

双生子佯谬简析

从闵可夫斯基几何视角看世界线变动

■■■■^{a)}

少年班 240■■■，钱学森学院，西安交通大学。

(Dated: 2026 年 3 月 28 日)

本文以双生子佯谬为切入点，借助闵可夫斯基时空图阐释狭义相对论中的时间膨胀效应。通过比较惯性与非惯性世界线所对应的固有时，揭示“钟慢效应”的几何根源，并强调加速过程在打破参考系对称性、解决佯谬中的决定性作用。

Keywords: 双生子佯谬，闵可夫斯基几何，世界线，固有时，相对论

I. 问题重述

1911 年，法国物理学家保罗·朗之万基于爱因斯坦的狭义相对论，设计了一个思想实验来探讨时间膨胀效应可能导致的逻辑矛盾。其主要任务是：通过设想一对双胞胎分别留在地球和高速太空旅行后重逢的场景，揭示运动参考系不对称性带来的年龄差异，并解释这一看似悖论的现象。

朗之万在 1911 年的博洛尼亚国际哲学大会上提出：假设一对双胞胎，一个留在地球，另一个乘坐速度接近光速的火箭飞往遥远恒星并返回。当旅行者返回时，他会发现留在地球上的兄弟已衰老许多，而自己依然年轻；但从相对运动的观点看，若将旅行者视为静止，地球似乎也经历了同样的往返，为何结果却不对称？由此构成了“双生子佯谬”的最早表述。

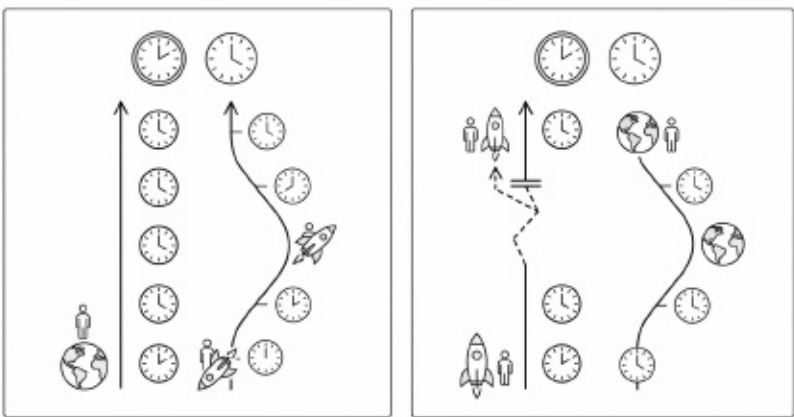


图 1. 双生子佯谬示意图

^{a)} Electronic mail: ■■■■ or ■■■■

II. 模型引入

在闵可夫斯基时空图中，时间轴 t 与空间轴 x 构成正交坐标系，每一事件均以坐标 (x, t) 表示。图中所示双曲线由方程

$$t^2 - x^2 = \tau^2$$

描出，其中 τ 为一正常数。此曲线的几何意义极其重要：它是所有与原点 O 保持固定时空间隔（即固有时） τ 的事件点的轨迹。根据狭义相对论的基本原理，时空间隔对于一切惯性观测者皆为不变量，故双曲线上每一点相对于原点的固有时均等于 τ ，无论该点所对应的空间位置如何。

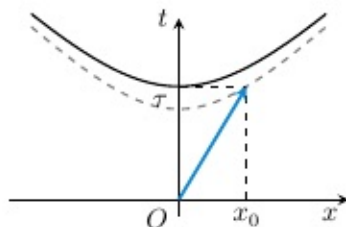


图 2. 钟慢的闵可夫斯基图

今考虑两个观测者：其一为静止于该惯性系的观测者 A ，其世界线即为 t 轴 ($x = 0$)。他从原点出发，沿 t 轴运动至双曲线的顶点 $(0, \tau)$ ，此时他所携带的标准钟所指示的固有时恰为 τ 。另一观测者 B 则从原点以恒定速度 $v = x_0/t_0$ 沿 x 轴正方向运动，其世界线为由原点至点 $P(x_0, t_0)$ 的直线。由于点 P 恰好位于同一双曲线之上，故从原点到 P 的固有时亦为 τ ；换言之，当 B 抵达 P 点时，他自己的钟同样显示经历了 τ 的时间。

然而，从静止观测者 A 所在的坐标系观测， B 抵达 P 所对应的坐标时间却是

$$t_{\text{总}} = \sqrt{\tau^2 + x_0^2} > \tau.$$

这意味着：在 A 看来，当自己的坐标钟走过 $t_{\text{总}}$ 时，运动观测者 B 的钟只走了 τ 。由于 $\tau < t_{\text{总}}$ ，我们便得到了“钟慢效应”这一著名的结论。

III. 问题分析

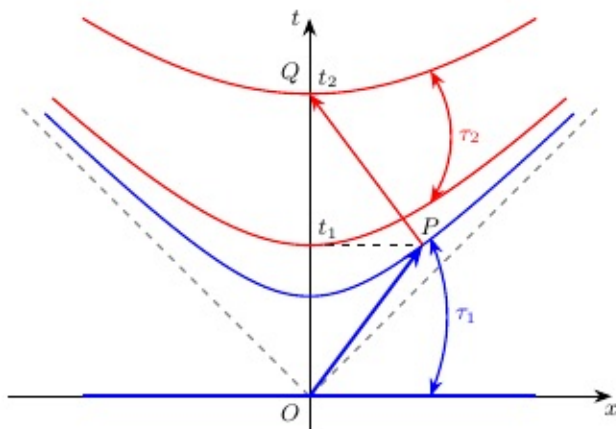


图 3. 双生子佯谬的闵氏时空示意图

在这幅闵可夫斯基时空图中，我们绘制了四条的等固有时双曲线。蓝色双曲线其上每一点相对于原点 O 的固有时均为 τ_1 ；下面的红色双曲线则是固有时为 t_1 的等时线，其上的红色双曲线每一点相对于这条双曲线的固有时均为 τ_2 。事件 P 位于蓝色双曲线上，事件 Q 位于红色双曲线上。

现在考虑一对双生子。弟弟留在地球 ($x = 0$)，其世界线即为 t 轴；哥哥从 O 出发，一直运动到事件 Q ，所经历的固有时正是红色双曲线的顶点值 τ_2 。哥哥则乘火箭出游：他从 O 沿蓝色直线匀速飞向 P ，这段去程的固有时为 τ_1 ；在 P 处立即掉头，沿红色直线匀速返航，最终在 Q 与弟弟重逢。返程段的固有时恰好等于 τ_2 ，因此哥哥经历的总固有时为 $\tau_1 + \tau_2$ 。

然而，闵可夫斯基几何的一个基本结论是：在类时世界中，惯性运动（直线）给出最长的固有时。弟弟的世界线是连接 O 与 Q 的直线（ t 轴），而哥哥的世界线是折线 $O-P-Q$ 。尽管我们图中只画出了四条等时线，但根据几何性质，弟弟的固有时 t_2 实际上大于哥哥的总固有时 $\tau_1 + \tau_2$ 。观察等时线在 t 轴上的截距，可以看出，从 O 到 Q 依次是蓝色初等时线-> 蓝色末等时线-> 蓝色初等时线-> 蓝色末等时线。其中蓝色初末等时线相对固有时差为 τ_1 ，红色为 τ_2 。而在蓝色末等时线与红色初等时线之间还有 $\Delta\tau$ 的固有时差。故而弟弟的固有时应当比哥哥大 $\Delta\tau$ 。故而在闵氏时空图中，不同路径的固有时可以直接由等时线的截取比较而得，而无需繁复的代数计算。闵氏时空观的重要结论即在于此：折线路径的固有时总是短于直线路径，因此出游的哥哥重逢时必然比留在地球的弟弟年轻。

IV. 问题拓展

A. 问题重述

在前一节中，我们讨论了飞船在折返点经历一个无限大的瞬时加速度，使其速度在无穷短的时间内反向。这一理想化虽然简化了计算，却隐藏了加速度过程的物理细节。事实上，任何真实的物理转向都不可能无限剧烈，必然占用有限的时间并伴随有限的加速度。所以我们将考察一个更现实的模型：飞船在折返点以恒定的固有加速度 a 完成从速度 $+v$ 到 $-v$ 的匀加速转向，然后匀速返回地球。

B. 符号设置

为简化讨论，我们依然采用对称旅行：飞船从地球（设为惯性系 S 的原点）出发，沿 x 轴以恒定速度 v ($0 < v < 1$ ，取光速 $c = 1$) 飞离。在某一时刻，飞船到达折返点并立即开始匀加速转向，加速度方向与运动方向相反，大小恒为 a 。转向过程持续有限时间，当飞船速度变为 $-v$ 时结束，随后以 $-v$ 匀速返回地球。整个旅程在地球惯性系中测得的总时间为 T ，我们将通过计算两段匀速运动与一段匀加速运动各自的固有时，得到最终的年龄差。

引入以下符号：

1. 匀速去程段：哥哥固有时 τ_1 ，地球时间 t_1 ，满足 $t_1 = \gamma\tau_1$ ，其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ 。
2. 匀加速转向段：哥哥固有时 $\Delta\tau$ ，地球时间 Δt 。
3. 匀速返程段：与去程对称，哥哥固有时亦为 τ_1 ，地球时间 t_1 。

于是地球总时间 $T = 2t_1 + \Delta t$ ，哥哥总固有时 $\tau_{\text{brother}} = 2\tau_1 + \Delta\tau$ 。年龄差定义为

$$\Delta = T - \tau_{\text{brother}} = 2(\gamma - 1)\tau_1 + (\Delta t - \Delta\tau). \quad (1)$$

C. 弟弟视角（惯性系）的推导

在弟弟所在的惯性系中，哥哥的运动完全确定。匀速段的时间膨胀直接由洛伦兹因子给出，关键是要计算加速段对应的地球时间 Δt 和哥哥固有时 $\Delta\tau$ 。

引入快度 $\eta = \text{artanh } v$ ，满足

$$v = \tanh \eta, \quad \gamma = \cosh \eta, \quad \gamma v = \sinh \eta.$$

对于匀加速运动，哥哥的固有加速度 a 等于快度对固有时的变化率：

$$\frac{d\eta}{d\tau} = a. \quad (3.2)$$

设在加速段开始时（ $\tau = 0$ ）快度为 $\eta_0 = \text{artanh } v$ ，加速度方向与速度相反，故

$$\eta(\tau) = \eta_0 - a\tau. \quad (3.3)$$

加速段结束时速度变为 $-v$ ，对应快度 $-\eta_0$ ，因此

$$a\Delta\tau = 2\eta_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau = \frac{2\eta_0}{a}. \quad (3.4)$$

在地球惯性系中，时间微元与哥哥固有时微元的关系为 $dt = \gamma(\tau)d\tau = \cosh \eta(\tau)d\tau$ 。因此

$$\Delta t = \int_0^{\Delta\tau} \cosh(\eta_0 - a\tau) d\tau.$$

作变量替换 $u = \eta_0 - a\tau$ ，得

$$\Delta t = \frac{1}{a} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} \cosh u du = \frac{2 \sinh \eta_0}{a} = \frac{2\gamma v}{a}. \quad (3.5)$$

将 (3.4) 和 (3.5) 代入 (1)，并利用 $t_1 = \gamma\tau_1$ 及 $T = 2t_1 + \Delta t$ 消去 τ_1 ，得

$$\tau_1 = \frac{T - \Delta t}{2\gamma}.$$

代入后整理：

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(\gamma - 1) \cdot \frac{T - \Delta t}{2\gamma} + \left(\frac{2\gamma v}{a} - \frac{2\eta_0}{a} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) (T - \Delta t) + \frac{2}{a} (\gamma v - \eta_0) \\ &= T \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \Delta t + \frac{2}{a} (\gamma v - \eta_0). \end{aligned}$$

将 $\Delta t = 2\gamma v/a$ 代入, 化简后得到

$$\Delta = T \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{2}{a} (v - \operatorname{artanh} v). \quad (2)$$

此即弟弟视角下计算出的兄弟二人重逢时的年龄差。当 $a \rightarrow \infty$ 时, 第二项趋于零, 退化为瞬时转向的经典结果 $\Delta_{\text{inst}} = T(1 - 1/\gamma)$ 。

D. 哥哥视角 (非惯性系) 的推导

现在我们从哥哥的视角出发, 利用广义相对论的等效原理和度规工具重新推导上述结果。哥哥的经历分为三段: 匀速去程、匀加速转向、匀速返程。在匀速段, 哥哥是惯性观测者, 其分析结果与弟弟视角相同。关键在加速段, 此时哥哥处于非惯性系, 需要引入适当的坐标系。

在去程匀速段, 哥哥的惯性系 S' 中, 地球以速率 v 远离, 因此地球时钟变慢。若该段哥哥固有时为 τ_1 , 则他认为地球年龄增加 τ_1/γ 。同理, 返程段 (惯性系 S'' 中) 他也认为地球年龄增加 τ_1/γ 。故匀速段总的地球年龄增加为 $2\tau_1/\gamma$ 。

在匀加速转向段, 哥哥的飞船具有恒定固有加速度 a 。我们建立一个随哥哥瞬时静止的 Rindler 坐标系 (τ, ξ) , 使得哥哥始终位于 $\xi = 0$, 且他的固有时 τ 即为该坐标系的时间坐标。Rindler 度规为

$$ds^2 = -(1 + a\xi)^2 d\tau^2 + d\xi^2. \quad (4.1)$$

此度规通过坐标变换从闵可夫斯基度规导出, 描述了平直时空在加速观测者眼中的几何。度规中 $(1 + a\xi)^2$ 因子体现了等效引力势 $\Phi(\xi) = a\xi$ (弱场近似下), 不同 ξ 处的时钟速率不同。

哥哥的世界线简单: $\xi = 0$, 故其固有时即为 τ 。我们需要知道地球在此坐标系中的运动, 以计算地球的固有时。地球在惯性系中静止于 $x = 0$, 通过坐标变换

$$t = \left(\xi + \frac{1}{a} \right) \sinh(a\tau), \quad x = \left(\xi + \frac{1}{a} \right) \cosh(a\tau),$$

可以反解出地球的轨迹。令 $x = 0$ 得 $\xi + 1/a = 0$ 或 $\cosh(a\tau) = 0$ 。前者给出 $\xi = -1/a$, 但代入第一式得 $t = 0$, 说明地球仅在该坐标系中对应一个固定点, 且 $1 + a\xi = 0$, 度规退化, 这对应于哥哥的视界。实际上, 地球位于哥哥的 Rindler 视界之外, 无法用单一的右 Rindler 楔形覆盖。因此, 直接从度规 (4.1) 积分地球世界线会遇到奇点, 必须考虑左 Rindler 楔形或采用其他方法。

为避免坐标覆盖的复杂性, 我们采用基于等效原理的瞬时静止惯性系分析。在加速段的每一瞬间, 哥哥都有一个瞬时共动惯性系。在该局部惯性系中, 地球以某一瞬时速度 $v(\tau)$ 运动。根据狭义相对论的时间膨胀公式, 地球固有时微元与哥哥固有时微元满足

$$d\tau_{\text{earth}} = \sqrt{1 - v(\tau)^2} d\tau.$$

这里 $v(\tau)$ 是地球在哥哥瞬时惯性系中的速度，其大小等于哥哥在惯性系中速度的大小（由相对性原理），即 $v(\tau) = \tanh(\eta_0 - a\tau)$ 。因此

$$\Delta\tau_{\text{earth, acc}} = \int_0^{\Delta\tau} \sqrt{1 - \tanh^2(\eta_0 - a\tau)} d\tau = \int_0^{\Delta\tau} \text{sech}(\eta_0 - a\tau) d\tau.$$

计算该积分：令 $u = \eta_0 - a\tau$ ，则

$$\Delta\tau_{\text{earth, acc}} = \frac{1}{a} \int_{\eta_0}^{-\eta_0} \text{sech } u (-du) = \frac{1}{a} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} \text{sech } u du = \frac{2}{a} \int_0^{\eta_0} \text{sech } u du.$$

利用 $\int \text{sech } u du = 2 \arctan(e^u)$ 或直接查表得 $\int_0^{\eta_0} \text{sech } u du = \arctan(\sinh \eta_0)$ ，于是

$$\Delta\tau_{\text{earth, acc}} = \frac{2}{a} \arctan(\sinh \eta_0) = \frac{2}{a} \arctan(\gamma v). \quad (4.2)$$

注意到此结果与弟弟视角中的 Δt 不同，这是因为瞬时惯性系方法给出的 $\Delta\tau_{\text{earth, acc}}$ 是哥哥在每一瞬时惯性系中测量到的地球固有时增量，而弟弟视角的 Δt 是地球自身的固有时增量。两者应当相等，但 (4.2) 与 $\Delta t = 2\gamma v/a$ 形式不同。这揭示了一个关键点：在哥哥的瞬时惯性系中，地球并非静止，且哥哥的“同时性”定义随时间变化，导致对地球固有时增量的测量必须考虑同时性曲面的倾斜。因此，直接积分 $\sqrt{1-v^2}d\tau$ 并不能得到地球的真实固有时，除非我们正确考虑了同时性的跳变。

实际上，从哥哥视角正确计算地球总年龄，需要将匀速段和加速段的边界处的同时性定义衔接起来。在去程惯性系 S' 中，哥哥在事件 A （加速段开始）认为地球的年龄为 τ_1/γ （加上之前的累积）。在返程惯性系 S'' 中，哥哥在事件 B （加速段结束）认为地球的年龄为 $T - \tau_1/\gamma$ （因为返程段他看到地球又老了 τ_1/γ ，且总地球时间为 T ）。因此，在哥哥看来，加速段期间地球年龄的跃增为

$$\Delta\tau_{\text{jump}} = T - \frac{2\tau_1}{\gamma}.$$

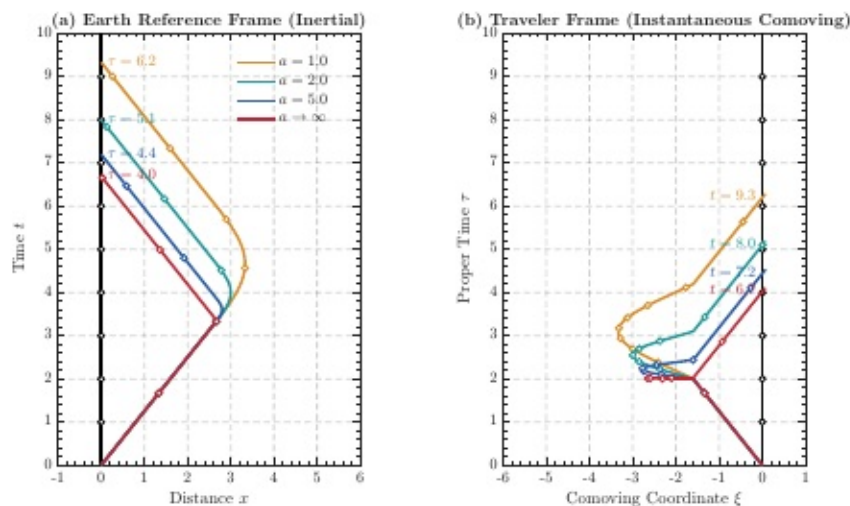
由 $T = 2\gamma\tau_1 + \Delta t$ 及 $\Delta t = 2\gamma v/a$ ，可得

$$\Delta\tau_{\text{jump}} = 2(\gamma - 1)\tau_1 + \frac{2\gamma v}{a} - \frac{2\tau_1}{\gamma} = 2\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\tau_1 + \frac{2\gamma v}{a}.$$

利用 $\gamma - 1/\gamma = \gamma v^2$ ，并代入 $\tau_1 = (T - \Delta t)/(2\gamma)$ ，最终可简化为

$$\Delta\tau_{\text{jump}} = T\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{2}{a}(v - \text{artanh } v),$$

这正是 (2) 式的右端。因此，哥哥视角中，地球的总年龄等于匀速段累积 $2\tau_1/\gamma$ 加上加速段的跃增 $\Delta\tau_{\text{jump}}$ ，而哥哥自身的固有时为 $2\tau_1 + \Delta\tau$ ，两者的差即 (2)。



由此可见，无论从哪个视角出发，最终得到的年龄差表达式完全一致。哥哥视角的分析凸显了加速过程中同时性定义的剧烈变化，这一变化可以用广义相对论的等效引力场来理解：在加速段，哥哥感受到的等效引力场导致地球时间的“蓝移”，从而补偿了匀速段的钟慢效应，使得重逢时弟弟更老。

E. 结论

通过对有限加速度转向模型的详细计算，我们验证了双生子佯谬的结论——旅行归来的哥哥比留在地球的弟弟年轻——并且得到了年龄差的精确表达式 (2)。该表达式表明，年龄差不仅取决于匀速段的速度 v 和总时间 T ，还与转向加速度 a 有关：加速度越小（转向越平缓），年龄差越小。当 $a \rightarrow \infty$ 时，回到瞬时转向的理想情形。两个视角的推导相互印证，体现了狭义相对论与广义相对论在处理非惯性运动时的自治性。

¹R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1-3 (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964).

²A. Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory* (Methuen & Co. Ltd, London, 1920) first English translation.

³Wikipedia contributors, “Theory of relativity — Wikipedia, the free encyclopedia,” https://en.wikipedia.org/wiki/Theory_of_relativity (2024), [Online; accessed 19-March-2024].

⁴Wikipedia contributors, “Twin paradox — Wikipedia, the free encyclopedia,” https://en.wikipedia.org/wiki/Twin_paradox (2024), [Online; accessed 19-March-2024].

⁵理查德·费恩曼, 罗伯特·莱顿, and 马修·桑兹, 费恩曼物理学讲义 (上海科学技术出版社, 上海, 2013) 第 1-3 卷, 新千年版.

⁶郭硕鸿, 电动力学, 第 3 版 ed. (高等教育出版社, 北京, 2008) 黄遁本, 李志兵, 林琼桂修订.

⁷爱因斯坦, 相对论, 文化伟人代表作图释书系 (重庆出版社, 重庆, 2006).