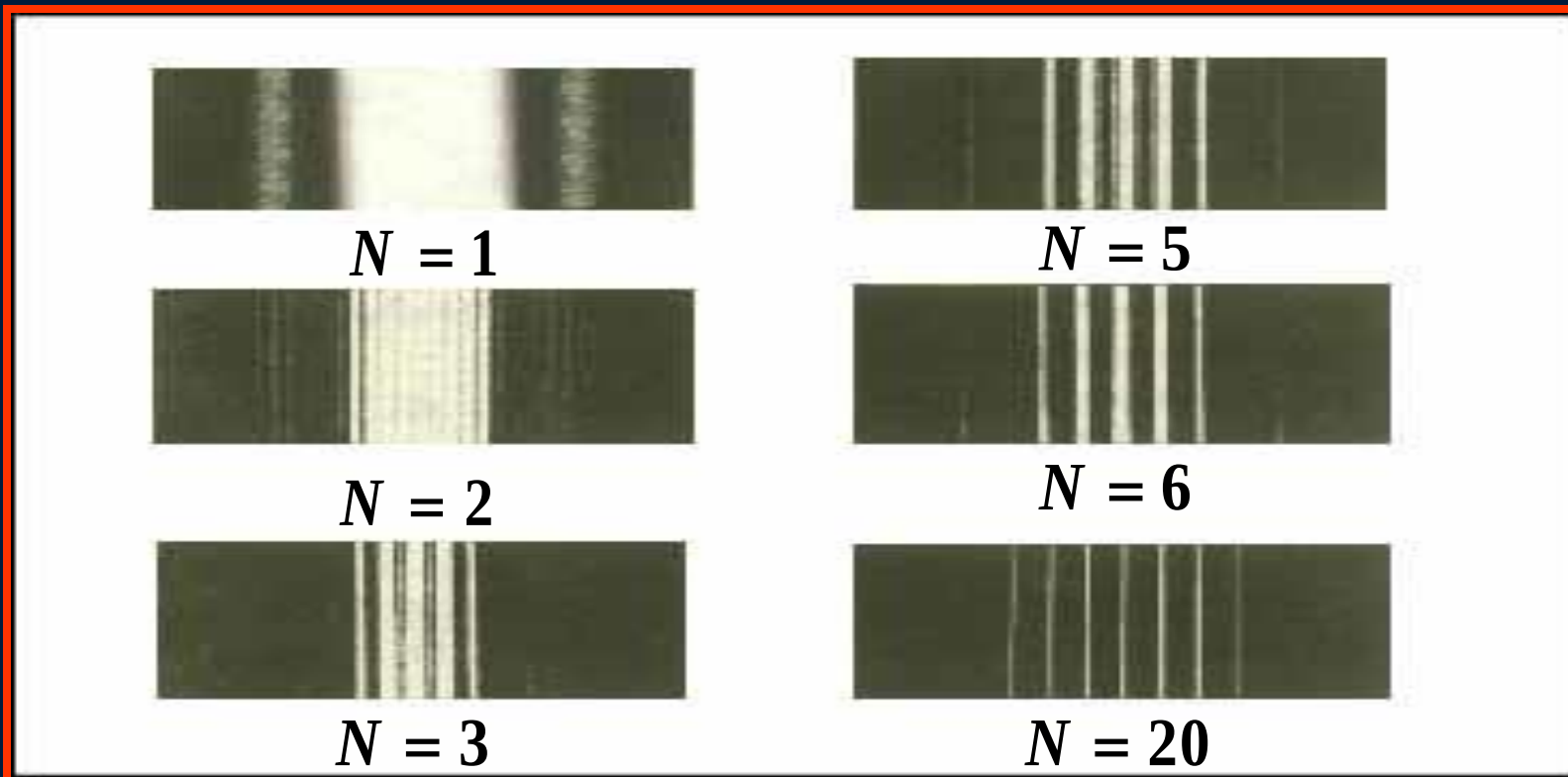
光栅衍射
强度分布

$$I_p = I_{0\text{单}} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

多光束干涉因子

单缝衍射因子 (极大值的强度被调制)

- 不同条纹 N 下的衍射图谱



- 光栅条纹随着 N 增大而变得越来越 **尖锐明亮**;
- 次级大的强度也越来越弱, 通常无法看到;**

◆ 总结

光栅方程（主极大）： $d \sin \varphi = \pm k\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$

暗纹方程： $Nd \sin \varphi = \pm m\lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 0, 1, 2, \dots \\ m \text{ 为 } \neq kN \text{ 的整数} \end{array} \right.$

- 主级大明纹的位置与缝数 N 无关，它们对称地分布在中央明纹的两侧，中央明纹光强最大；
- 两个主极大之间有 $N-1$ 个暗条纹；
- 当 N 很大时，主极大越来越尖锐明亮，次级大越来越弱；

例： 有一光栅在 1.0 cm 长度范围内刻有 2000 条狭缝，用分光计观察某光源的光谱线，测得第二级的衍射角为 14.5°，求此光波的波长。

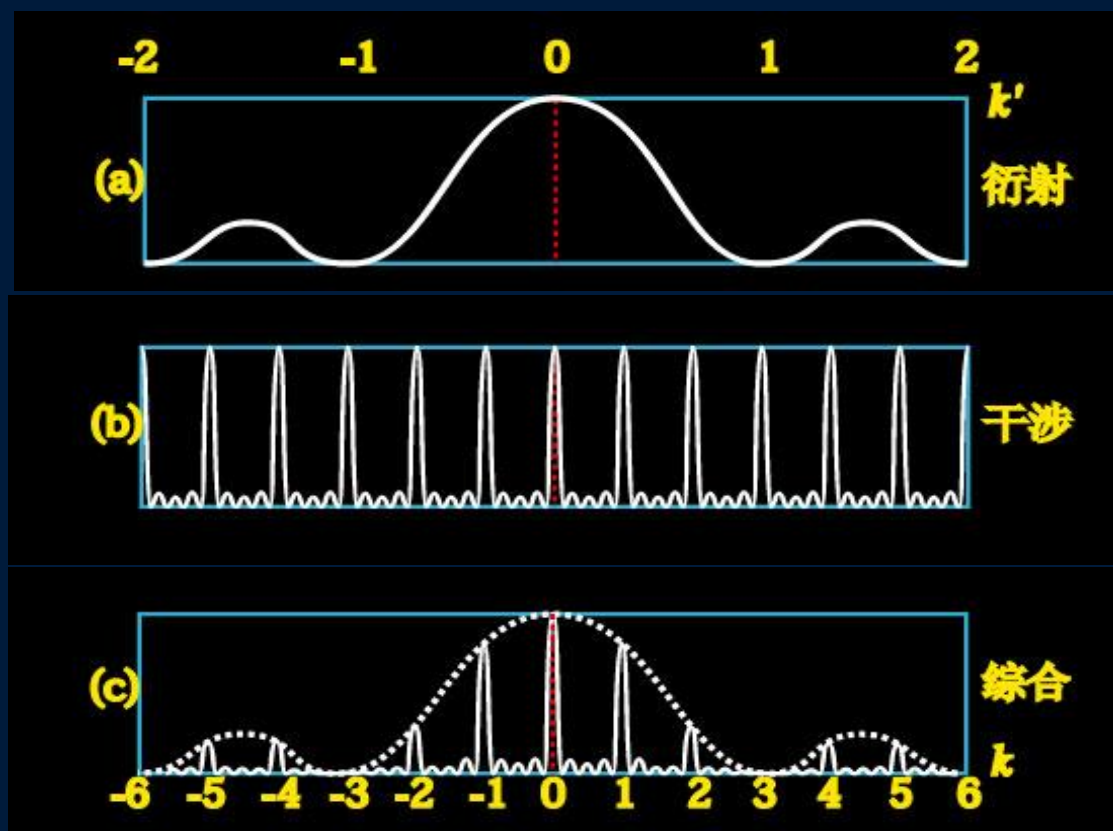
解： 光栅常数：
$$d = (a + b) = \frac{l}{N} = \frac{1.0 \times 10^{-2}}{2000} = 5.0 \times 10^{-6} m$$

光栅方程：
$$(a + b) \sin \varphi = \pm k \lambda$$

由 $k = 2$, $\sin 14.5^\circ = 0.25$

可得
$$\lambda = \frac{(a+b) \sin \varphi}{k} = 6.25 \times 10^{-7} m$$

缺级现象



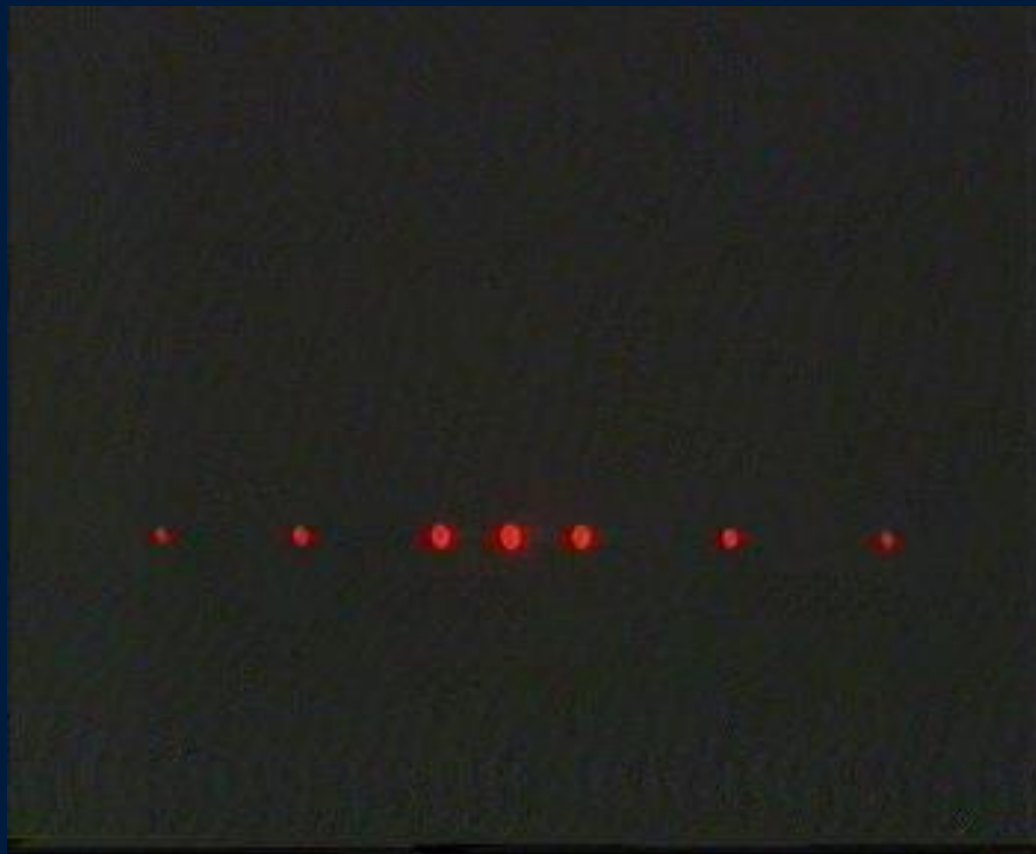
单缝衍射
强度分布

多缝干涉
强度分布

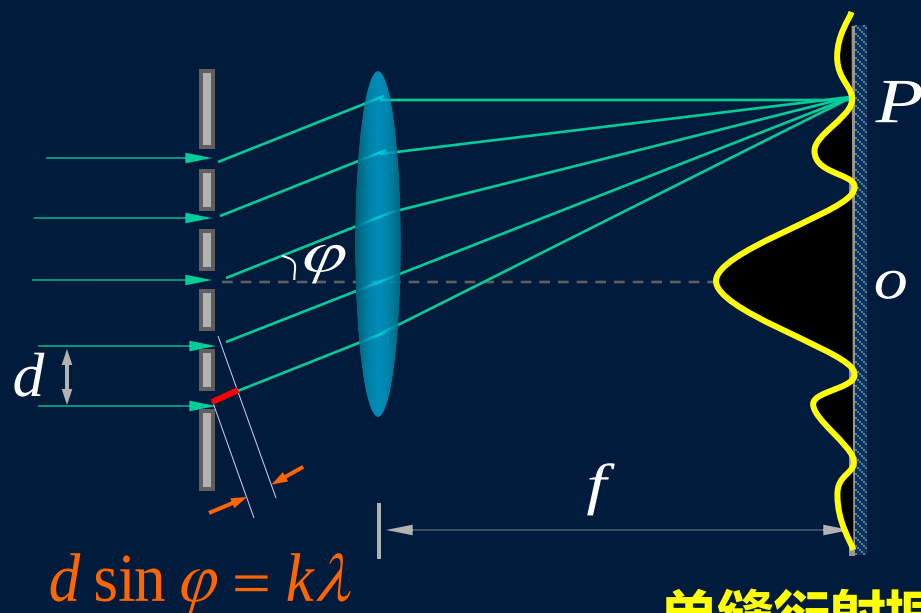
光栅衍射
强度分布

思考

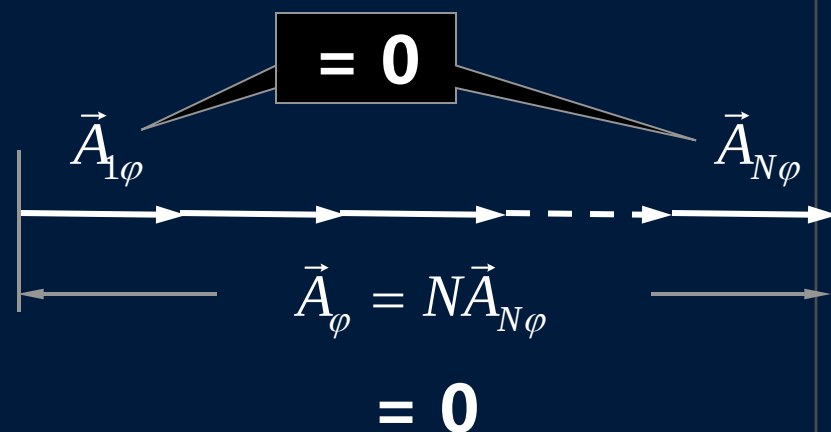
判断缺级条件



多缝干涉振动合成



单缝衍射振幅曲线



缺级条件

$$\left. \begin{aligned} d \sin \varphi &= \pm k\lambda \\ a \sin \varphi &= \pm k'\lambda \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d}{a} = \frac{k}{k'} \rightarrow \begin{cases} k = \frac{d}{a} \cdot k' \\ (k' \text{ 取非零整数}) \end{cases}$$

如 $\begin{cases} d/a = 2 \\ d/a = 3/2 \end{cases}$ 则 $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \dots$ 缺级

则 $k = \pm 3, \pm 6, \pm 9 \dots$ 缺级

2 波长 $\lambda = 600nm$ 的单色光垂直入射到光栅上，测得第二级主极大明条纹的衍射角为 30° ，第三级缺级，则透光缝的最小宽度为

A

$4.8 \mu m$

B

$8.0 \times 10^{-7} m$

C

$2.4 \mu m$

D

$1.6 \times 10^{-6} m$

提交

3 波长 $\lambda = 600nm$ 的单色光垂直入射到光栅上，测得第二级主极大明条纹的衍射角为 30° ，第三级缺级，则屏幕上呈现的主极大明条纹最高级次为

A

4

B

无法确定

C

3

D

2

提交

光栅缺级.mpg

屏

光栅

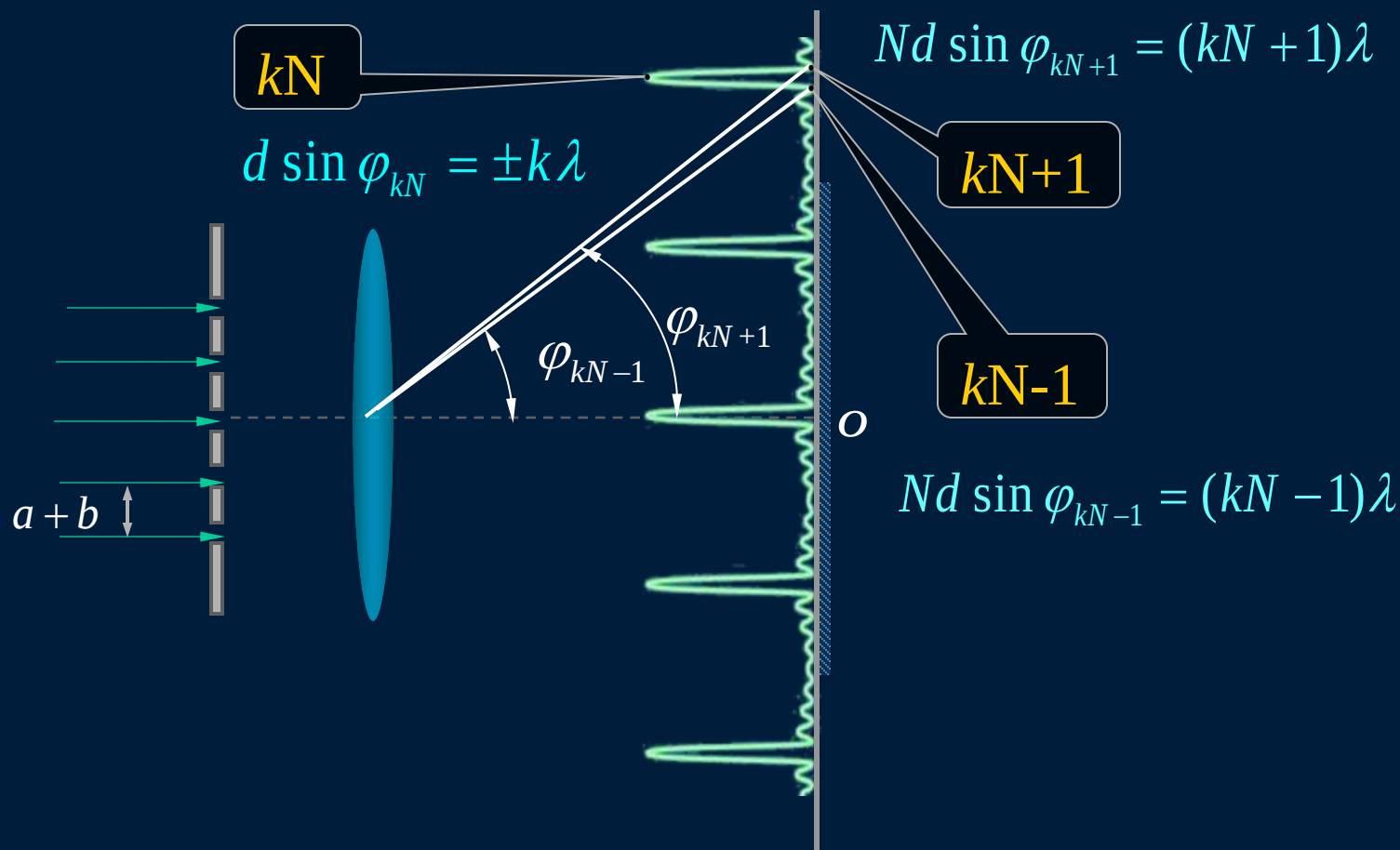
光源

按ESC退出全屏

0:07 / 00:02:21

分析 设光栅常数为 d ，总缝数为 N 的光栅,当入射光波长为 λ 时,分析其夫琅禾费衍射主极大条纹角宽度与 N 的关系。

解



例 设光栅常数为 d , 总缝数为 N 的光栅,当入射光波长为 λ 时, 分析其夫琅禾费衍射主极大条纹角宽度与 N 的关系。

解 暗纹位置满足条件

$$Nd \sin \varphi = \pm m \lambda \quad m = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots$$

第 k 级主极大相邻的两暗纹有

$$m = kN + 1$$

$$m = kN - 1$$

$$Nd \sin \varphi_{kN+1} = (kN + 1) \lambda$$

$$Nd \sin \varphi_{kN-1} = (kN - 1) \lambda$$

$$Nd (\sin \varphi_{kN+1} - \sin \varphi_{kN-1}) = 2 \lambda$$

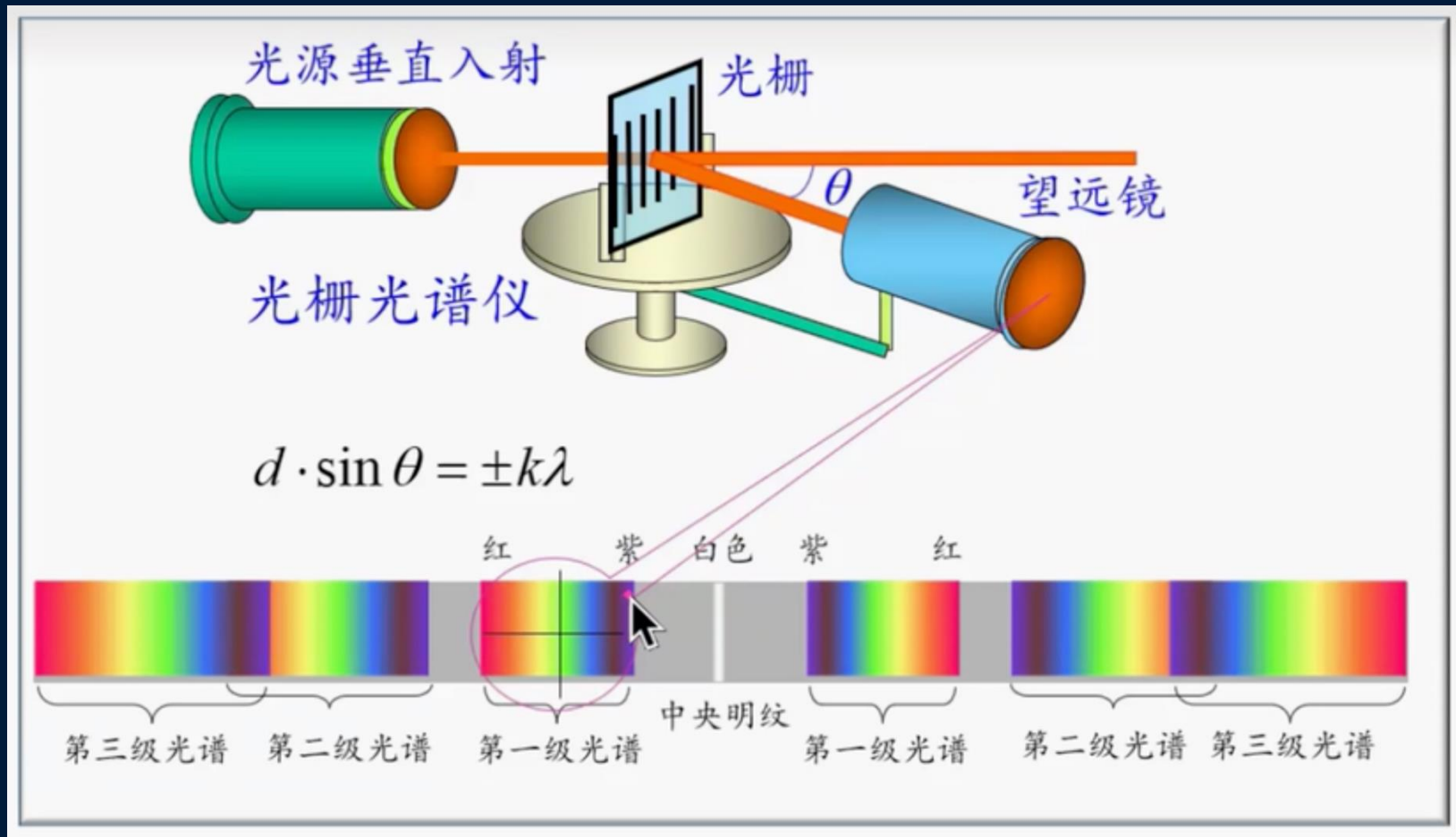
$$Nd \cos \varphi_{kN-1} (\varphi_{kN+1} - \varphi_{kN-1}) = 2 \lambda$$

第 k 级主极大角宽度

$$\Delta \varphi_k = \varphi_{kN+1} - \varphi_{kN-1} = \frac{2 \lambda}{Nd \cos \varphi_{\text{明}k}}$$

N 越大, 主极大角宽度越小, 条纹越细。

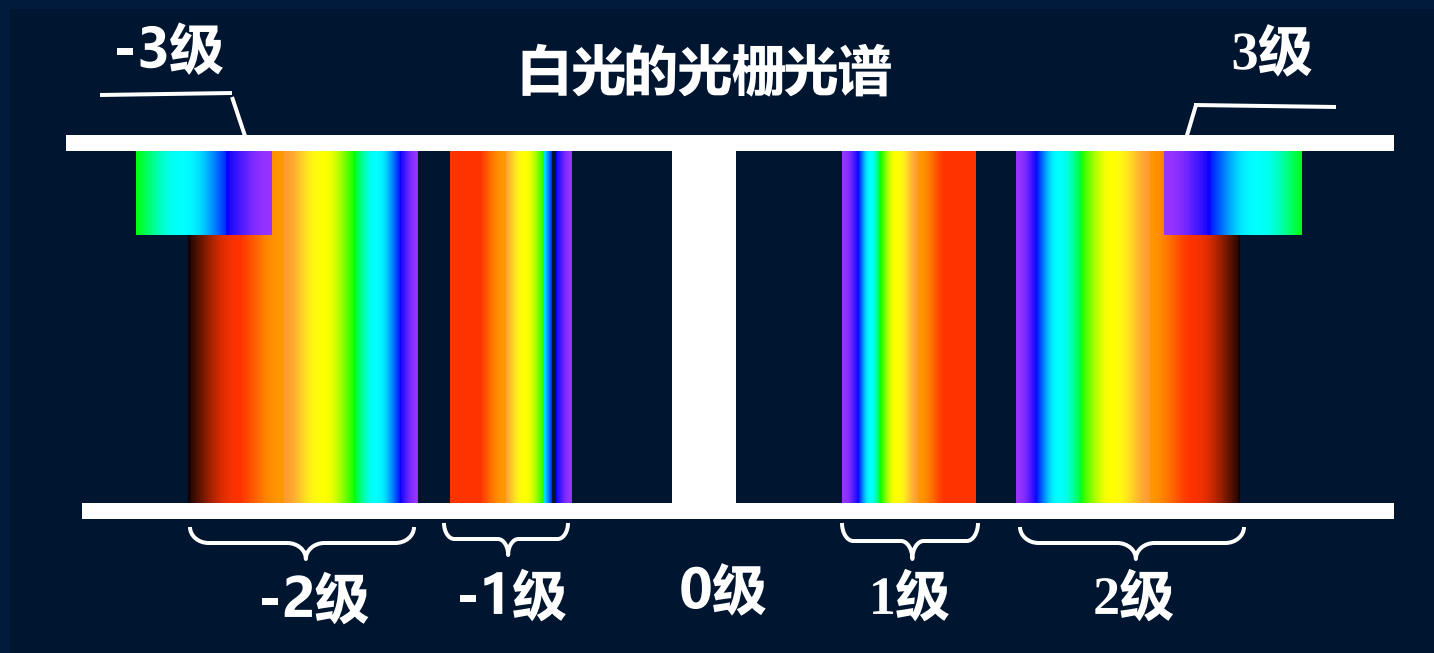
• 白色光入射



高级次光谱出现重叠

四. 光栅光谱及分辨本领

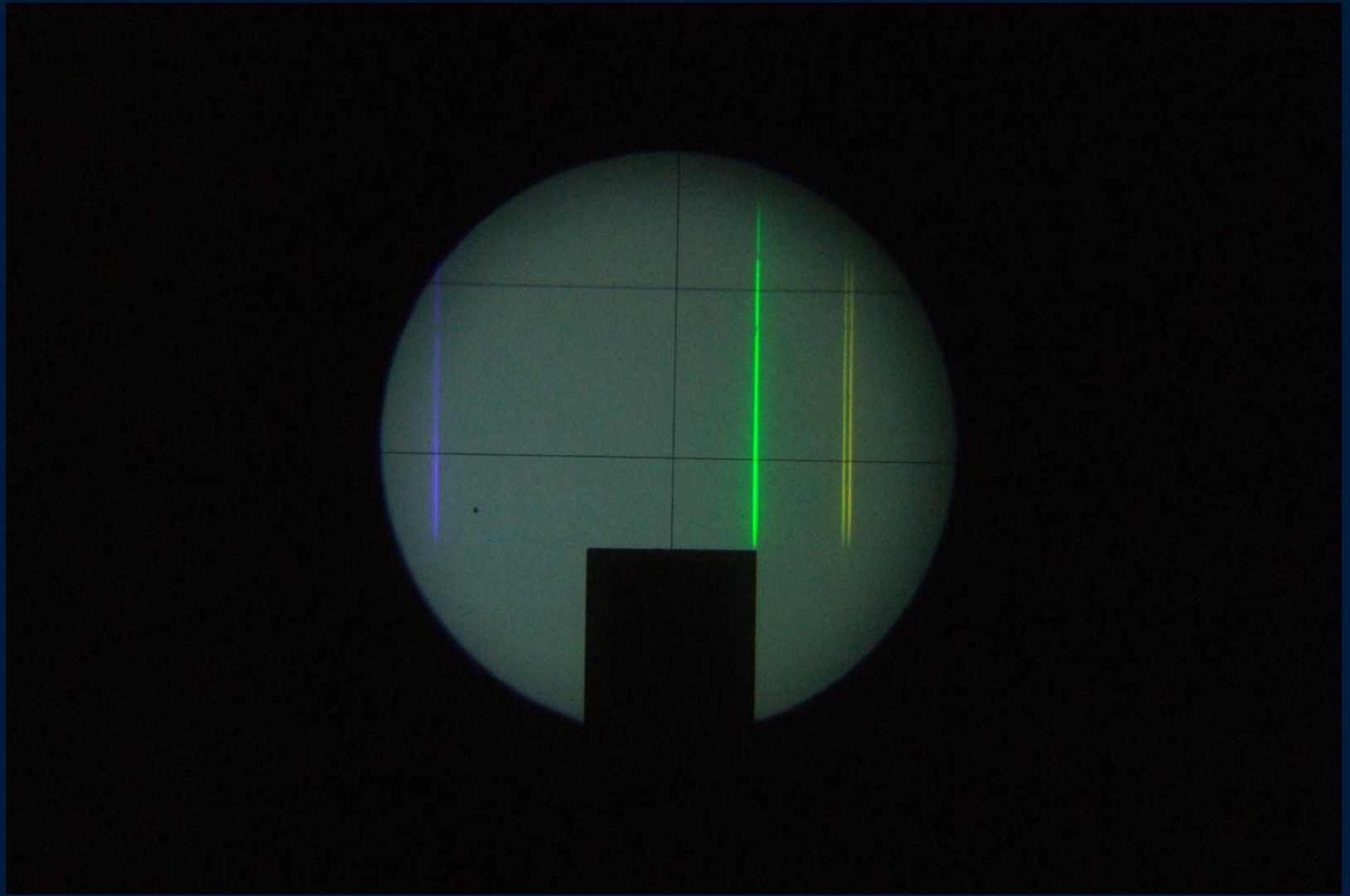
1. 光栅光谱



2. 光栅的色分辨本领

(将波长相差很小的两个波长 λ 和 $\lambda + \Delta\lambda$ 分开的能力)

光谱仪的色分辨率 $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$



光栅的色分辨率

设两波长 λ 和 $\lambda + \Delta\lambda$ 在第 k 级刚好能被光栅分辨，则有

$$\left. \begin{aligned} d \sin \varphi &= k(\lambda + \Delta\lambda) \\ d \sin \varphi &= \frac{Nk + 1}{N} \lambda \end{aligned} \right\} \longrightarrow k(\lambda + \Delta\lambda) = \frac{Nk + 1}{N} \lambda$$

根据瑞利判据：当 $\lambda + \Delta\lambda$ 的 k 级明纹与波长为 λ 的 $Nk + 1$ 级暗纹重合时刚能分辨

由分辨本领定义得

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN \quad (\text{光栅的色分辨本领})$$

★ 说明

增大主极大级次 k 和总缝数 N ，可提高光栅的分辨率。

例：设计一光栅，要求(1)能分辨钠光谱的 $5.890 \times 10^{-7} \text{m}$ 和 $5.896 \times 10^{-7} \text{m}$ 的第二级谱线；(2)第二级谱线衍射角 $\theta \leq 30^\circ$

解 (1) 按光栅的分辨本领 $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$

$$\text{得} \quad N = \frac{\lambda}{k\Delta\lambda} = \frac{5.890 \times 10^{-7}}{2 \times 0.006 \times 10^{-7}} \approx 491 \text{条}$$

即必须有 $N > 491$ 条

(2) 根据 $(a + b) \sin \theta = k\lambda$

$$a + b = \frac{k\lambda}{\sin \theta} = \frac{2 \times 5.893 \times 10^{-7}}{\sin 30^\circ} \text{m} = 2.36 \times 10^{-3} \text{mm}$$

由于 $\theta \leq 30^\circ$ 所以 $d = a + b \geq 2.36 \times 10^{-3} \text{mm}$

五. 斜入射的光栅方程

主极大条件

$$d(\sin \varphi + \sin \theta) = \pm k\lambda$$
$$k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

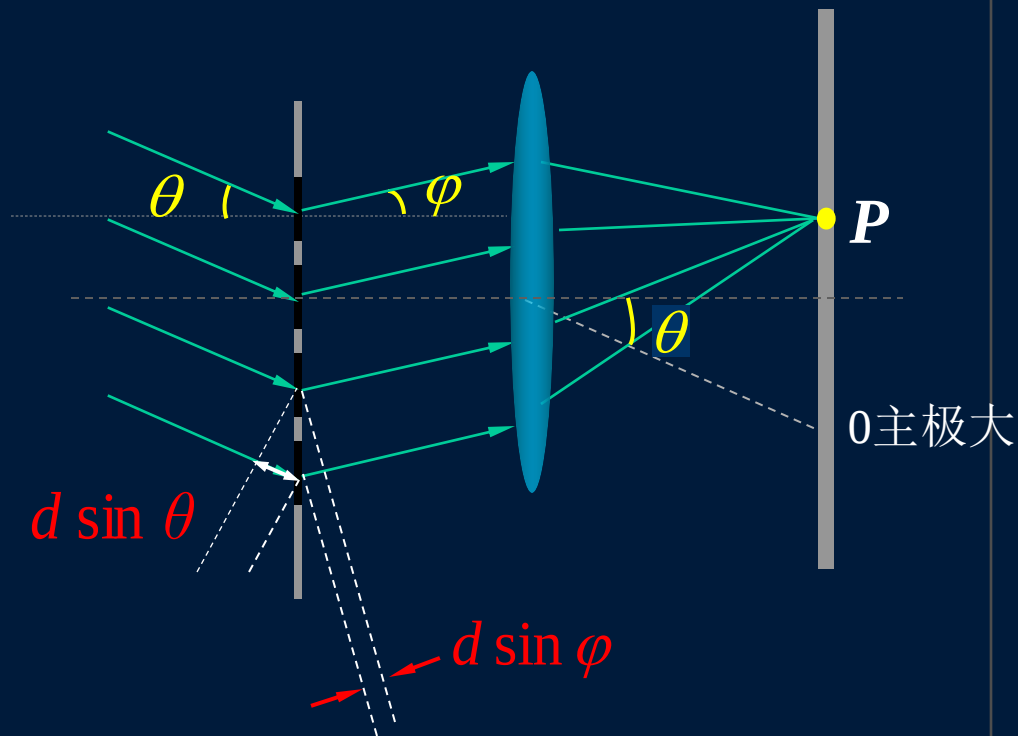
缺级条件

$$a(\sin \varphi + \sin \theta) = \pm k' \lambda$$
$$d(\sin \varphi + \sin \theta) = \pm k \lambda$$

理论上最多明条纹数 $(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$

$$k_{+\max} = \left[\frac{d}{\lambda} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta \right) \right] \quad k_{-\max} = \left[\frac{d}{\lambda} \left(\sin -\frac{\pi}{2} + \sin \theta \right) \right]$$

$$\Delta N = k_{+\max} - k_{-\max} + 1$$



例 一束波长为 480nm 的单色平行光，照射在每毫米内有600条刻痕的平面透射光栅上。

求 (1) 光线垂直入射时，最多能看到第几级光谱？

(2) 光线以 30° 入射角入射时，最多能看到第几级光谱？

解 (1) $d \sin \varphi = \pm k\lambda$ $d = \frac{1}{600 \times 10^3} = \frac{1}{6} \times 10^{-5} \text{ m}$

$$k_{\max} = [d/\lambda] = \left[\frac{10^{-5}}{6 \times 4.8 \times 10^{-7}} \right] = 3.47 \quad \text{能看到3级}$$

(2) $d(\sin \varphi + \sin 30^\circ) = \pm k\lambda$

$$k_{+\max} = \left[\frac{d}{\lambda} (1 + \sin 30^\circ) \right] = 5$$

$$k_{-\max} = \left[\frac{d}{\lambda} (-1 + \sin 30^\circ) \right] = -1$$

能看到3级

★ 说明

- (1) 斜入射级次分布不对称。
- (2) 斜入射时，可得到更高级次的光谱，提高分辨率。
- (3) 垂直入射和斜入射相比，完整级次数不变。

上题中垂直入射级数 $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

斜入射级数 $k = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- (4) 垂直入射和斜入射相比，缺级级次相同。

$$\left. \begin{aligned} d(\sin \varphi + \sin \theta) &= \pm k \lambda \\ a(\sin \varphi + \sin \theta) &= \pm k' \lambda \end{aligned} \right\} \longrightarrow k = k' \frac{d}{a} \quad k' = 1, 2, 3, \dots$$

例：波长为 600nm 的单色光垂直入射在一光栅上，第3级明条纹分别出现 $\sin\theta = 0.3$ 处，第4级缺级。求：(1) 光栅常量；(2) 光栅上狭缝宽度；(3) 屏上实际呈现的全部级数。

解：(1) $d = 2\lambda / \sin\theta_2 = 2 \times 600 \times 10^{-9} / 0.2 = 6.0 \times 10^{-6} \text{ m}$

(2) 由缺级条件知 $d/a = 4$ 或者 $d/a = 2$

所以 $a = d/4 = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$ 或者 $a = d/2 = 3 \times 10^{-6} \text{ m}$

(3) 由 $\theta_{\max} = \pi/2$ 得 $k_{\max} = d \cdot \sin\theta_{\max} / \lambda = 10$

实际呈现的全部级次为 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$

或者 $0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9$

如图所示为多缝光栅的光强分布图，从图中你可以分析出单色光入射情况、缝数、缺级、单缝衍射中央明条纹区域内有几条主极大条纹、缝间距与单缝宽度可能的比例

A

单色光入射情况：垂直于多缝光栅入射

B

缝数：3

C

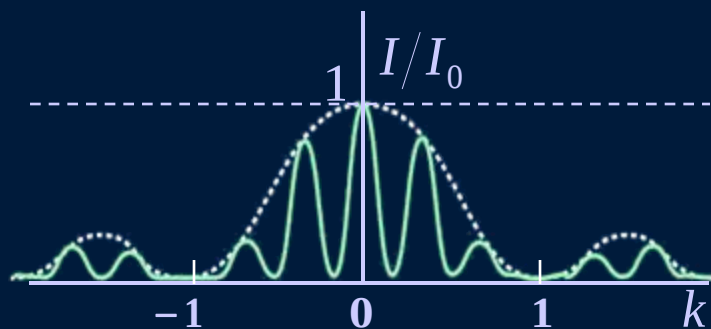
缺级: $\pm 3 \pm 6 \pm 9 \dots$

D

单缝衍射中央明条纹区域内主极大的数目：5

E

缝间距与单缝宽度的比例可能为: $d/a = 3$



提交

例 每毫米均匀刻有 100 条线的光栅，宽度为 $D=10\text{ mm}$ ，当波长为 500 nm 的平行光垂直入射时，第四级主极大谱线刚好消失，第二级主极大的光强不为 0。

求 (1) 光栅狭缝 a 可能的宽度；(2) 第二级主极大的半角宽度。

解 (1) 光栅常数 $a+b = \frac{1}{100} = 1 \times 10^{-2}\text{ mm}$

第四级主极大缺级，故有 $4 = k' \frac{a+b}{a} \quad 1 \leq k' < 4$

$k'=1$ 时 $a = \frac{a+b}{4} = \frac{1 \times 10^{-2}}{4} = 2.5 \times 10^{-3}\text{ mm}$

$k'=2$ 时，第二级主极大也发生缺级，不符题意，舍去。

$k'=3$ 时， $a = \frac{a+b}{4} \times 3 = \frac{1 \times 10^{-2}}{4} \times 3 = 7.5 \times 10^{-3}\text{ mm}$

符合题意的缝宽有两个，分别是 $2.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 和 $7.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$

(2) 光栅总的狭缝数
$$N = \frac{D}{a+b} = \frac{10}{10^{-2}} = 10^3$$

设第二级主极大的衍射角为 φ_{2N} ，与该主极大相邻的暗纹（第 $2N+1$ 级和第 $2N-1$ 级）衍射角为 φ_{2N+1} 和者 φ_{2N-1} ，由光栅方程及暗纹公式有

$$N(a+b)\sin \varphi_{2N} = 2N\lambda$$

$$N(a+b)\sin \varphi_{2N+1} = (2N+1)\lambda$$

代入数据后，得 $\varphi_{2N} = 5.739^\circ$ $\varphi_{2N+1} = 5.742^\circ$

第二级主极大的半角宽度

$$\Delta\varphi = \varphi_{2N+1} - \varphi_{2N} = 0.003^\circ$$