
光压公式推导

钱学森学院 少年班 240
西安交通大学

or

1 基于光子粒子假设的推导

1.1 假设与物理参数

将光子视为经典粒子，并作如下假设：

- 光子与器壁发生完全弹性碰撞，碰撞前后光子能量不变；
- 辐射场各向同性，光子在各方向上均匀分布；
- 光子数密度为 n ，光子频率均为 ν （单色近似）。

单个光子的动量大小为 $p = h\nu/c$ ，其中 h 为普朗克常量， c 为光速。设器壁表面面积为 S ，考察一段充分短的时间间隔 ΔT 。

1.2 光子撞击有效范围

我们假设整个物理过程发生在 ΔT 内。

对于一个入射角为 θ 的光子，在 ΔT 内，所能在器壁表面法线上运动的距离是

$$\Delta x = c\Delta T \cdot \cos \theta$$

光子的数密度为 n ，则在 ΔT 时间内，入射角为 θ 的光子与壁面发生撞击的总数为：

$$N(\theta) = n \cdot c\Delta TS \cos \theta$$

1.3 冲量传递

所以，只有与壁面的距离 $h < \Delta x$ 的光子才会与壁面发生撞击。发生撞击的光子（假设完全弹性碰撞）对壁面施加的冲量 I_0 为：

$$I_0 = 2p \cos \theta = 2 \frac{h\nu}{c} \cos \theta$$

那么入射角为 θ 的光子对壁面施加的冲量为：

$$I(\theta) = I_0 \cdot N(\theta) = 2nh\nu\Delta TS \cos^2 \theta$$

1.4 概率密度

在一个球体中，天顶角为 θ 的球扇形的体积为：

$$V(\theta) = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

它在球体中的比例为：

$$v(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

求导得概率密度

$$\rho(\theta) = \frac{dv(\theta)}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{2}$$

光子对壁面的总冲量 I 为：

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta) \rho(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} nh\nu \Delta TS \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

其中

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= \int (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \int (\sin \theta - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \int (\sin \theta - \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4}) d\theta \\ &= \int (\frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \cos \theta - \frac{1}{12} \cos 3\theta + C \end{aligned}$$

光子对壁面的总冲量 I 为：

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} nh\nu \Delta TS \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = nh\nu \Delta TS \left(-\frac{1}{4} \cos \theta - \frac{1}{12} \cos 3\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} nh\nu \Delta TS$$

则压强 p 为：

$$p = \frac{I}{\Delta TS} = \frac{1}{3} nh\nu$$

2 基于麦克斯韦电磁理论的推导

真空中电磁场的动量守恒定律为

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T} = -\rho \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

应力张量的笛卡尔分量为

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{B}^2 \right),$$

其中

$$\mathbf{T} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \end{pmatrix}.$$

其中 $\mathbf{E}^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$, $\mathbf{B}^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$ 。

考虑法向为 x 方向的器壁表面（即表面单位法向量 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ ）。该表面受到的辐射压强等于动量流在法向的分量，即

$$P = -\langle T_{xx} \rangle,$$

T_{xx} 为

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \varepsilon_0 \left(E_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) - \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2). \end{aligned}$$

在热平衡的各向同性辐射场中，电磁场分量平方的时间平均满足

$$\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle = \langle E_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle \mathbf{E}^2 \rangle, \quad \langle B_x^2 \rangle = \langle B_y^2 \rangle = \langle B_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle \mathbf{B}^2 \rangle.$$

将其代入 $\langle T_{xx} \rangle$:

$$\langle T_{xx} \rangle = -\frac{1}{6}\varepsilon_0\langle \mathbf{E}^2 \rangle - \frac{1}{6}\frac{1}{\mu_0}\langle \mathbf{B}^2 \rangle.$$

压强 $P = -\langle T_{xx} \rangle$ ，所以

$$P = \frac{1}{6}\varepsilon_0\langle \mathbf{E}^2 \rangle + \frac{1}{6}\frac{1}{\mu_0}\langle \mathbf{B}^2 \rangle.$$

电磁场的能量密度 u :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\langle \mathbf{E}^2 \rangle + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\langle \mathbf{B}^2 \rangle,$$

因此

$$P = \frac{1}{3}u$$

3 基于相对论能动张量的推导

宏观连续介质的能动张量可以写为

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P\eta^{\mu\nu},$$

其中 u^μ 是流体的四维速度（在局域静止系中 $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ）， ρ 是能量密度（在此记为 u ）， P 是压强， $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 是闵可夫斯基度规。该形式假设流体无粘滞、无热传导，且在局域静止系中各向同性。

对于光子气体（辐射场），我们处于无质量粒子组成的流体情况。在局域静止系中，四维速度 $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 。代入上式得到能动张量的矩阵形式：

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

因为各向同性，三个空间方向的压强相等： $T^{11} = T^{22} = T^{33} = P$ 。没有能量通量或剪切应力故非对角项为零

能动张量的迹（标量）定义为

$$\text{Tr}(T) = T^\mu_\mu = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33}.$$

将上述对角分量代入：

$$\text{Tr}(T) = u - P - P - P = u - 3P.$$

对于由无质量粒子组成的气体，其能动张量可以通过粒子的分布函数 $f(\mathbf{p})$ 表示为

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} f(\mathbf{p}),$$

其中 $p^0 = E/c$ 。该表达式是 Lorentz 协变的，且满足对称性。计算其迹：

$$T^\mu_\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu p_\mu}{p^0} f(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{p^0} f(\mathbf{p}).$$

对于光子，静止质量 $m = 0$ ，因此被积函数为零，故

$$T^\mu_\mu = 0.$$

电磁场的能动张量也可以从场张量 $F^{\mu\nu}$ 构造：

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F^\nu_\lambda + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta},$$

其迹为

$$\eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

利用 $F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} = -F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ ，得到迹为零。

将迹为零的条件 $u - 3P = 0$ 应用于各向同性的光子流体，直接解得

$$P = \frac{u}{3}.$$